Maths - Chapitre 22

Produit scalaire et espace euclidien

Tout comme la notion de vecteur, la notion de produit scalaire arrive tardivement en mathématiques, au tournant des XIX$^{\text{ème}}$ et XX$^{\text{ème}}$ siècles.
Cependant, nombre de théorèmes de ce chapitre ont une interprétation géométrique simple et étaient connus bien avant l'apparition du produit scalaire. En effet, comme pour les espaces vectoriels, il faut comprendre d'emblée que le principal changement par rapport à la géométrie traditionnelle concerne la nature des objets qui sont considérés comme fondamentaux :

- les notions de ***vecteurs et de scalaires***, ainsi que les ***opérations*** entre eux, sont les objets fondamentaux de la théorie des ***espaces vectoriels***. Sur ces notions sont construites celles qui étaient le soubassement de la géométrie traditionnelle : points, droites, plans, parallélisme.
- Les notions de ***produit scalaire et de norme*** sont les notions fondamentales de la théorie des ***espaces euclidiens***. Sur ces notions sont construites celles qui étaient le soubassement de la géométrie traditionnelle : ***distance, angle et orthogonalité***.

Le principal avantage que l'on tire de ce changement de point de vue est qu'il se généralise à des objets qui sortaient jusque-là du cadre de la géométrie traditionnelle. Comme nous l'avons vu, $(\mathcal{F}(I,\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des suites à valeurs réelles ou complexes aussi, de même que l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. L'ensemble des polynômes, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, l'ensemble des n-uplet, etc... munis des opérations habituelles en sont d'autres exemples.
Comme nous allons le voir, si l'on parvient à définir sur ces espaces vectoriels des produits scalaires, les notions géométriques de distance, d'angle ou d'orthogonalité pourront elle-même y être définies et généralisées.
Dans tout ce qui suit, $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I. Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

I.1. Produit scalaire

Définition 22.1 (Produit scalaire)

On dit qu'une application $s : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire lorsqu'il vérifie les propriétés suivantes :

1) ***Symétrie*** : $\forall u, v \in E, s(u,v) = s(v,u)$.
2) ***Bilinéarité*** : $\forall u, v, w \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   - $s(\lambda u + \mu v, w) = \lambda s(u,w) + \mu s(v,w)$;
   - $s(w, \lambda u + \mu v) = \lambda s(w,u) + \mu s(w,v)$.

3) ***Définition*** : $\forall u \in E, s(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

4) ***Positivité*** : $\forall u \in E, s(u,u) \geqslant 0$.

En résumé, un produit scalaire sur E est donc une ***forme bilinéaire symétrique définie positive***.

Notation

Plusieurs notations sont utilisée pour un produit scalaire :

$$s(u,v) = (u|v) = \langle u, v\rangle = u \cdot v$$

La notation utilisée dans ce chapitre sera le plus souvent $(u|v)$.

Remarques

- Un produit scalaire étant ***symétrique***, il suffit, après avoir démontré cette symétrie, de vérifier qu'il est linéaire à droite ou à gauche pour démontrer qu'il est bilinéaire.
  En pratique, on vérifiera donc d'abord la symétrie avant de vérifier la linéarité (à droite ou à gauche) dans les exercices visant à exhiber un produit scalaire sur un espace vectoriel donné.
- Il arrive que l'on définisse plusieurs produits scalaires sur un même espace vectoriel.
  Cette possibilité ne sera que peu utilisée dans ce chapitre mais sera très utilisée en seconde année pour démontrer par exemple une propriété fondamentale des matrices symétriques réelles.

Ex. 22.1 Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (i; j)$ et $\mathcal{B}' = (i'; j')$ deux bases de E.

1) Pour $(u,v) \in E^2$, on note $u = x_1 i + y_1 j$, $v = x_2 i + y_2 j$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ étant les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}$.
   Montrer que l'application qui à tout couple de vecteurs $(u,v) \in E^2$ associe $(u|v) = x_1x_2 + y_1y_2$ est un produit scalaire sur E.
2) Montrer qu'il en est de même de l'application $\langle u, v\rangle = x'_1x'_2 + y'_1y'_2$, $x'_1, y'_1, x'_2, y'_2 \in \mathbb{R}$ étant les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}'$.
3) Que valent $(i|j)$ et $\langle i', j'\rangle$?
4) On donne $i' = 2i + j$ et $j' = i - 2j$.
   Calculer $(i'|i')$, $(i'|j')$ et $(j'|j')$ puis exprimer pour $u, v \in E$ $\langle u, v\rangle$ en fonction de $(u|v)$.

Cor. 22.1

I.2. Espaces préhibertiens réels et espaces euclidiens

Définition 22.2 (Espace préhilbertien réel)

On appelle ***espace préhilbertien réel*** tout $\mathbb{R}$-***espace vectoriel muni d'un produit scalaire***.

Définition 22.3 (Espace euclidien)

On appelle ***espace euclidien*** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel ***de dimension finie*** muni d'un produit scalaire.

I.3. Exemples de référence

a) Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Définition 22.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle ***produit scalaire canonique*** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ l'application qui à tout couple $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ associe

$$(u|v) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

Ex. 22.2 Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est bien un produit scalaire.

Cor. 22.2

b) Produits scalaires sur $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$

Ex. 22.3 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$) et h une fonction continue et strictement positive sur $[a; b]$. Montrer que l'application qui à deux fonctions f et g continues sur $[a; b]$ associe

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)h(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

Cor. 22.3

Définition 22.5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

On appelle ***produit scalaire canonique*** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ l'application qui à tout couple $(u, v) \in (\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}))^2$ associe

$$(u|v) = \int_a^b u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Ex. 22.4 Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on donne les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 3X^2 - 1$ et $P_3 = 5X^3 - 3X$.

1) Calculer pour $i, j \in [\![0; 3]\!]$, $(P_i|P_j) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_i(t)P_j(t)\mathrm{d}t$.

2) En déduire les coordonnées de $Q = X^3 + X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B} = (P_0; P_1; P_2; P_3)$.

Remarque : ces polynômes sont appelés ***polynômes de Legendre***.

Cor. 22.4

II. Norme associée à un produit scalaire

II.1. Définition

Définition 22.6 (Norme sur un espace préhilbertien réel)

On appelle ***norme associée à un produit scalaire*** $(\cdot|\cdot)$ sur un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien E l'application définie par

$$N : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & N(u) = \sqrt{(u|u)} \end{cases}$$

Notation

La norme d'un vecteur u est notée $\|u\|$.

Ex. 22.5 Soient u et v deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

1) Écrire $\|u \pm v\|^2$ en fonction de $\|u\|$, $\|v\|$ et $(u|v)$.
2) En déduire trois expressions de $(u|v)$ ne faisant intervenir que $\|u \pm v\|$, $\|u\|$ et $\|v\|$.

Cor. 22.5

Remarques

- La positivité du produit scalaire garantit l'existence de la norme.
- La définition du produit scalaire implique que $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

II.2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 22.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Quels que soient les vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien, on a

$$|(u|v)| \leqslant \|u\| \, \|v\|$$

De plus, il n'y a égalité que si les vecteurs u et v sont colinéaires.

Démonstration

Ex. 22.6 Écrire la définition de la norme et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les produits scalaires canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$.

Cor. 22.6

II.3. Propriétés de la norme

Propriété 22.8

Quels que soient les vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien, on a :

- ***Séparation*** : $\|u - v\| = 0 \Leftrightarrow u = v$;
- ***Homogénéité*** : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| . \|u\|$;
- ***Inégalité triangulaire*** : $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Démonstration

Ex. 22.7 (Cor.)

1) Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$ et d'une norme associée notée $\|.\|$.
Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs unitaires de E tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \text{ avec } i \neq j, \|x_i - x_j\| = 1$$

Calculer pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ le produit scalaire $(x_i|x_j)$.

2) Soit $A = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{ij} = (x_i|x_j)$.
Montrer que A est inversible et en déduire que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre.

II.4. Complément : angle géométrique entre deux vecteurs

Étant donnés deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien réel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que

$$-\|u\| \|v\| \leqslant (u|v) \leqslant \|u\| \|v\|$$

Si u et v sont deux vecteurs non nuls, on a donc

$$-1 \leqslant \frac{(u|v)}{\|u\| \|v\|} \leqslant 1$$

Ceci permet de donner une définition de l'***angle géométrique formé par deux vecteurs non nuls*** :

Définition 22.9 (Angle géométrique de deux vecteurs non nuls)

Étant donnés deux vecteurs non nuls u et v d'un espace préhilbertien réel, on appelle ***angle géométrique formé par les vecteurs*** u ***et*** v le nombre

$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{(u|v)}{\|u\| \|v\|}\right) \in [0; \pi]$$

Ceci parachève l'objectif que l'on se donnait en introduction du chapitre : nous avons construit toutes les notions élémentaires de la géométrie traditionnelle à l'aide des notions de vecteurs et de produit scalaire.
Ces dernières notions deviennent les notions fondamentales sur lesquelles peut être construite la géométrie traditionnelle.
L'avantage que l'on tire de ce changement de point de vue est double :

- d'une part, il exhibe les ***propriétés algébriques*** (c'est-à-dire opératoires) nécessaires à la construction d'une géométrie ;
- d'autre part, il permet en conséquence de généraliser les notions géométriques à des espaces qui jusque-là sortaient de ce cadre : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$, etc…

III. Orthogonalité en dimension quelconque

Dans cette section, $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.
Il s'agit donc d'un ....

III.1. Définitions

Définition 22.10 (Vecteurs orthogonaux)

On dit que deux vecteurs u, v de E sont ***orthogonaux*** si

$$(u|v) = 0$$

Définition 22.11 (Sous-espaces vectoriels orthogonaux)

Étant donnés deux sous-espaces vectoriels G et H de E, on dit qu'ils sont ***orthogonaux*** si ***tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre***.
Autrement dit, G et H sont orthogonaux si

$$\forall u \in G, \forall v \in H, (u|v) = 0$$

Définition 22.12 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)

Étant donné un sous-espace vectoriel G de E, on appelle ***orthogonal de*** G l'***ensemble des vecteurs de*** E ***qui sont orthogonaux à tout vecteur de*** G.
Autrement dit, l'orthogonal de G est l'ensemble

$$\{v \in E, \forall u \in G, (u|v) = 0\}$$

Notation

Si deux vecteurs u et v de E sont orthogonaux, on note $u \perp v$.
Si deux sous-espaces vectoriels G et H de E sont orthogonaux, on note $G \perp H$.
L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel G de E est noté $G^\perp = \{v \in E, \forall u \in G, (u|v) = 0\}$.

III.2. Propriété

Propriété 22.13 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)

Soit G un sous-espace vectoriel de E. $G^{\perp}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

III.3. Familles orthogonales, orthonormales

Définition 22.14 (Famille orthogonale)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une ***famille orthogonale*** ou une ***famille de vecteurs orthogonaux*** si

$$\forall i, j \in [\![1;n]\!], i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$$

Remarque

Si $n = 1$, c'est-à-dire si la famille est formée d'un unique vecteur, elle est considérée comme orthogonale.

Définition 22.15 (Famille orthonormale)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une ***famille orthonormale*** ou une ***famille orthonormée*** ou encore une ***famille de vecteurs orthonormés*** si elle est ***orthogonale*** et que ***tout vecteur est de norme égale à 1***.
Autrement dit, $\mathcal{F}$ est une ***famille orthonormale*** si

$$\forall i, j \in [\![1;n]\!], (u_i|u_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ex. 22.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, $f_k : x \in [-\pi;\pi] \mapsto \cos(kx)$. On note $\mathcal{F} = (f_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ la famille de l'espace préhilbertien réel $\mathcal{C}^0([-\pi;\pi];\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

1) La famille $\mathcal{F}$ est-elle orthogonale ?
2) La famille $\mathcal{F}$ est-elle orthonormale ?
   Si ce n'est pas le cas, construire à partir de $\mathcal{F}$ une famille orthonormale.

Cor. 22.8

III.4. Propriété d'une famille orthogonale

Propriété 22.16 (Liberté d'une famille orthogonale)

Toute famille orthogonale de vecteurs ***non nuls*** est libre.

Démonstration

III.5. Théorèmes de Pythagore

Théorème 22.17 (Théorème de Pythagore : 1ère version)

Soient u et v deux vecteurs de E.
$u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Démonstration

Théorème 22.18 (Théorème de Pythagore : 2ème version)

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille orthogonale de vecteurs de E.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2.$$

Démonstration

Important ! Réciproque du théorème de Pythagore

La réciproque du théorème de Pythagore n'est valable que dans le cas de la somme de deux vecteurs. Dans le cas de trois vecteurs ou plus, on peut trouver des contre-exemples.

Ex. 22.9 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, on donne les trois vecteurs $u = (1;2)$, $v = (0;2)$ et $w = (0;-1)$.
Que valent $\|u+v+w\|^2$ et $\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$?
La famille (u, v, w) est-elle orthogonale ?
Donner un exemple d'une famille de quatre vecteurs qui vérifie l'identité de Pythagore mais qui n'est pas orthogonale.

Cor. 22.9

III.6. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 22.19

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille orthonormale de E.

Quel que soit le vecteur v de E, $v' = v - \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)\, u_i$ est orthogonal à tout vecteur de Vect $\mathcal{F}$.

Démonstration

Méthode : Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Le théorème précédent permet de construire à partir d'une famille $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ libre de vecteurs non nuls de E une nouvelle famille $\mathcal{F}' = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ orthonormale.
L'algorithme qui en découle est appelé ***procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*** et se décompose comme suit :

- ***Initialisation*** : $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ est un vecteur unitaire et forme donc (à lui seul) une famille orthonormale.
- ***Propagation et hérédité*** : pour i allant de 2 à n, on suppose que la famille $\mathcal{F}'_{i-1} = (v_k)_{k\in[\![1;i-1]\!]}$ est orthonormale
  - ⋆ calculer $u'_i = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} (v_k|u_i)\, v_k$. D'après le théorème précédent u'_i est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}'_{i-1}$. De plus u'_i est non nul car $\mathcal{F}$ est libre (par l'absurde si l'on n'est pas convaincu).
  - ⋆ Le vecteur $v_i = \dfrac{u'_i}{\|u'_i\|}$ est donc unitaire et orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}'_{i-1}$. La famille $\mathcal{F}'_i = (v_k)_{k\in[\![1;i]\!]}$ est donc orthonormale.
- ***Conclusion*** : à l'arrêt de l'algorithme, la famille $\mathcal{F}' = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ obtenue est orthonormale.

Ex. 22.10 (Cor.)

1) On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ l'application $(P,Q) \mapsto (P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2) Même question pour $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
3) Trouver une base orthonormale de E dans les deux cas précédents.

IV. Orthogonalité en dimension finie

Dans cette section, $(F, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ***de dimension finie*** $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.
Il s'agit donc d'un ....

IV.1. Bases orthonormées

Définition 22.20 (Base orthonormée)

On appelle ***base orthonormée*** ou ***base orthonormale*** d'un espace euclidien F toute famille libre, génératrice et orthonormale de F.

Théorème 22.21 (Existence de bases orthonormées)

Tout espace euclidien F possède au moins une base orthonormée.

Démonstration

IV.2. Coordonnées en base orthonormée

Propriété 22.22 (Propriété fondamentale des espaces euclidiens)

Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de F (euclidien).
Alors, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ la coordonnée suivant u_i de tout vecteur v de F est

$$x_i = (u_i|v)$$

Démonstration

IV.3. Expressions du produit scalaire et de la norme

Propriété 22.23

Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de F (euclidien).
Alors quels que soient les vecteurs $v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ et $w = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$ on a

- $(v|w) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$;
- $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Démonstration

IV.4. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 22.24

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
Quel que soit le vecteur $u \in E$, il existe un unique vecteur $v = p_F(u) \in F$ tel que $u - v \in F^{\perp}$.

Démonstration

Définition 22.25 (Projection orthogonale sur un espace euclidien)

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
On appelle ***projection orthogonale*** sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
Autrement dit, la projection orthogonale sur F est l'application p_F qui à tout vecteur u de E associe l'unique vecteur v de F tel que $u - v \in F^\perp$.

Corollaire 22.26

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
Tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$.

IV.5. Remarque importante

Les théorèmes de la sous-section précédente ne sont valables que pour un sous-espace vectoriel F de ***dimension finie***. L'exercice suivant donne un contre-exemple dans le cas où F est de dimension infinie.

Ex. 22.11

1) Montrer qu'une application continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, qui s'annule sur tout intervalle ouvert non vide $I \subset [0;1]$, est l'application nulle.
   Indication : pour une application $f \in \mathcal{F}(E, F)$, ***s'annuler*** et ***être nulle*** ont des significations (très) différentes...
2) Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique et $F = \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$.
   a) Montrer que $F^\perp = \{x \in [0;1] \mapsto 0\}$.
   b) En déduire que si $f \in E \backslash F$, il n'existe pas de fonction $g \in F$ telle que $f - g \in F^\perp$.
   c) Que vaut $\left(F^\perp\right)^\perp$?

IV.6. Propriétés

Propriété 22.27

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
La projection orthogonale p_F sur F est un projecteur, autrement dit $p_F \circ p_F = p_F$.

Démonstration

Propriété 22.28 (Inégalité de Bessel)

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le vecteur $u \in E$,

$$\|p_F(u)\| \leqslant \|u\|$$

Démonstration

Propriété 22.29

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le vecteur $u \in E$, $v = p_F(u)$ est l'unique vecteur de F vérifiant

$$\|u - v\| = \min_{w \in F} \|u - w\|$$

Démonstration

IV.7. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace euclidien

Théorème 22.30

Soient E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
Alors $F^{\perp}$ et F sont supplémentaires.

Démonstration

Théorème 22.31

Soient E un espace ***euclidien*** de dimension n et F un sous-espace vectoriel de dimension p de E. Alors $\dim F^{\perp} = n - p$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Démonstration

V. Correction des exercices

Cor. 22.7 :

1) Les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont unitaires donc $\forall i \in [\![1; n]\!]\,, \|x_i\|^2 = (x_i|x_i) = 1$.
De plus, par hypothèse, $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2$ avec $i \neq j, \|x_i - x_j\| = 1$.
Donc $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2$ avec $i \neq j, \|x_i - x_j\|^2 = 1 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\,(x_i|x_j)$.
Donc $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2$ avec $i \neq j, (x_i|x_j) = \dfrac{1}{2}$.

2) Soit $A = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{ij} = (x_i|x_j)$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ d'après la question précédente.

Donc $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{n+1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} & \frac{n+1}{2} \\ \vdots & & \ddots & 1 & \frac{n+1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{n+1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{n+1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$

Finalement $\det(A) = \dfrac{n+1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{n+1}{2^n}$.

Montrons maintenant que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.

En effectuant le produit scalaire par x_j pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on obtient le système :

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or A est inversible. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Donc la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre.

Cor. 22.10 :

1) On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.
Symétrie : $(P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) = Q(-1)P(-1) + Q(0)P(0) + Q(1)P(1) = (Q|P)$.
Linéarité à gauche : $(aP_1 + bP_2|Q) = aP_1(-1)Q(-1) + aP_1(0)Q(0) + aP_1(1)Q(1) + bP_2(-1)Q(-1) + bP_2(0)Q(0) + bP_2(1)Q(1) = a\,(P_1|Q) + b\,(P_2|Q)$.
Par symétrie, c'est bien une forme bilinéaire.
Positivité : $(P|P) = \sum_{i=-1}^{1} P(i)^2 \geqslant 0$.
Définition : $(P|P) = 0 \Rightarrow P(-1) = P(1) = P(0) = 0$.
Or P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui possède strictement plus de 2 racines : c'est donc le polynôme nul.

2) $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$: il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}^0([-1;1], \mathbb{R})$.
Les fonctions polynomiales étant continues et $[-1;1]$ étant un ensemble infini, c'est bien un

produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ (l'égalité des polynômes et l'égalité des fonctions polynomiales associées sont en effet identiques).

3) On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt en partant de la base canonique.
$P_1 = 1$. $\|P_1\|_1^2 = 3$ donc $Q_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ est un vecteur normé pour le premier produit scalaire.
$P_2 = X$. $P_2 - (P_2|Q_1)\, Q_1 = X - 0 = X$ et $\|X\|_1^2 = 2$ donc $Q_2 = \dfrac{\sqrt{2}X}{2}$ forme avec Q_1 une famille orthonormée.
$P_3 = X^2$. $P_3 - (P_3|Q_1)\, Q_1 - (P_3|Q_2)\, Q_2 = X^2 - \dfrac{2}{3}$.
Enfin, $\left\| X^2 - \dfrac{2}{3} \right\|_1^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{3}$.
Donc $Q_3 = \dfrac{3\sqrt{6}X^2 - 2\sqrt{6}}{6}$ forme avec Q_1 et Q_2 une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
Pour le second produit scalaire, on retrouve les polynômes de Legendre vus à l'exercice 22.4.