Maths - TD n° 4

Introduction aux probabilités

I. La naissance des probabilités : correspondance entre *Blaise Pascal* et *Pierre de Fermat*

L'ensemble de la correspondance connue de **Blaise Pascal** (voir note 1 page 15) peut être consulté sur **Gallica** à l'adresse suivante : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69975r. Nous allons nous intéresser plus particulièrement à la lettre du 29 juillet 1654 à **Pierre de Fermat** (voir note 2 page 267) :
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69975r/f204.image.
Le problème discuté dans la correspondance que nous allons détailler est le suivant : deux joueurs jouent à un jeu de hasard en trois parties gagnantes. C'est-à-dire que celui des deux qui remporte trois parties en premier, remporte la mise. Par suite d'un empêchement, ils doivent arrêter leur jeu avant la fin. Comment doivent-ils alors se répartir la mise suivant le nombre de parties remportées par chacun pour que cette répartition tienne un compte juste de l'avantage que l'un ou l'autre des deux joueurs a pris sur le second ?

De Blaise Pascal à Fermat : le 29 juillet 1654

« Monsieur,
L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis[1] , que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les partis des dés et des parties dans la parfaite justesse ; j'en suis tout satisfait car je ne doute plus maintenant que je sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous[...]
Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à l'idée dans cette recherche ; mais parce que la peine des combinaisons est excessive j'en ai trouvé un abrégé, et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots ; car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.
Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, 3 parties, et chacun a mis 32 pistoles en [jeu].
Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles ; si l'autre la gagne ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.
Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils ne veulent point hasarder cette partie, et se hasarder sans la jouer, le premier doit dire : "*Je suis sûr d'avoir* 32 *pistoles car la perte même me les donne ; mais pour les* 32 *autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ;* ***le hasard est égal*** *; partageons donc ces* 32 *pistoles* ***par la moitié****, et me donnez outre cela, mes* 32 *qui me sont sûres.*" Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.
Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie... »

Questions

1. En suivant le même raisonnement que Pascal, dire comment les deux joueurs doivent se partager la mise de 64 pistoles s'ils arrêtent le jeu alors que le premier joueur gagne 2 parties à 0.
2. Comment les deux joueurs doivent se partager la mise de 64 pistoles s'ils arrêtent le jeu alors qu'il y a égalité 1 partie partout ?
3. Comment les deux joueurs doivent se partager la mise de 64 pistoles s'ils arrêtent le jeu alors que le premier joueur gagne 1 partie à 0 ?

1. Cette lettre ne nous est pas parvenue. ***Parti*** (au masculin) est ici à prendre au sens de ***répartition***.

De Blaise Pascal à Fermat : le 29 juillet 1654 (suite)

« [. . .] Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une nouvelle partie, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie, donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : "Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 ***par la moitié***. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 ***par la moitié***, prenez en 12 et moi 12, qui, avec 32, font 44."

Or, par ce moyen, vous voyez, par les simples soustractions, que pour la première partie il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles, pour la seconde autres 12, et pour la dernière 8.

Or, pour ne plus faire de mystère, puisque vous voyez aussi bien tout à découvert, et que je n'en faisais que pour voir si je ne me trompais pas, la valeur (j'entends la valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de deux est double de la dernière partie de trois et quadruple de la dernière partie de quatre et octuple de dernière partie de cinq, etc. . . »

Questions

1. Que signifie Pascal par la phrase : « . . .pour la première partie il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles, pour la seconde autres 12, et pour la dernière 8. » ?
2. Au sens où l'entend Pascal, quelle est la « valeur de la dernière partie de deux », la « valeur de la dernière partie de trois », la « valeur de la dernière partie de quatre » ?
3. Calculer la « valeur de la dernière partie de cinq ».
4. Comment généraliser ce résultat ?

De Blaise Pascal à Fermat : le 29 juillet 1654 (suite)

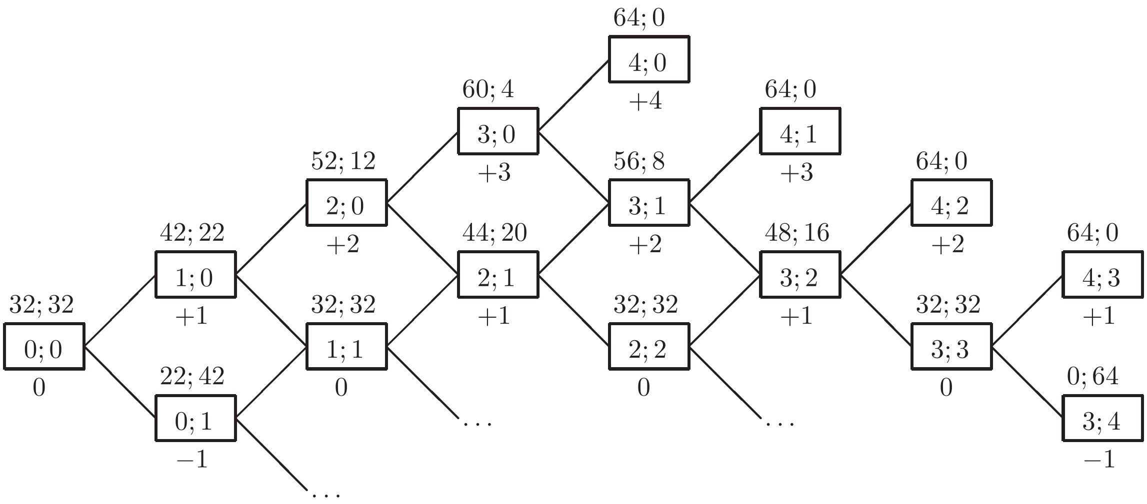
« Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver : elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser, et voici le problème dont je faisais tant de cas, comme en effet il me plaît fort :

Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première. »

Questions

1. Représenter graphiquement à l'aide d'un arbre tous les scores possibles d'un jeu en 4 parties gagnantes depuis le début à $0-0$ jusqu'à la victoire d'un des deux joueurs.
2. Représenter sur cet arbre la répartition des mises que Pascal préconise en cas d'arrêt précoce du jeu dans le cas où chaque joueur met 32 pistoles en jeu.
3. Expliquer pourquoi cet arbre contient les arbres des jeux en 1, 2 et 3 parties gagnantes.
4. Calculer la valeur de chaque partie au sens où l'entend Pascal dans le cas d'un jeu en 5 parties gagnantes.
5. Quelle est la réponse au problème que Pascal se pose : « Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première. » ?

II. Correction des exercices sur la correspondance Fermat-Pascal



Légende :

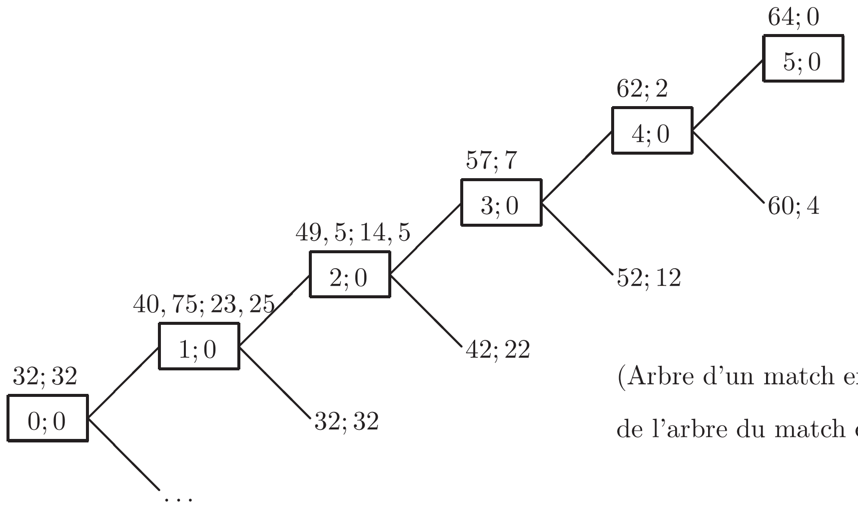
Partis ou ***répartition des gains***

$\boxed{\text{Score}}$

Avantage

L'arbre ci-dessus représente tous les scores possibles lors d'un match en 4 manches gagnantes (la partie inférieure de l'arbre qui est manquante est l'exacte symétrique de la partie supérieure). La répartition des gains en cas d'arrêt prématuré de la partie a été calculée selon la méthode indiquée par Pascal.
Si le score en arrive à $1; 1$, il suffit pour qu'un joueur gagne la partie qu'il gagne 3 manches. Autrement dit, à $1; 1$, le reste de la partie se joue en 3 manches gagnantes.
De même, à $2; 2$, le reste de la partie se joue en 2 manches gagnantes. Et à $3; 3$, le reste de la partie se joue en 1 manche gagnante, c'est-à-dire que celui des deux qui gagne la manche suivante a gagné la partie.
Ceci nous permet d'affirmer que l'arbre de la répartition des gains pour un match en 1 manche gagnante se trouve inclus dans l'arbre pour un match en 2 manches gagnantes, qui se trouve inclus dans l'arbre pour un match en 3 manches gagnantes, qui se trouve inclus dans l'arbre pour un match en 4 manches gagnantes etc...

Pour construire l'arbre de la répartition des gains pour un match en 5 manches gagnantes, il suffit donc de construire les bords de l'arbre ci-dessus, et comme l'arbre est symétrique, de construire le bord supérieur.



(Arbre d'un match en 4 manches gagnantes à l'intérieur de l'arbre du match en 5 manches gagnantes.)

Finalement, au sens où l'entend Pascal et pour une mise de 32 pistoles par joueur :

- la première manche d'un match en 1 manche gagnante vaut 32 pistoles ;
- la première manche d'un match en 2 manches gagnantes vaut 16 pistoles ;
- la première manche d'un match en 3 manches gagnantes vaut 12 pistoles ;
- la première manche d'un match en 4 manches gagnantes vaut 10 pistoles ;
- la première manche d'un match en 5 manches gagnantes vaut 8,75 pistoles.

D'une manière générale, pour un match en n manches gagnantes, Pascal propose la formule suivante pour le calcul de la valeur de la première manche lorsque chaque joueur a fait une mise de M :

la première manche d'un match en n ***manches gagnantes vaut*** $M \times \dfrac{\texttt{produit des (n} - \texttt{1) premiers nombres impairs}}{\texttt{produit des (n} - \texttt{1) premiers nombres pairs}}$

Ce qui appliqué aux cas déjà calculés, donne :

- 2 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{M}{2}$
- 3 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1 \times 3}{2 \times 4} = \dfrac{3M}{8}$
- 4 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} = \dfrac{5M}{16}$
- 5 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8} = \dfrac{35M}{128}$

Généralisation :

1. donner une formule explicite pour la valeur de la première manche d'un match en n manches gagnantes à l'aide de factorielles et de puissances de 2 ;
2. combien vaut la $k^{\text{ième}}$ manche d'un match en n manches gagnantes ?