# Résolution du problème des partis

Le but de ce TD est de donner une formulation moderne au problème des partis discuté par **Blaise Pascal** (voir note 1 page 15) et **Pierre de Fermat** (voir note 2 page 267) que nous avons introduit dans le TD n°4.

On rappelle que ce problème est le suivant : deux joueurs jouent à un jeu de hasard en $n \in \mathbb{N}^*$ manches gagnantes. C'est-à-dire que celui des deux qui remporte $n$ manches en premier, remporte la mise. Par suite d'un empêchement, ils doivent arrêter leur jeu avant la fin. Comment doivent-ils alors se répartir la mise suivant le nombre de manches remportées par chacun pour que cette répartition tienne un compte juste de l'avantage que l'un ou l'autre des deux joueurs a pris sur le second ?

## I. Modélisation du problème

### I.1. Discussion sur le travail de modélisation d'un problème de probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de manches garantissant la victoire aux joueurs (autrement dit, le jeu est en $n$ manches gagnantes).

L'objet de ce paragraphe est de formaliser le problème posé c'est-à-dire d'en donner un modèle permettant à la fois de décrire correctement les situations qui peuvent survenir, de représenter les différentes notions et grandeurs pertinentes et d'énoncer l'hypothèse d'équiprobabilité (« le hasard est égal » nous dit Pascal) conduisant au calcul des probabilités.
Notamment, il nous faut préciser :

- l'univers, et pour cela s'interroger sur les événements intervenant dans le problème posé ;
- les variables aléatoires intéressantes.

Comme nous le verrons, plusieurs modélisations sont possibles, ***chacune ayant un intérêt***, chacune présentant des avantages et des inconvénients. Notamment certaines modélisations faciliteront le calcul des probabilités, d'autres permettront d'exprimer plus simplement des événements ayant un intérêt particulier.

Commençons par suivre Pascal dans sa modélisation : son raisonnement se fonde sur les ***scores*** respectifs des joueurs. Un premier modèle consiste donc à faire intervenir l'***univers des scores***. En numérotant les deux joueurs, on peut ainsi représenter un événement élémentaire par la suite des couples de scores des deux joueurs du début à la fin de la partie. Un événement élémentaire est donc dans ce modèle une liste de points du plan $\mathbb{N}^2$ vérifiant les conditions suivantes :

- le premier élément de la liste est le point $(0;0)$ ;
- deux éléments successifs de la liste sont de la forme $(x;y),(x+1;y)$ ou $(x;y),(x;y+1)$ ;
- le dernier élément de la liste est soit de la forme $(n;y)$ où $y \in [\![0;n-1]\!]$, soit de la forme $(x;n)$ où $x \in [\![0;n-1]\!]$.

Une telle modélisation de la partie s'appelle ***marche aléatoire***.

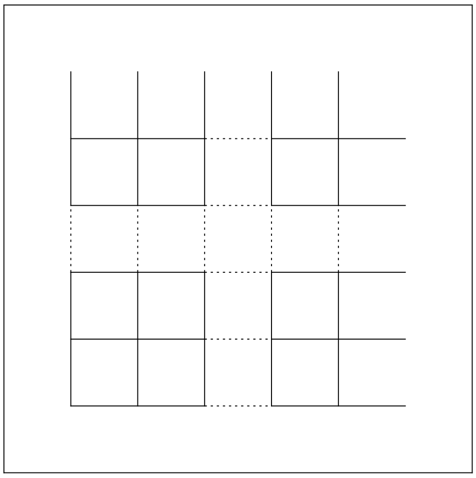
Une seconde modélisation possible consiste à ne donner pour chaque manche que le vainqueur de cette manche, en attribuant par exemple à l'un des joueurs la lettre $A$ et à l'autre la lettre $B$. Une partie, c'est-à-dire un événement élémentaire, est alors représentée par un ***mot*** formé des lettres $A$ et $B$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- un mot contient exactement $n$ lettres $A$ ou exactement $n$ lettres $B$ ;
- si un mot contient $n$ lettres $A$, il se termine par un $A$ (la partie est terminée dès qu'un joueur a gagné $n$ manches) et contient alors moins de $n-1$ lettres $B$ ;
- réciproquement, si un mot contient $n$ lettres $B$, il se termine par un $B$ et contient alors moins de $n-1$ lettres $A$.

Nous allons entrer dans le détail de chacune de ces modélisations.

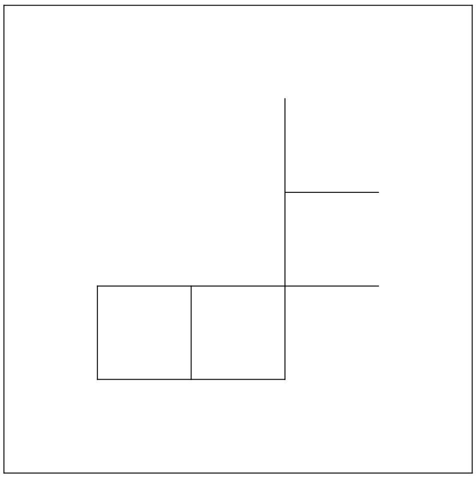
## I.2. Modélisation par une marche aléatoire

### a) Représentation graphique



Une partie est ici un chemin reliant l'origine au point dont les coordonnées représentent le score final de la partie.
La figure de gauche représente toutes les parties possibles.

### b) Notation pour les événements



Nous noterons $(x;y)$ l'événement réunissant toutes les parties pour lesquelles $(x;y)$ est un score ayant été atteint.
Par exemple $(0;0) = \Omega_n$ et $(n;0)$ est un événement élémentaire puisqu'une seule partie peut conduire à ce score final.
En revanche $(1;n)$ ***n'est pas un événement élémentaire***.
La représentation graphique ci-contre représente l'événement $(2;1)$ dans le cas $n = 3$.

### c) Variable aléatoire

Nous noterons $G_n$ la variable aléatoire donnant la somme gagnée par le premier joueur en fin de partie lors d'une partie en $n$ manches gagnantes. Nous supposerons que $G_n$ est exprimé en « mise de départ » si bien que $G_n$ n'a que deux valeurs possibles, $G_n : \Omega_n \to \{-1;1\}$, puisque soit le premier joueur a perdu sa mise, soit il a remporté celle du second joueur.

### d) Avantages et inconvénients du modèle des marches aléatoires

Le modèle que nous venons de décrire possède un premier (et énorme) avantage : il est très proche du texte de Blaise Pascal et va nous permettre de formaliser ses arguments.
Par ailleurs, il possède aussi l'avantage d'être associé à une représentation graphique très intuitive pouvant servir de support à la pensée et à l'argumentation. Enfin, les notations $(x;y)$ que nous venons de définir pour les événements sont parlantes et efficaces.

En revanche, le calcul des probabilités n'y est pas aisé ce qui justifie que l'on introduise un second modèle.

## I.3. Modélisation par un mot

### a) Variables aléatoires

Étant donné un mot représentant une partie (c'est-à-dire, on le rappelle, comportant $n$ lettres $A$, moins de $n-1$ lettres $B$ et se terminant par $A$ ou réciproquement comportant $n$ lettres $B$, moins de $n-1$ lettres $A$ et se terminant par $B$), on notera :

- $X_n : \Omega_n \to [\![0;n]\!]$ la variable aléatoire donnant le nombre de lettres $A$ du mot, c'est-à-dire le score final du premier joueur ;
- $Y_n : \Omega_n \to [\![0;n]\!]$ la variable aléatoire donnant le nombre de lettres $B$ du mot, c'est-à-dire le score final du second joueur ;
- $G_n : \Omega_n \to \{-1;1\}$ la variable aléatoire donnant le gain du premier joueur, c'est-à-dire valant 1 si le mot se termine par $A$ et $-1$ s'il se termine par $B$.

### b) Avantages et inconvénients du modèle des mots

Les avantages de ce modèle sont les inconvénients du précédent et réciproquement !

## I.4. À propos du travail d'un élève

Dans les problèmes de probabilités un tant soit peu complexes, ***on n'attend pas d'un élève une formalisation aussi précise***. Cependant, ***la plupart des erreurs dans le domaine des probabilités proviennent d'une mauvaise modélisation de l'expérience aléatoire considérée***.
Aussi, il est ***plus que recommandé*** de prendre le temps de formaliser pour soi-même un problème avant même de tenter de répondre aux questions. On prendra ensuite soin de préciser ***rapidement*** les modèles que l'on souhaite utiliser au travers ***des différentes formes*** que prendra l'univers (une simple phrase suffit), les définitions et notations des événements et des variables aléatoires que l'on jugera utiles.
Il est aussi ***plus que recommandé*** de faire des représentations graphiques pour étayer son argumentation. Il est en revanche inutile de les expliquer : le lecteur est à même de les interpréter seul.
***Une argumentation claire vaut mieux que des tartines de calculs incompréhensibles***. La formalisation n'a pas pour but de remplacer l'argumentation, elle a pour but ***de l'éclairer*** !

On rappelle que la partie se joue en $n \in \mathbb{N}^*$ manches gagnantes : la partie s'arrête lorsque l'un des joueurs gagne sa $n$-ième manche, ce joueur est déclaré vainqueur et remporte les mises.
Soit $p \in [\![0; n-1]\!]$.

1. Calculer la probabilité que le premier joueur remporte la partie $n$ manches à $p$.
2. Calculer $\mathbb{E}(G_n)$.
3. Soient $(x; y) \in [\![0; n-1]\!] \times [\![0; p]\!]$. Calculer la probabilité que le premier joueur remporte la partie $n$ manches à $p$ sachant que le score actuel est $x$ manches à $y$.
4. Soit $C$ un événement de probabilité non nulle.
   Démontrer que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{|C}$ est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega_n)$.

   On définit pour une variable aléatoire $Z$ l'***espérance conditionnelle de*** $Z$ ***sachant*** $C$ par

   $$\mathbb{E}_{|C}(Z) = \sum_{i \in Z(\Omega_n)} i\mathbb{P}_{|C}(Z = i)$$

   Le résultat de la question précédente garantit que l'espérance conditionnelle vérifie toutes les propriétés de l'espérance.
5. Si l'on suit l'argument du TD n°4 selon lequel l'arbre des parties en $p \in [\![1; n-1]\!]$ manches gagnantes est inclus dans celui en $n$ manches gagnantes, qu'est-on en droit d'attendre de l'espérance conditionnelle de $G_n$ sachant que le score est $x$ manches à $y$ ?
   Indication : on pourra supposer ici que $x \geqslant y$.
6. Que vaut l'espérance de $G_n$ sachant que le premier joueur mène $n$ manches à 0 ?
7. Calculer l'espérance de $G_n$ sachant que le premier joueur mène $n-1$ manches à 0.
8. Étant donnés deux entiers positifs $q$ et $r$, on définit $F_{q,r} = \sum_{p=0}^{q} \left(\frac{1}{2}\right)^p \binom{r+p}{r}$.
   - Montrer que $F_{q,r+1} = 2F_{q+1,r} - \frac{1}{2^q}\binom{q+r+2}{r+1}$.
   - En déduire que $F_{q,r} = 2^{r+1} - \frac{1}{2^q}\sum_{p=0}^{r}\binom{q+r+1}{p}$
9. Calculer, pour $k \in [\![1; n]\!]$, l'espérance, que l'on notera $E_{n-k,n}$, de $G_n$ sachant que le premier joueur mène $n-k$ manches à 0.
   Indication : on exprimera $E_{n-k,n}$ à l'aide des coefficients $F_{q,r}$ définis à la question précédente.
10. En déduire une expression simplifiée, pour $n \geqslant 2$, de l'espérance de $G_n$ sachant que le premier joueur mène 1 manche à 0.
    Indication : on demande ici une expression ne faisant intervenir ni les coefficients $F_{q,r}$, ni signe $\sum$.
11. Et un peu de Python ! En utilisant le module `random`, écrire un code permettant de simuler cette expérience aléatoire et de vérifier les expressions obtenues pour $E_{n-1,n}$ et $E_{1,n}$.
12. Pascal affirme (ici : `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69975r/f212.image`) que, pour $k \in [\![1; n]\!]$ fixé, $E_{k,n} - E_{k-1,n}$ ***décroît quand*** $n$ ***croît*** pour les valeurs de $k$ comprises entre 1 et 3, mais ***croît quand*** $n$ ***croît*** pour les autres valeurs de $k$.
    Est-ce vrai ?