Maths - Chapitre 23

Séries

La notion de série repose sur l'idée que pour obtenir une approximation d'un nombre (irrationnel par exemple), on peut partir d'une approximation déjà obtenue et lui ajouter un terme suffisamment petit pour obtenir une approximation plus fine. C'est une notion d'une importance fondamentale en mathématiques non seulement à cause de l'importance pratique de la notion d'approximation des nombres irrationnels, mais encore parce qu'elle est une synthèse des notions de suites, de sommes finies et -comme nous le verrons- fait aussi intervenir les notions d'intégrales ou de développements limités.
Dans tout ce qui suit, u, v et w sont des suites réelles ou complexes définies sur une partie $A \subset \mathbb{N}$ et f une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Introduction

I.1. Formules de Taylor

Théorème 23.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit n un entier positif et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Ex. 23.1 Écrire ce théorème pour $n = 0$ et $n = 1$

....

....

Théorème 23.2 (Formule de Taylor-Young)

Soit n un entier positif et $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o_{x_0}\left((x - x_0)^n\right)$$

Démonstration

Remarque

Toutes les formules précédentes peuvent se réécrire en utilisant $h = x - x_0$ à la place de x et le signe $\sum$ à la place des pointillés.
Par exemple, la formule de Taylor avec reste intégral pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ se réécrit :

$$f(x_0 + h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + t)\mathrm{d}t$$

Réécrire la formule de Taylor-Young de cette façon :

....

I.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 23.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$.
Si $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$ (autrement dit $f^{(n+1)}$ est bornée sur I), alors

$$\left| f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) - \cdots - \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \right| \leqslant M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ou encore

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right| \leqslant M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration

Ex. 23.2 Écrire ce théorème pour $n = 0$

....

....

Quel nom porte ce théorème ?..

Ex. 23.3 Montrer que $e = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Cor. 23.3

I.3. Définition

Définition 23.4 (Série numérique)

Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles ou complexes, on appelle ***série de terme général*** u_n la suite S définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La définition s'étend au cas où le terme général u_n n'est défini qu'à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
Les termes de la suite S sont appelés ***sommes partielles*** de la série.

Notation

On note $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

Définition 23.5 (Convergence/divergence d'une série)

On dit que la série $\sum u_n$ ***converge*** si la suite S de ses sommes partielles converge.
Dans le cas contraire, on dit que la série ***diverge***.

Notation

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite S.

Définition 23.6 (Somme et restes d'une série convergente)

Lorsqu'une série $\sum u_n$ converge, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est appelée ***somme de la série***.

La suite R définie par $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelée suite des ***restes de la série***.

Ex. 23.4 $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$?

Cor. 23.4

I.4. Propriétés

Propriété 23.7 (Linéarité de la somme)

Si les séries de termes généraux u_n et v_n convergent toutes les deux, alors $\forall(\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2$ la série $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration

Propriété 23.8

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite u converge vers 0.

Démonstration

Méthode : Divergence grossière d'une série

La propriété précédente est utilisée pour montrer qu'une série ***diverge*** en passant par sa contraposée : si la suite u ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.
On dit dans ce cas que la série ***diverge grossièrement***.

Important !

La réciproque de cette propriété est fausse !

Ex. 23.5 Nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(n\frac{2\pi}{7}\right)$.

Cor. 23.5

Ex. 23.6 Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Cor. 23.6

I.5. Série géométrique

Définition 23.9 (Série géométrique)

On appelle ***série géométrique*** toute série dont le terme général est une suite géométrique.

Propriété 23.10 (Rappel)

Si u est une suite géométrique de raison r différente de 1 alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Si u est une suite géométrique de raison 1 alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0$.

Théorème 23.11 (Convergence d'une série géométrique)

Une série géométrique converge si et seulement si son terme général est nul ou de raison r vérifiant $|r| < 1$.

De plus, si elle est convergente, alors sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1-r}$$

Démonstration

Méthode

Les séries géométriques ***sont d'une importance primordiale*** !

En voici deux utilisations très fréquentes :

- lorsqu'une série est de la forme $\sum f(n)r^n$, il peut être fructueux de considérer la fonction $S_n : x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \sum f(n)x^n$ et de tenter d'exprimer S_n à l'aide de la série géométrique $\sum x^n$ puis d'évaluer S_n pour $x = r$;
- nous verrons une autre utilisation de la comparaison à des séries géométriques -notamment de la majoration d'une série à termes positifs par une série géométrique- au paragraphe II..

Ex. 23.7 Nature (et somme si convergence) de la série $\sum \frac{n}{2^n}$.

Même question pour la série $\sum \frac{n\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{2^n}$.

Cor. 23.7

I.6. Suites et séries télescopiques

Proposition 23.12

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Démonstration

Méthode : Sommation d'une série en utilisant des sommes télescopiques

Le théorème précédent paraît anodin mais est souvent utilisé pour calculer la valeur de la somme d'une série, notamment lorsque celle-ci a pour terme général une fraction rationnelle.

En décomposant cette fraction rationnelle en éléments simples, il apparaît parfois une série télescopique dont la somme peut être calculée.

Nous verrons aussi à l'exercice 23.11 une utilisation directe de cette proposition.

Ex. 23.8 Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Cor. 23.8

Ex. 23.9 En utilisant l'exercice précédent, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge et donner un encadrement de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Cor. 23.9

I.7. Série exponentielle

Proposition 23.13 (Série exponentielle)

L'exercice 23.4 montre que

$$\forall x\in\mathbb{R}, e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Cette égalité se prolonge aux variables complexes : autrement dit,

$$\forall z\in\mathbb{C}, e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$$

II. Séries à termes positifs

II.1. Définition

Définition 23.14 (Série à termes positifs)

On dit que $\sum u_n$ est ***une série à termes positifs*** ou plus simplement est ***à termes positifs*** si $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geqslant 0$.

II.2. Théorème de convergence monotone

Théorème 23.15

Une série à termes positifs converge si et seulement si elle est majorée.

Démonstration

Notation

Somme d'une série à termes positifs

Le théorème précédent montre qu'une série à termes positifs divergente tend vers $+\infty$.

On notera alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$$

Autrement, ***pour une série à termes positifs***, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est ***toujours définie*** et prend sa valeur dans $[0; +\infty]$.

Dans le cas où, au contraire, une série ***à termes positifs*** converge, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$.

II.3. Comparaison entre séries et intégrales

Théorème 23.16

Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Méthode

Nous avons déjà utilisé le théorème précédent pour déterminer la nature de la ***série harmonique*** $\sum \frac{1}{n}$.

En pratique, comme dans l'exemple 23.6, ce théorème permet dans le cas où la série est divergente d'obtenir ***non seulement la divergence de la série***, mais aussi ***un équivalent*** de $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ lorsque $n \to +\infty$.

Dans le cas des séries convergentes en revanche, ce théorème permet de majorer la série donc de prouver sa convergence, mais ne donne pas la valeur de sa somme.

Ex. 23.10 Soit $r \in \mathbb{R}$.

Déterminer suivant la valeur de r la nature de la série $S = \sum \frac{1}{n^r}$ et donner un équivalent de S_n lorsqu'elle diverge.

Cor. 23.10

II.4. Séries de Riemann

Définition 23.17 (Séries de Riemann)

On appelle ***série de Riemann*** toute série de la forme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Propriété 23.18

La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

La démonstration a été faite à l'exercice 23.10.

II.5. Théorèmes de comparaisons entre séries *à termes positifs*

Proposition 23.19 (Majoration/minoration)

Si u et v sont positives à partir d'un certain rang et si $u \leqslant v$ à partir d'un certain rang alors

- $\sum v_n$ converge$\Rightarrow \sum u_n$ converge ;
- $\sum u_n$ diverge$\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

Démonstration

Remarque

Dans la proposition précédente, ***si l'inégalité est vérifiée à partir du rang*** 0, on peut de plus affirmer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Proposition 23.20 (Nature de séries à termes *positifs équivalents*)

Si u et v sont positives et si $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

II.6. Exemples

Ex. 23.11 Soit x la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Montrer que x_n converge et en déduire qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Cor. 23.11

Méthode : Utilisation des séries de Riemann et des théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs

- Si $\sum u_n$ est une série à terme positifs et si $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$:
  en effet, $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, donc à partir d'un certain rang, $u_n > \frac{1}{n}$.
  Le théorème de comparaison et le théorème sur les séries de Riemann permettent de conclure à la divergence de $\sum u_n$.
- Si $\sum u_n$ est une série à terme positifs et si $n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$:
  en effet, $n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n < \frac{1}{n^2}$.
  Le théorème de comparaison et le théorème sur les séries de Riemann permettent de conclure à la convergence de $\sum u_n$.
- Ces deux exemples donnent une méthode très utile en exercices pour obtenir la ***nature*** (c'est-à-dire la convergence ou le divergence) d'une série à termes positifs.

Ex. 23.12 Nature des séries suivantes :

$$S = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n^3 - 1}} \quad T = \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad U = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n + \ln n} \quad V = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n \ln n}} \quad W = \sum n^3 e^{-n}$$

Cor. 23.12

Ex. 23.13

1) Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{n^n}{(2n)!}$?

2) On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ (avec la convention $0^0 = 1$).
   Montrer que $S \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ puis majorer S.

Cor. 23.13

III. Séries absolument convergentes

III.1. Définition

Définition 23.21 (Convergence absolue)

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est ***absolument convergente*** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

III.2. Propriété

Théorème 23.22

Toute série absolument convergente est convergente. De plus, on a alors pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration

Méthode

Lorsqu'une série ***n'est pas à termes positifs***, le théorème précédent donne souvent un moyen simple de démontrer sa convergence.

Attention cependant! Il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes!

Ex. 23.14 Soit $S = \sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1) S est-elle absolument convergente?
2) Montrer que S converge et calculer sa somme.

Cor. 23.14

Ex. 23.15 Soient $z \in \mathbb{C}$ et $S(z) = \sum nz^n$.

1) Pour quelles valeurs de z la série est-elle absolument convergente?
2) Calculer, dans le cas où elle est absolument convergente, sa somme.

Cor. 23.15

III.3. Corollaire

Corollaire 23.23

Si (u_n) est une suite complexe, (v_n) une suite de réels positifs, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

III.4. Pour le plaisir : formule de Stirling

Ex. 23.16 (Cor.) On appelle intégrales de Wallis les intégrales de la forme

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad W'_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer W_0, W_1, W_0' et W_1'.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n = W_n'$.
3) Obtenir une formule de récurrence à l'aide d'une intégration par partie.

Ex. 23.17 Les exercices 23.16 et 23.11 ont conduit aux résultats suivants :

- $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$ vérifie pour $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$;
- il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exprimer W_{2n} à l'aide de factoriels puis montrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Cor. 23.17

IV. Correction des exercices

Cor. 23.16 :

1) On obtient immédiatement $W_0 = W_0' = \dfrac{\pi}{2}$, $W_1 = W_1' = 1$.
2) On effectue le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$ dans l'une des deux intégrales :
$$W_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u)\mathrm{d}u = W_n'.$$
3) Pour n suffisamment grand,
$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[-\sin^{n-1}(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x \\ &= (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \end{aligned}$$
Donc pour $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.