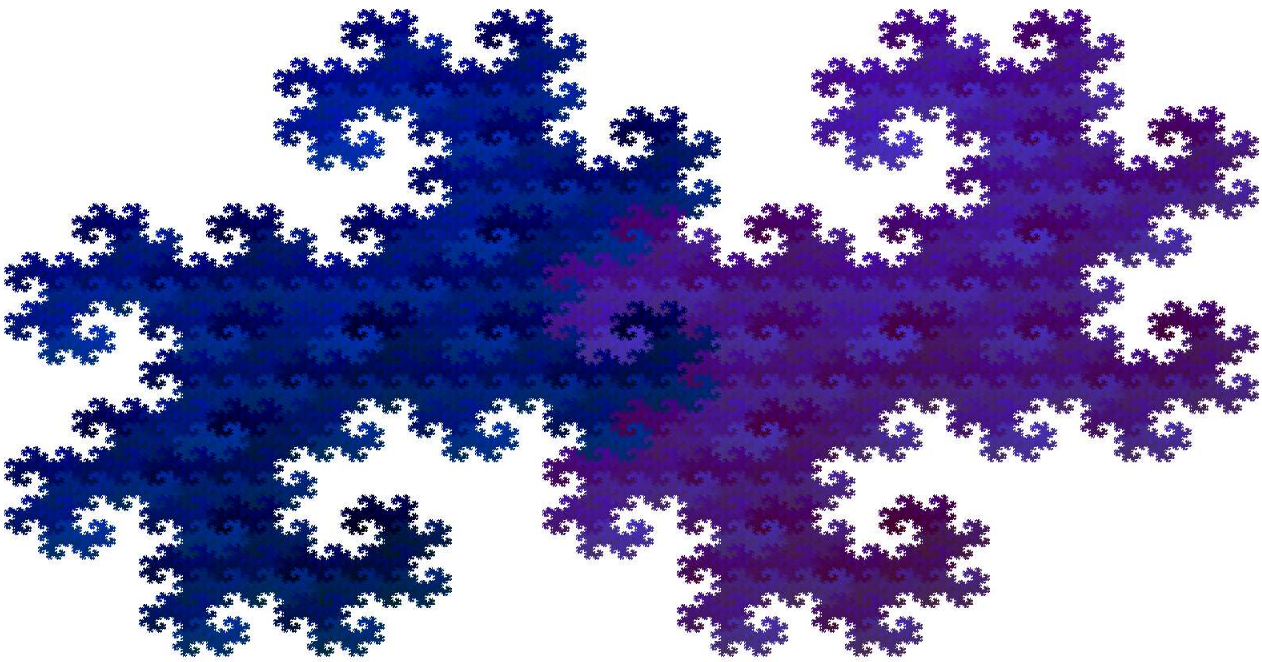
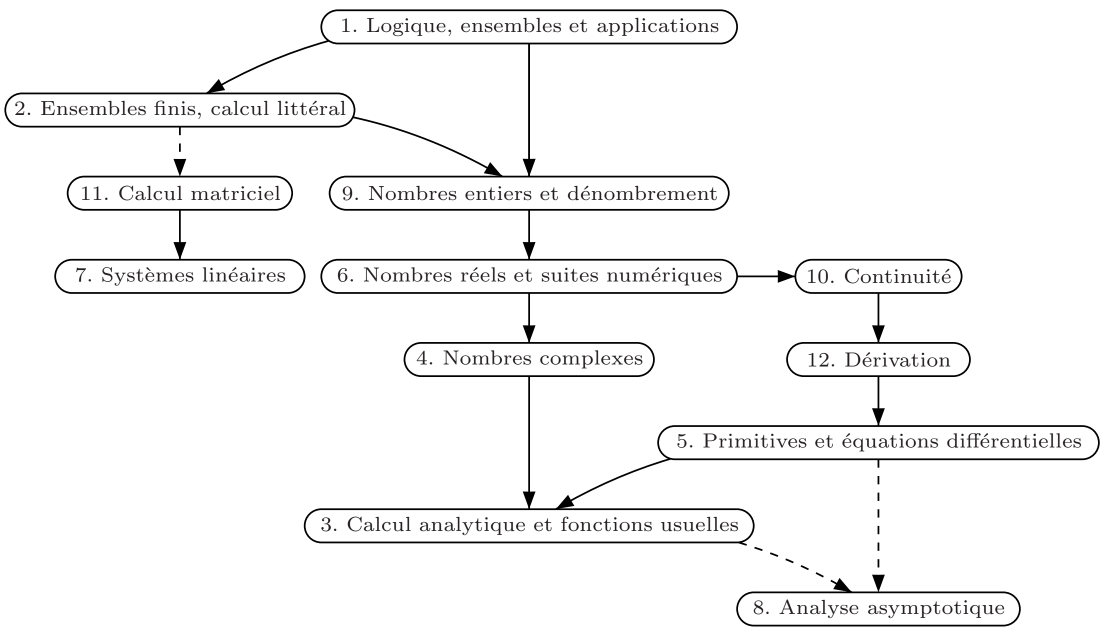
MATHS PCSI

François Coulombeau
coulombeau@gmail.com
Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)



17 juin 2024

Le programme officiel de la classe de PCSI pour la rentrée 2013 a été profondément remanié par rapport à celui des années précédentes. Il peut être trouvé en-ligne à l'adresse suivante :
http://cache.media.enseignementsup-recherche.gouv.fr/file/special_3_ESR/45/4/programme-PCSI_252454.pdf
L'année est découpée en deux semestres de 18 semaines, chaque semestre ayant son propre programme et ses propres objectifs.
Concernant le premier semestre, les objectifs sont principalement de ***consolider la formation des étudiants dans les domaines du raisonnement et des techniques de calcul en assurant la progressivité du passage aux études supérieures***. La plupart des chapitres de début d'année seront consacrés à des notions ***directement utilisables en Physique, Chimie ou Sciences de l'Ingénieur***. Ce choix est non seulement dicté par la nécessité de voir l'enseignement scientifique comme un tout et de faire dialoguer les différentes disciplines entre elles, mais aussi justifié par l'une des facettes fondamentales des mathématiques : elles sont ***le langage à l'aide duquel les sciences décrivent le monde***.



« Les savants des temps passés et des nations révolues n'ont cessé de composer des livres. Ils l'ont fait pour léguer leur savoir à ceux qui les suivent. Ainsi demeurera vive la quête de la vérité. »
Al-Khwarizmi[1]

« Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile ; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. »
Poincaré[2]

1. **Al-Khwarizmi**(∼780 ;850), mathématicien et astronome perse arabophone, fondateur de l'algèbre et dont le nom est à l'origine du mot français « algorithme ». Le terme même d'***algèbre*** est issu d'un de ses livres (*Kitab al-jabr wa'l-muqabalah*) et signifie ***réduction*** en arabe. Son influence en mathématiques a été considérable, aussi bien au travers de ses propres travaux que par sa volonté de transmettre les travaux d'autres auteurs.
2. **Poincaré**(1854 ;1912), mathématicien et physicien français ayant fondé ou contribué à la fondation de la théorie de la relativité, la théorie du chaos, l'analyse topologique, etc...

Première partie

Cours

Ensembles finis, calcul littéral

I. Les entiers

I.1. Relation d'ordre totale

Définition 1.1 (Relation d'ordre totale)

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels sont munis d'une relation d'ordre $\leqslant$, c'est-à-dire d'une relation binaire vérifiant

- Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{Z}, x \leqslant x$.
- Antisymétrie : $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow y = x$.
- Transitivité : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3, (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$.

Cette relation d'ordre est totale, c'est-à-dire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Remarque

- Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $x \leqslant y$ équivaut à $y \geqslant x$.
- Le fait d'exiger qu'une relation d'ordre soit totale garantit qu'elle est réflexive.
- La relation binaire $<$ n'est pas une relation d'ordre.

I.2. Bornes et extremums d'une partie

Définition 1.2 (Majorant, minorant)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{Z}$ est ***majorée par*** $M \in \mathbb{Z}$ et on dit que M ***est un majorant de*** E si pour tout $x \in E$, $x \leqslant M$.
On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{Z}$ est ***minorée par*** $m \in \mathbb{Z}$ et on dit que m ***est un minorant de*** E si pour tout $x \in E$, $m \leqslant x$.
Une partie qui est minorée par m et majorée par M est dite ***bornée*** par m et M.

Définition 1.3 (Maximum, minimum, extremums)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{Z}$ possède ***un plus grand élément*** $M \in \mathbb{Z}$ aussi appelé ***maximum de*** E si ....
On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{Z}$ possède ***un plus petit élément*** $m \in \mathbb{Z}$ aussi appelé ***minimum de*** E si ....

Proposition 1.4 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

Démonstration

Notation

On note $\max E$ le maximum de E s'il existe et $\min E$ le minimum de E s'il existe.

Axiome 1.5 (Propriété fondamentale des entiers)

Toute partie ***non vide minorée*** de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.
Toute partie ***non vide majorée*** de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.
Comme $\mathbb{N}$ est lui-même minoré par 0, toute partie ***non vide*** de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

I.3. Démonstration par récurrence

Méthode : Démonstration par récurrence faible

Étant donné $n_0 \in \mathbb{Z}$, pour démontrer qu'un prédicat $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geqslant n_0$, on peut effectuer une ***récurrence faible, que l'on présentera toujours ainsi*** :

- **Initialisation** : ***on vérifie que*** $P(n_0)$ ***est vrai***. On peut ***éventuellement*** vérifier que $P(n_0+1)$, $P(n_0+2)$ sont aussi vrais pour avoir une idée de la façon dont on va effectuer la prochaine étape de la démonstration.
- **Hérédité** : on suppose que pour un entier $n \geqslant n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie, ***en énonçant clairement cette propriété appelée hypothèse de récurrence***. On démontre alors, sous cette hypothèse, que $P(n+1)$ ***est vraie***.
- **Conclusion** : on termine par une simple phrase résumant les deux étapes de la démonstration :
  « ***La propriété est initialisée au rang*** $n = n_0$ ***et héréditaire à partir de ce rang, elle est donc vraie pour tout entier*** $n \geqslant n_0$. »

En résumé, on démontre : $\overbrace{P(n_0)}^{\text{Initialisation}} \Rightarrow P(n_0+1) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{P(n) \Rightarrow P(n+1)}_{\text{Hérédité}} \Rightarrow \ldots$

Ex. 1.1 Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} &= \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$

Calculer (et simplifier) u_1, u_2 et u_3.
Montrer que la suite u est minorée par 0 et majorée par 3.
Cette suite est-elle monotone ?
A-t-elle une limite ? Si oui, peut-on obtenir cette limite ?

I.4. Division euclidienne

Propriété 1.6 (Division euclidienne dans $\mathbb{N}$)

Étant donnés $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times [\![0, b-1]\!]$ tel que $a = bq + r$.

Démonstration

Corollaire 1.7 (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$)

Étant donnés $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, b-1]\!]$ tel que $a = bq + r$.
q est appelé ***quotient*** et r est appelé ***reste*** de la ***division euclidienne*** de a par b.

Définition 1.8 (Multiple, diviseur)

Étant donnés $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, si le reste de la division euclidienne de a par b est nul, on dit :

- que b ***divise*** a ou que b est ***un diviseur de*** a ;
- que a est ***un multiple de*** b.

Notation

Si $b \in \mathbb{N}^*$ divise $a \in \mathbb{Z}$, on note $b|a$ ou encore $a \equiv 0\,[b]$.
Sinon, on note $b \nmid a$.

Ex. 1.2 Soit $x \in \mathbb{N}$, $0 \leq x < 100$.
Montrer que le nombre obtenu en juxtaposant trois fois x est divisible par 37.

Cor. 1.2

I.5. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun

Proposition 1.9 (PGCD,PPCM)

Étant donnés $a, b \in \mathbb{N}^*$, les deux entiers suivants sont toujours définis

- on appelle ***plus grand diviseur commun*** à a et b le maximum de l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{n \in \mathbb{N}^*, (n|a \textbf{ et } n|b)\right\}$$

- on appelle ***plus petit multiple commun*** à a et b le minimum de l'ensemble

$$\mathcal{M} = \left\{n \in \mathbb{N}^*, (a|n \textbf{ et } b|n)\right\}$$

Démonstration

Notation

On note PGCD$(a;b)$ le plus grand diviseur commun à a et b et PPCM$(a;b)$ le plus petit multiple commun à a et b.

I.6. Algorithme d'Euclide

Méthode : Algorithme d'Euclide

Étant donnés deux entiers a et b strictement positifs, l'algorithme suivant permet d'obtenir PGCD$(a;b)$:

- ***Initialisation*** : on pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$;
- ***Propagation*** : tant que $v_k \neq 0$, on pose

$$\begin{cases} u_{k+1} &= v_k \\ v_{k+1} &= (\text{reste dans la division euclidienne de } u_k \text{ par } v_k) \end{cases}$$

- ***Arrêt*** : lorsque $v_k = 0$, la valeur de u_k est PGCD$(a;b)$.

Ex. 1.3 Calculer (en utilisant l'algorithme d'Euclide) $\mathrm{PGCD}(a,b), \mathrm{PGCD}(a,c), \mathrm{PGCD}(b,c)$ pour $a = 105$, $b = 170$ et $c = 231$.

Cor. 1.3

I.7. Nombres premiers

Définition 1.10

On dit qu'un entier $n > 1$ est ***premier*** s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Théorème 1.11 (Théorème fondamental de l'arithmétique)

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose de façon unique (à l'ordre près) en produit de facteurs premiers.

Démonstration hors programme

Ex. 1.4 Donner l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 30.

Cor. 1.4

Ex. 1.5 Décomposer les nombres $a = 105$, $b = 170$ et $c = 231$ en produit de facteurs premiers puis calculer $\mathrm{PGCD}(a,b), \mathrm{PGCD}(a,c), \mathrm{PGCD}(b,c), \mathrm{PPCM}(a,b), \mathrm{PPCM}(a,c), \mathrm{PPCM}(b,c)$.

Cor. 1.5

I.8. Ensembles finis, infinis

Définition 1.12

On dit qu'un ensemble E est ***fini*** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $e : E \to [\![1;n]\!]$. Sinon, on dit que E est ***infini***.

Remarque

- Par convention, $\emptyset$ est considéré comme un ensemble fini : on choisit $n = 0$ et $e : \emptyset \to [\![1;n]\!] = \emptyset$.
- L'entier $n \in \mathbb{N}$ intervenant dans la définition 1.12 s'interprète simplement comme ***le nombre d'éléments*** d'un ensemble fini E et la bijection $e : E \to [\![1;n]\!]$ comme ***une numérotation de ses éléments***.

Proposition 1.13 (Cardinal d'un ensemble fini)

Si E est un ensemble fini alors l'entier $n \in \mathbb{N}$ intervenant dans la définition 1.12 est unique. On appelle ***cardinal*** de E cet entier.

Démonstration hors programme

Notation

Le cardinal d'un ensemble E fini est noté $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$ ou encore $\#E$.

II. Sommes et produits finis

II.1. Famille finie d'éléments d'un ensemble

Définition 1.14 (Famille finie)

Étant donné un ensemble E, on appelle ***famille de*** $n \in \mathbb{N}$ ***éléments de*** E toute application $a : [\![1;n]\!] \to E$. Si $n = 0$, la famille est dite ***vide***.

$a(1)$, $a(2)$, etc... sont appelés ***éléments de la famille*** a.

Un même élément de E peut apparaître plusieurs fois dans une même famille.

Notation

On préfère généralement la notation a_1, a_2, etc... pour les éléments de la famille a.

II.2. Sommes et produits finis de nombres réels

Notation

Étant donnés un entier $n \in \mathbb{N}$ et une famille a de n éléments de $\mathbb{R}$, on note

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i \in [\![1;n]\!]} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ (somme vide)} \\ a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i \in [\![1;n]\!]} a_i = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ (produit vide)} \\ a_n \times \prod_{i=1}^{n-1} a_i & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

et $\quad n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ prononcé .... avec $\quad 0! = 1$.

Remarque

De façon plus simple, on pourrait écrire $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ et $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.
Cependant, la définition précédente, ***donnée par récurrence***, montre qu'un des outils principaux pour le calcul des sommes et des produits finis est ....
Par ailleurs, les écritures du type $\sum_{i=m}^{n} a_i$ sont valides et la section II.6. les généralisera plus encore.

Propriété 1.15

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration

Propriété 1.16

Étant donnés $n, p \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$ et une famille a de n éléments de $\mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \prod_{i=1}^{n} (\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad \prod_{i=1}^{n} (a_i)^p = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^p$$

La démonstration rigoureuse se fait par récurrence. Plus simplement, la première formule consiste à factoriser le facteur commun λ, la seconde à regrouper les n facteurs λ en début de produit, la dernière à utiliser la formule $(ab)^p = a^p b^p$ sur un nombre fini de facteurs.

II.3. Exemples fondamentaux

Propriété 1.17

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration

II.4. Techniques de calcul de sommes et de produits

Ex. 1.6 Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}$ puis simplifier pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$.

Cor. 1.6

Méthode : Regroupement de termes, changement d'indice, télescopage

Pour simplifier l'expression d'une somme ou d'un produit fini, on peut utiliser les principes suivants :

- ***Regroupement de termes*** : pour $m, n \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

  Dans l'exemple précédent, on a écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}$.

- ***Changement d'indice*** : pour $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_{i+k} = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_i$ et $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_{m+n-i}$

  Dans l'exemple précédent, on a écrit $\displaystyle -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n+1} = -\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i}$.

- ***Télescopage*** : pour $m, n \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} a_{i+1} = a_m - a_{n+1}$ car les termes s'annulent deux à deux sauf le premier terme de la première somme et le dernier terme de la seconde somme.

  Dans l'exemple précédent :

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$	1	$\cancel{\frac{1}{2}}$	$////$	$\cancel{\frac{1}{n}}$	
$\displaystyle -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}$		$\cancel{-\frac{1}{2}}$	$////$	$\cancel{-\frac{1}{n}}$	$-\frac{1}{n+1}$

- Des principes similaires sont applicables aux produits.

Ex. 1.7 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$.

Cor. 1.7

II.5. Somme d'une progression arithmétique ou géométrique finie

Proposition 1.18 (Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

La somme de $n \in \mathbb{N}$ termes consécutifs d'une suite arithmétique réelle vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = n \frac{u_{p+1} + u_{p+n}}{2}$$

Autrement dit, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au ***produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique du premier et du dernier*** de ces termes.

Démonstration

Proposition 1.19 (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

La somme de $n \in \mathbb{N}$ termes consécutifs d'une suite géométrique réelle de raison $q \neq 1$ vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = u_{p+1} \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Autrement dit, la somme de n ***termes*** consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est égale au ***produit du premier terme par*** $\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

Démonstration

Corollaire 1.20

Quels que soient $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$, $x^n - y^n = (x - y) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$.

Démonstration

Remarque

Pour $n = 0$, le corollaire précédent s'écrit $x^0 - y^0 = 1 - 1 = 0$ d'une part, $(x-y) \displaystyle\sum_{k=0}^{-1} x^{-1-k} y^k = 0$ d'autre part, car la somme est vide.

Ex. 1.8 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} i x^{i-1}$.

Cor. 1.8

Ex. 1.9 Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbb{N}$ le nombre $4^n - 1$ est-il premier ?

Cor. 1.9

II.6. Généralisations des sommes finies

Définition 1.21 (Famille finie (bis))

Étant donnés un ensemble E et un ensemble I ***fini***, on appelle ***famille d'éléments de*** E ***indexée par*** I toute application $a : I \to E$.
Si $I = \emptyset$, la famille est dite ***vide***.

Notation

Un cas fréquent de généralisation de la notion de famille finie est celui où $I = [\![1; n]\!] \times [\![1; p]\!]$ avec $n, p \in \mathbb{N}$. Les éléments de la famille $a : [\![1; n]\!] \times [\![1; p]\!] \to E$ sont alors le plus souvent notés $a_{i,j}$ pour $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; p]\!]$.

Ex. 1.10 Le tableau ci-dessous présente les valeurs des termes de la famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

$i = \ldots$ \ $j = \ldots$	1	2	3	...	p
1	1	2	3	...	p
2	3	4	5	...	$p+2$
3	5	6	7	...	$p+4$
...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n	$2n-1$	$2n$	$2n+1$	...	$p+2n-2$

Que vaut $a_{4,5}$?
Donner (sans justifications) une formule donnant $a_{i,j}$ en fonction des valeurs de i et de j.

Définition 1.22 (Somme double)

Étant donnés deux entiers $n, p \in \mathbb{N}$ et une famille a de nombres réels indexée par $I = [\![1; n]\!] \times [\![1; p]\!]$, on appelle ***somme double*** des éléments de a la somme

$$\sum_{(i,j) \in I} a_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right)$$

Remarque

En principe, dans la définition précédente, il faudrait démontrer que $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel on effectue les ***sommes finies*** n'a pas d'incidence sur le résultat.

Méthode : Somme double

Pour le calcul d'une somme double $S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}$, il est ***souvent plus facile***

- de commencer par calculer $T_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$ puis de calculer $S = \sum_{i=1}^{n} T_i$
- ou de commencer par calculer $U_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ puis de calculer $S = \sum_{j=1}^{p} U_j$.

Ex. 1.11 Simplifier pour $n, p \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} i - j$.

Cor. 1.11

Ex. 1.12 (Cor.) Simplifier pour $n, p \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} (i - j)^2$.

Proposition 1.23 (Produit de deux sommes finies)

Étant donnés une famille a de $n \in \mathbb{N}$ nombres réels et une famille b de $p \in \mathbb{N}$ nombres réels, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} (a_i b_j)$$

Démonstration

Ex. 1.13 Simplifier pour $n, p \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} ij$.

Cor. 1.13

Définition 1.24 (Sommes triangulaires)

Étant donnés un entier $n \in \mathbb{N}$ et une famille a de nombres réels indexée par $I = [\![1; n]\!]^2$, on appelle ***somme triangulaire*** des éléments de a les sommes du type

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right) \qquad \text{(triangulaire large)}$$

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} \right) \qquad \text{(triangulaire stricte)}$$

Méthode : Sommes triangulaires

Pour le calcul d'une somme triangulaire, on peut utiliser la même méthode que pour le calcul des sommes doubles.
Par ailleurs, il existe un lien entre les sommes triangulaires et les sommes doubles explicité ci-dessous :

$$\begin{array}{c|ccccc} & & & j & & \\ \hline & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ & a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ i & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{array}$$

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{i,j} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce lien peut permettre de calculer
- des sommes doubles à l'aide de sommes triangulaires, ou réciproquement
- des sommes triangulaires à l'aide de sommes doubles.

Ex. 1.14 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |i - j|$.

Cor. 1.14

Ex. 1.15 (Cor.) Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i - j)^2$.

III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

III.1. Coefficients binomiaux

Définition 1.25

On appelle ***coefficients binomiaux*** les nombres définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!], \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1 \times 2 \times \dots \times p}$$

$\binom{n}{p}$ se lit « p ***parmi*** n ».

Propriété 1.26

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!], \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Démonstration

Ex. 1.16 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} =$ ...., $\binom{n}{3} =$ ....
De même, $\binom{n+1}{2} =$ ...., $\binom{n+2}{3} =$ ...., etc.Que valent $\binom{7}{2}$, $\binom{8}{6}$, $\binom{10}{7}$? ....

Propriété 1.27 (Formule de Pascal [1])

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![0; n-1]\!], \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Démonstration

Méthode : Triangle de Pascal

Les propriétés des coefficients binomiaux permettent de les calculer en remplissant le triangle ci-dessous appelé ***triangle de Pascal***. Cette méthode est ***beaucoup plus efficace que le recours aux factoriels.***

1. **Blaise Pascal**(1623 ;1662), mathématicien, physicien et philosophe français, il a notamment contribué à fonder la théorie des probabilités et la théorie statique des gaz.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	1	1	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2	1		1	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
3	1			1	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
4	1				1	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
5	1					1	$\downarrow$	$\downarrow$
6	1						1	$\downarrow$
7	1							1

III.2. Formule du binôme de Newton [2]

Théorème 1.28 (Formule du binôme de Newton)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Démonstration

Corollaire 1.29

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Démonstration

Ex. 1.17 Développer les expressions suivantes en utilisant la formule du binôme et le triangle de Pascal :

$(a+b)^3 =$ .... $(a-b)^3 =$ ....
$(a+b)^4 =$ .... $(a-b)^4 =$ ....
$(x+1)^3 =$ .... $(x-2)^4 =$ ....

Ex. 1.18 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} 2^i \binom{n}{i}$.

Cor. 1.18

2. **Newton**(1643 ;1727), mathématicien et physicien anglais ayant fondé la mécanique des solides, la théorie de la gravitation et le calcul différentiel (en même temps et indépendamment de Leibniz).

Ex. 1.19 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ pair}}} \binom{n}{i} - \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ impair}}} \binom{n}{i}$.

En déduire $T = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ pair}}} \binom{n}{i}$ et $U = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ impair}}} \binom{n}{i}$.

Cor. 1.19

IV. Exercices corrigés

Cor. 1.12 : On a $T_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (i-j)^2 = \sum_{j=1}^{p} \left(i^2 - 2ij + j^2\right) = pi^2 - 2i\frac{p(p+1)}{2} + \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$. D'où :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n} \left(pi^2 - ip(p+1) + \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \right) \\
&= p\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - p(p+1)\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \\
&= pn\frac{2n^2 + 2n + n + 1 - 3pn - 3p - 3n - 3 + 2p^2 + 2p + p + 1}{6} \\
&= \frac{np\left(2n^2 + 2p^2 - 1 - 3np\right)}{6}
\end{aligned}$$

Cor. 1.15 : On a $S' = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} (i-j)^2 = \frac{n^2\left(n^2 - 1\right)}{6}$ d'après l'exercice 1.12.

Or $S' = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i-j)^2 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (i-i)^2 + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (i-j)^2 = 2S$. Donc $S = \dfrac{n^2\left(n^2 - 1\right)}{12}$.

Maths - Chapitre 2

Logique, ensembles, applications

I. Éléments de logique

Les thèmes abordés dans cette section sont aussi utiles en Automatique (SI) et en Informatique.

I.1. Vocabulaire

Définition 2.1

Une phrase mathématique bien construite est appelée ***énoncé*** ou ***assertion***.
On appelle ***définition*** un énoncé introduisant un nouveau mot.
On appelle ***axiome*** ou ***principe*** un énoncé concernant des mots déjà définis et considéré comme ***vrai*** dans le cadre d'une théorie mathématique.

Il est ***impossible de tout définir***. Par exemple, dans la définition précédente, nous n'avons pas défini ce qu'est « une phrase mathématique bien construite ». Cette notion repose essentiellement sur notre propre intuition.
Les axiomes complètent les définitions en donnant les propriétés fondamentales vérifiées par les mots définis. Ainsi le principe fondamental de la logique est le suivant :

Axiome 2.2 (Principe du tiers exclus)

Un énoncé est soit ***vrai***, soit ***faux***. Il n'y a pas de troisième possibilité.

Définition 2.3

On dit qu'un énoncé est ***démontré*** lorsqu'on l'a déduit au moyen de ***modes de raisonnements*** à partir de définitions, d'axiomes ou d'autres énoncés déjà démontrés.
Nous préciserons plus loin quels modes de raisonnements peuvent être utilisés dans une démonstration. Un énoncé démontré est appelé :

- ***proposition*** ou ***propriété*** ;
- ***théorème*** (lorsqu'il est particulièrement important) ;
- ***lemme*** (lorsqu'il est utilisé pour la démonstration d'un autre énoncé) ;
- ***corollaire*** (lorsque c'est une conséquence simple d'une proposition plus importante).

On appelle ***conjecture*** un énoncé que l'on pense être vrai mais qui n'est pas encore démontré.

I.2. Valeurs de vérité

D'après le principe du tiers exclus, un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux. C'est ce qu'on appelle la ***valeur de vérité*** de cet énoncé. En dehors des mathématiques, les valeurs de vérité pourront être notées différemment. Le tableau suivant regroupe les différentes traductions possibles de ces valeurs :

Notation

Notation mathématique	Notation électronique	Notation Python
Faux	0	`False`
Vrai	1	`True`

Ex. 2.1 ***En Python,*** `False` ***et*** `0` ***sont deux objets différents ayant la même valeur. De même pour*** `True` ***et*** `1`***.***

```
>>> False is 0
False
>>> False==0
True
```

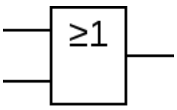
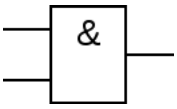
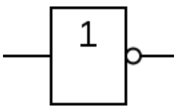
I.3. Opérateurs et fonctions logiques

Définition 2.4

Étant donnés deux énoncés A, B, on définit les nouveaux énoncés suivants :

- A **ou** B qui est vrai lorsque l'***un au moins*** des deux énoncés A,B est vrai, et qui est faux sinon ;
- A **et** B qui est vrai lorsque ***les deux*** énoncés A,B sont vrais, et qui est faux sinon ;
- **non** A qui est vrai lorsque A est faux, et qui est faux lorsque A est vrai.
  non A est aussi appelé ***négation*** de A.

Notation

Opérateur	Symbole électronique	Opération booléenne	Syntaxe Python
A **ou** B		$A + B$	`A or B`
A **et** B		$A.B$	`A and B`
non A		$\bar{A} = 1 - A$	`not A`

Ex. 2.2 ***Comment traduire simplement le test logique suivant ?***

```
>>> (a==b)or(a==-b)
True
```

I.4. Tables de vérité

Une façon de définir un opérateur ou une fonction logique est de donner sa table de vérité.
Remplir les tables ci-dessous :

A	**non** A
Vrai	Faux
Faux	Vrai

A	B	A **ou** B
Faux	Faux	......
Faux	Vrai	......
Vrai	Faux	......
Vrai	Vrai	......

A	B	A **et** B
Faux	Faux	......
Faux	Vrai	......
Vrai	Faux	......
Vrai	Vrai	......

Ex. 2.3 ***Pour chacun des énoncés suivants, donner sa valeur de vérité et écrire sa négation***

- A : $6 < 2 \times 3$
- B : Je suis grand et fort.
- C : $x \leqslant 2$ **ou** $x > 3$.

Cor. 2.3

Propriété 2.5

Étant donnés deux énoncés A, B

- **non** (A **ou** B) s'écrit aussi ....
- **non** (A **et** B) s'écrit aussi ....

Démonstration

A	B	A **et** B	A **ou** B	**non** (A **et** B)	**non** (A **ou** B)
Faux	*Faux*	......	......	......	......
Faux	*Vrai*	......	......	......	......
Vrai	*Faux*	......	......	......	......
Vrai	*Vrai*	......	......	......	......

A	B	**non** A	**non** B	(**non** A) **et** (**non** B)	(**non** A) **ou** (**non** B)
Faux	*Faux*	......	......	......	......
Faux	*Vrai*	......	......	......	......
Vrai	*Faux*	......	......	......	......
Vrai	*Vrai*	......	......	......	......

Méthode

Comme nous venons de le voir, une méthode pour démontrer une ***équivalence*** logique est d'écrire des tables de vérité.

Méthode

Étant donnés deux énoncés A, B, pour démontrer A **ou** B, on rédige ainsi :
« ***Supposons que*** A ***soit faux et démontrons qu'alors*** B ***est vraie.*** »
En effet, dire que A **ou** B est vrai revient à dire :

- ou bien A est vrai et alors A **ou** B est aussi vrai ;
- ou bien A est faux et pour démontrer que A **ou** B est vrai, il faut démontrer que B est vrai.

Ex. 2.4 Soit I un intervalle (non vide) réel et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f s'annule ou ne change pas de signe.

Cor. 2.4

I.5. Implication logique

Définition 2.6

Étant donnés deux énoncés A, B, le nouvel énoncé « A implique B » signifie que si A est vrai, alors B l'est aussi. En revanche, ***si*** A ***est faux,*** $A \Rightarrow B$ ***reste vraie que*** B ***soit vrai ou faux***.

Notation

« A implique B » est noté $A \Rightarrow B$

Méthode

Pour démontrer que $A \Rightarrow B$ est ***vraie***, on rédige donc ainsi :
« ***Supposons que*** A ***soit vrai. Démontrons alors que*** B ***est vrai...*** »

Méthode

De même, pour démontrer qu'une implication $A \Rightarrow B$ est ***fausse***, on peut rédiger comme suit :
« ***Trouvons un contre-exemple où*** A ***est vrai et*** B ***faux.*** »

Propriété 2.7 (propriété de transitivité)

$((A \Rightarrow B)\ \textbf{et}\ (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Démonstration

I.6. Conditions nécessaires, conditions suffisantes

L'implication $A \Rightarrow B$ signifie que si A est vrai, alors B l'est aussi.
Autrement dit, lorsque $A \Rightarrow B$ ***il suffit*** que A soit vrai pour que B le soit.
De même, si B est faux, alors A ne peut pas être vrai : ***il faut*** que B soit vrai pour que A le soit.

Définition 2.8

Lorsque $A \Rightarrow B$ on dit que

- A est une ***condition suffisante*** à B ;
- B est une ***condition nécessaire*** à A.

Démontrer que A ***est une condition suffisante à*** B***, démontrer que*** B ***est une condition nécessaire à*** A ***et démontrer que*** $A \Rightarrow B$ ***ont exactement la même signification***.

Ex. 2.5 ***Rappel :*** on dit qu'un entier p divise un entier n et on note $p|n$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $n = p \times k$. Sinon, on dit que p ne divise pas n ce que l'on note $p \nmid n$.

1) n étant un entier, montrer que $(6|n) \Rightarrow (2|n)$.
2) $6|n$ est-elle une condition nécessaire à ce que n soit pair ?
3) $6|n$ est-elle une condition suffisante à ce que n soit pair ?

Cor. 2.5

I.7. Réciproque

Définition 2.9 (Réciproque)

Étant donnée une implication $A \Rightarrow B$, on appelle ***implication réciproque*** l'énoncé $B \Rightarrow A$.

Remarque

Une implication peut être vraie et sa réciproque fausse !
En fait, tous les cas sont possibles !

Ex. 2.6

1) Écrire $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ en toutes lettres puis donner leurs valeurs de vérité.
   A : (il pleut) B : (il y a des nuages)
2) Trouver des énoncés A et B tels que :
   - $A \Rightarrow B$ est vrai et $B \Rightarrow A$ est vrai.
   - $A \Rightarrow B$ est faux et $B \Rightarrow A$ est vrai.
   - $A \Rightarrow B$ est faux et $B \Rightarrow A$ est faux.

Cor. 2.6

I.8. Équivalence

Définition 2.10 (Équivalence)

Lorsqu'une implication $A \Rightarrow B$ et sa réciproque $B \Rightarrow A$ sont ***toutes les deux vraies***, on dit que A et B sont ***équivalents***. On dit aussi
A ***équivaut à*** B ou encore
A ***si et seulement si*** B ou enfin
A est ***une condition nécessaire et suffisante*** à B.

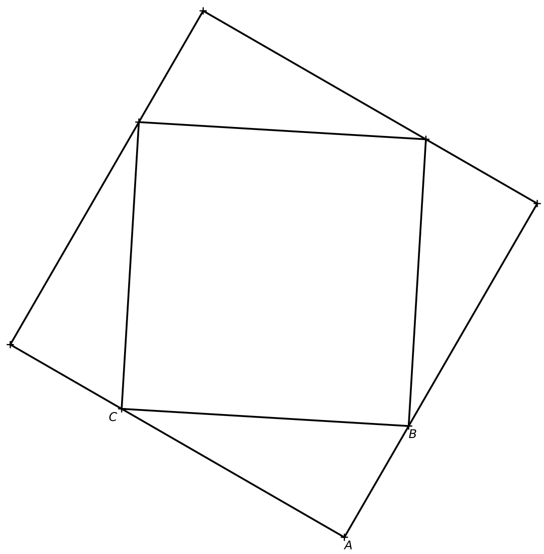
Notation

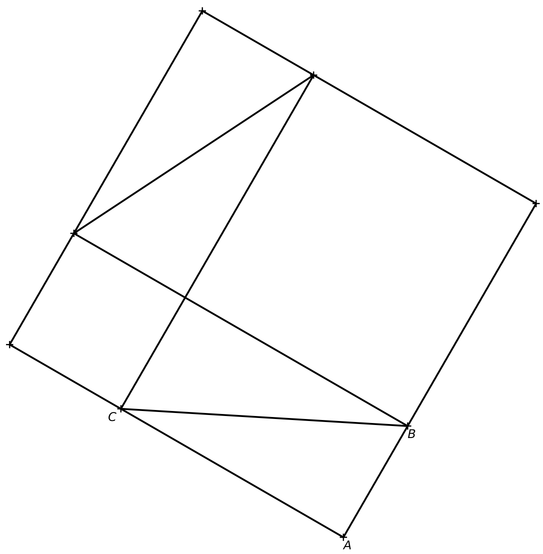
A équivaut à B est noté $A \Leftrightarrow B$

Méthode

D'une manière générale, pour montrer une équivalence, ***on doit donc montrer deux implications*** ! On peut donc rédiger ainsi :
« ***Supposons que*** A ***soit vrai. Démontrons alors que*** B ***est vrai...*** »
« ***Réciproquement, supposons que*** B ***soit vrai, démontrons que*** A ***est vrai...*** »

Ex. 2.7 Démontrer le ***théorème de Pythagore***, à savoir :
Soient A, B, C trois points du plan.
Le triangle ABC est rectangle en A ***si, et seulement si,*** on a l'égalité $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Indication : on pourra s'inspirer du dessin suivant.





I.9. Contraposée

Définition 2.11 (Contraposée)

Étant donnée une implication $A \Rightarrow B$, on appelle ***implication contraposée*** l'énoncé $(\textbf{non}\, B) \Rightarrow (\textbf{non}\, A)$.

Propriété 2.12 (équivalence d'un énoncé et de sa contraposée)

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\textbf{non}\, B) \Rightarrow (\textbf{non}\, A))$

Démonstration

Une implication et sa contraposée sont équivalentes d'après la propriété précédente. Autrement dit, ***il revient au même de démontrer qu'une implication est vraie ou que sa contraposée l'est***.

Méthode

Ainsi, pour démontrer qu'une implication $A \Rightarrow B$ est ***vraie***, on peut rédiger comme suit :
« ***Démontrons la contraposée. Supposons que B est faux, et montrons alors que A est faux aussi.*** »

Ex. 2.8 ***Quelle est la contraposée de $(6|n) \Rightarrow (2|n)$?***

Cor. 2.8

Ex. 2.9 Démontrer que le produit de deux entiers est pair si et seulement si l'un ou l'autre des deux entiers est pair.

Cor. 2.9

Ex. 2.10 ***Étant donnés deux entiers a et b, démontrer que***
ab est impair si et seulement si a et b sont impairs.

Cor. 2.10

I.10. Démonstration par l'absurde

Habituellement, pour démontrer un énoncé A, on part d'axiomes ou d'hypothèses que l'on sait être vrais, puis on déduit par des implications que A est lui aussi vrai. Autrement dit, une démonstration de A est en général du type

$$\text{Énoncés vrais} \Rightarrow \cdots \Rightarrow A$$

Or d'après le paragraphe précédent, on peut démontrer cette implication en démontrant sa contraposée, c'est-à-dire qu'une démonstration possible de l'énoncé A est

$$(\textbf{non}\, A) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \text{Énoncé faux}$$

Définition 2.13 (Démonstration par l'absurde)

On appelle ***démonstration par l'absurde*** de l'énoncé A une suite d'implications partant de **non** A et aboutissant à un énoncé faux.

Méthode

Pour démontrer l'énoncé A, on peut rédiger ainsi :
« ***Supposons que*** A ***est faux et montrons que c'est absurde.*** »

Ex. 2.11 ***Démontrer que*** $\sqrt{2}$ ***est irrationnel*** (c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme quotient d'entiers).

Cor. 2.11

Propriété 2.14

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration

Faite au chapitre 1.

II. Ensembles et quantificateurs

II.1. Définitions

Définition 2.15

Un ***ensemble*** est une « collection » d'objets mathématiques, sans répétition possible d'un même objet.
Ces objets sont appelés ***éléments*** de l'ensemble.
Un ensemble est dit ***fini*** s'il possède un nombre fini d'éléments, sinon il est dit ***infini***.
L'ensemble qui n'a aucun élément est appelé ***ensemble vide***.
Un ensemble possédant un unique élément est appelé ***singleton***.
Lorsque tous les éléments d'un ensemble A appartiennent aussi à un ensemble B, on dit que A ***est inclus dans*** B ou que A ***est une partie de*** B.
Si A et B ont exactement les mêmes éléments, on dit qu'ils sont ***égaux***.

Notation

L'assertion « x est un élément de l'ensemble E » est notée $x \in E$.
Elle se lit « x appartient à E ».
L'assertion « x n'est pas un élément de l'ensemble E » est notée $x \notin E$.
Elle se lit « x n'appartient pas à E ».
L'ensemble vide est noté $\emptyset$.
L'assertion « A est inclus dans B » est notée $A \subset B$ et l'assertion « A est égal à B » notée $A = B$.
Les ensembles et inclusions suivants sont supposés connus :
$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $\emptyset \subset \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}^* \subset \mathbb{D}^* \subset \mathbb{Q}^* \subset \mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}^*$.

Ex. 2.12 Dans les cas suivants, dire si l'on a $A \subset B$, $B \subset A$, $A \in B$ ou $B \in A$.

$A = [-1; 5[$, $B =]3; 5]$	$A = -2$, $B = \mathbb{Z}$	$A = [-1; 5[$, $B = \mathbb{Z}$
$A = \mathbb{C}$, $B =]-1; 1[$	$A = \{-5; 3; \pi\}$, $B = -3$	$A = \mathbb{D}$, $B = \emptyset$

II.2. Prédicats

Définition 2.16

On appelle ***prédicat*** un énoncé qui fait intervenir une ou plusieurs ***variable(s)***.

Ex. 2.13 Nous avons déjà vu des prédicats dans ce chapitre :

- $(6|n) \Rightarrow (2|n)$ est un prédicat faisant intervenir une variable n qui est un entier ;
- $\overline{A \,\textbf{ou}\, B} \Leftrightarrow \left(\bar{A} \,\textbf{et}\, \bar{B}\right)$ est un prédicat ....
....

Remarque

Pour qu'un prédicat ait un sens, il faut toujours préciser ce que représentent ses variables ! C'est ce que l'on fait lorsqu'on écrit :

- Étant donné un entier n, $(6|n) \Rightarrow (2|n)$;
- ....

II.3. Quantificateurs

Définition 2.17

Un ***quantificateur*** précise les valeurs prises par une variable dans un prédicat.

On utilise deux quantificateurs.

Définition 2.18 (Quel que soit)

Étant donnés un ensemble E et un prédicat A faisant intervenir une variable de E, l'énoncé $\forall x \in E, A(x)$ se lit « Quel que soit l'élément x de l'ensemble E, l'assertion $A(x)$ est vraie ». On peut aussi le lire « Soit $x \in E$ (sous-entendu quelconque), l'assertion $A(x)$ est vraie » ou encore « Étant donné $x \in E$ (sous-entendu quelconque), l'assertion $A(x)$ est vraie ».

Méthode

Pour démontrer une propriété de ce type, on rédige ainsi :
« ***Soit*** $x \in E$***. Montrons que*** $A(x)$ ***est vrai.*** »

Ex. 2.14

1) Quelle est la signification de $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \in \mathbb{N}$?
2) Cet énoncé est-il vrai ou faux ?

Cor. 2.14

Définition 2.19 (Il existe)

Étant donnés un ensemble E et un prédicat A faisant intervenir une variable de E, l'énoncé $\exists x \in E, A(x)$ se lit « Il existe un élément x de l'ensemble E tel que l'assertion $A(x)$ est vraie ».

Méthode

Pour démontrer une propriété de ce type, ***il suffit de donner un exemple*** d'un élément de E vérifiant le prédicat $A(x)$.

Ex. 2.15

1) Quelle est la signification de $\exists x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}$?
2) Cet énoncé est-il vrai ou faux ?

Cor. 2.15

II.4. Enchainement de quantificateurs

Axiome 2.20

Lorsque plusieurs quantificateurs se suivent,

- leur ordre ***n'a pas d'importance si les quantificateurs sont identiques*** ;
- leur ordre ***est important si les quantificateurs sont différents***.

Ex. 2.16 ***Écrire en toutes lettres les énoncés suivants, puis dire s'ils sont vrais ou faux.***

1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$.
2) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \leq y$.

Cor. 2.16

II.5. Négation des quantificateurs

Axiome 2.21

Étant donnés un ensemble E et un prédicat A faisant intervenir une variable de E
non $(\forall x \in E, A(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \textbf{non}\, A(x))$
non $(\exists x \in E, A(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \textbf{non}\, A(x))$
Dans le cas où des quantificateurs sont enchainés, on fait de même ***sans changer l'ordre des quantificateurs***.

Ex. 2.17 ***Écrire en toutes lettres les énoncés suivants. Dire, si possible, s'ils sont vrais ou faux.***

1) **non** $(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y)$
2) La négation de « Tout homme est mortel ».
3) La négation de « Il existe un homme plus grand que toutes les femmes ».

Cor. 2.17

Remarque

À l'aide des quantificateurs, pour deux ensembles E et F, la définition de l'inclusion $E \subset F$ s'écrit :
$(E \subset F) \Leftrightarrow$ ....
De même, la définition de l'égalité $E = F$ s'écrit :
$(E = F) \Leftrightarrow$ ....
Cette remarque conduit aux méthodes suivantes :

Méthode

Étant donnés deux ensembles E et F, pour démontrer que $E \subset F$, on rédige ainsi :
« ***Soit*** $x \in E$***. Montrons que*** $x \in F$***.*** »

Méthode

Le plus souvent, pour démontrer l'égalité $E = F$ on démontre que $E \subset F$ puis que $F \subset E$. On rédige donc ainsi :

- « ***Soit*** $x \in E$***. Montrons que*** $x \in F$***.*** »
- « ***Soit*** $x \in F$***. Montrons que*** $x \in E$***.*** »

Ex. 2.18 Soit $A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2, 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t+1; 4t+3), t \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $A = B$.

II.6. Opérations sur les ensembles

Définition 2.22

Étant donnés deux ensembles E,F, on définit les nouveaux ensembles suivants :

- l'***intersection de*** E ***et de*** F qui est formée des éléments appartenant à E ***et*** à F.
- la ***réunion de*** E ***et de*** F qui est formée des éléments appartenant à E ***ou*** à F.
- la ***différence de*** E ***et de*** F qui est formée des éléments appartenant à E ***mais pas*** à F ;
- ***si de plus*** $F \subset E$, la différence de E et de F est appelée ***complémentaire de*** F ***dans*** E.

Notation

- l'intersection de E et F est notée $E \cap F$ et se lit E ***inter*** F ;
- la réunion de E et F est notée $E \cup F$ et se lit E ***union*** F ;
- la différence de E et F est notée $E \backslash F$ et se lit E ***privé de*** F ;
- le complémentaire de F dans E est noté $\complement_E^F$ ou $\overline{F}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E.

Ex. 2.19 ***Compléter en utilisant les opérateurs logique* et *,* ou *,* non *.***

1) $x \in E \cap F \Leftrightarrow$ ....
2) $x \in E \cup F \Leftrightarrow$ ....
3) $x \in E \backslash F \Leftrightarrow$ ....

Propriété 2.23

Les opérateurs d'intersection et de réunion vérifient :
•Commutativité : étant donnés deux ensembles A et B
$A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
•Associativité : étant donnés trois ensembles A, B et C
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

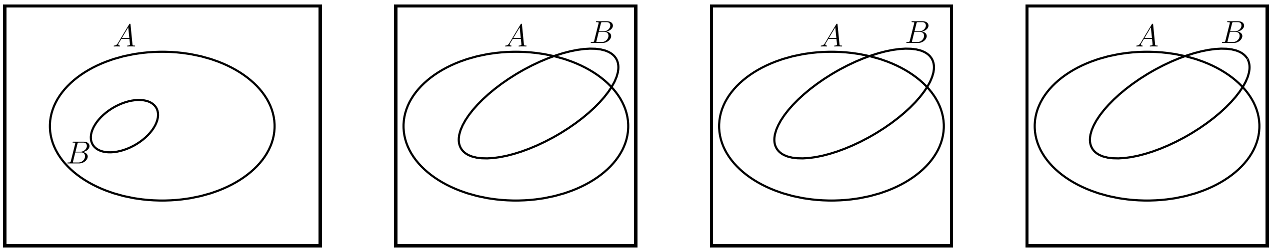
Démonstration

•*Commutativité : soit $x \in A \cap B$. x appartient à A et à B. Donc x appartient à B et à A. Donc $x \in B \cap A$.*
L'inclusion réciproque et la propriété similaires concernant la réunion se démontrent de même.
•*Associativité : soit $x \in (A \cap B) \cap C$. x appartient à $A \cap B$ et à C. Donc x appartient à A et B et à C.*
Donc x appartient à A et à $B \cap C$ donc à $A \cap (B \cap C)$.
L'inclusion réciproque et la propriété similaires concernant la réunion se démontrent de même.

Ex. 2.20 Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.
Montrer que
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
et que
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
Comment s'appellent ces propriétés vérifiées par la réunion et l'intersection ?

II.7. Diagrammes de Venn

On représente graphiquement les ensembles généralement grâce à des ***diagrammes de Venn*** :



(a) Inclusion, appartenance (b) Intersection (c) Réunion (d) Différence

FIGURE 2.1 – Diagrammes de Venn

II.8. Produit cartésien d'ensembles

Définition 2.24

Étant donnés deux ensembles E, F, on définit le ***produit cartésien de*** E ***par*** F comme l'ensemble des ***couples*** d'éléments $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.
Cette définition se généralise à un ***nombre fini d'ensembles***.

Notation

Le produit cartésien de E par F est noté $E \times F$ et se lit E ***croix*** F.

Remarque

La définition précédente se généralise à un nombre fini d'ensembles : pour trois ensembles E, F et G, $E \times F \times G$ est l'ensemble des ***triplets*** $(x; y; z)$ où $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$. $E \times E$ est noté E^2, $E \times E \times E$ est noté E^3...
En particulier, dans le plan ou l'espace rapportés à un repère, l'ensemble des coordonnées des points du plan est noté ... et l'ensemble des coordonnées des points de l'espace est noté ....

II.9. Modes de définition d'ensembles

a) Définition en extension

Définition 2.25

On dit qu'un ensemble est défini ***en extension*** lorsqu'on donne explicitement tous ses éléments.

Notation

On note alors les éléments entre accolades, séparés par des (points-)virgules : $E = \{e_1; e_2; \ldots\}$.

b) Définition en compréhension

Définition 2.26

Étant donné un ensemble E et un prédicat A sur une variable de E, ***l'ensemble des éléments de E pour lesquels le prédicat A est vrai*** est un sous-ensemble de E noté $F = \{x \in E, A(x)\}$.
On dit alors que F est défini ***en compréhension***.

Notation

Étant donné un réel r et un sous-ensemble $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}$ on note $r\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{K}, x = rk\}$.
Par exemple, $3\mathbb{N}$ est ....
Étant deux entiers relatifs p et q et deux réels a et b, on appelle ***intervalles*** et on note :

- $[\![p;q]\!] = \{n \in \mathbb{Z}, p \leq n \leq q\}$ ....
- $[a;b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$, $]a;b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$, $[a;b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$
  $]a;b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$, $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$, $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$, etc...
  En particulier $[\![p;q]\!] = \emptyset$ si $p > q$ et $[a;b] = \emptyset$ si $a > b$.

Ex. 2.21 ***Expliciter les ensembles suivants*** $A = \{n \in \mathbb{N}, 2|n\}$, $B = 2\mathbb{R}$, $C = \{x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$, $D = \{p \in \mathbb{N}, p > 1 \,\textbf{et}\, \forall n \in [\![2;p-1]\!], n \not| p\}$, $E = \pi\mathbb{Z}$.

Cor. 2.21

c) Définition comme image directe

En anticipant sur la section III., on peut aussi donner un troisième mode de définition d'ensembles :

Définition 2.27

Étant donné deux ensembles E, F et une application $f : E \to F$, ***l'ensemble des éléments de F qui peuvent s'écrire $f(x)$ pour $x \in E$*** est un sous-ensemble de F noté

$$A = \{f(x), x \in E\}$$

On dit alors que A est défini ***comme image directe***.

Notation

$A = \{f(x), x \in E\}$ est aussi noté $f(E)$.

Remarque

Un ensemble défini comme image directe peut aussi être défini en compréhension puisque
$A = \{f(x), x \in E\}$ ....

Ex. 2.22 ***Expliciter (sans justification) les ensembles suivants*** $A = \exp(\mathbb{R})$, $B = \sin(\mathbb{R})$, $C = \cos^2(\mathbb{R})$, $D = \ln(\mathbb{R}_+^*)$.

Cor. 2.22

III. Applications et fonctions

III.1. Définitions et notations

Définition 2.28

On appelle ***application*** ou ***fonction*** f d'un ensemble E ***dans*** un ensemble F (ou ***vers*** F) une correspondance qui à tout élément de E associe un ***unique*** élément de F.
E est appelé ***ensemble de départ*** de la fonction f et F est appelé ***ensemble d'arrivée*** de la fonction f.
Étant donné $x \in E$, $f(x)$ est appelé ***l'image de*** x ***par*** f
et x ***un antécédent de*** $f(x)$ ***par*** f.

Important !

Pour définir une fonction il faut donc donner ***deux ensembles*** E et F, et un procédé permettant d'associer à ***tout*** élément de E ***un unique*** élément de F. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, il peut cependant arriver que l'on omette de donner E ou F.
On retiendra par ailleurs que l'image d'un élément $x \in E$ par f ***existe et est unique*** tandis qu'il ***est possible qu'un élément*** $y \in F$ ***ne possède aucun ou plusieurs antécédents***.

Notation

Les éléments nécessaires à la définition d'une fonction sont résumés dans les notations
$f : \begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ ou plus simplement $f : x \in E \mapsto f(x) \in F$.
L'ensemble de toutes les applications d'un ensemble E donné vers un ensemble F donné est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E. On note $\mathcal{F}(E) = E^E$ l'ensemble de toutes les applications de E vers lui-même.

Définition 2.29

On appelle fonction ***réelle*** d'une variable ***réelle*** toute application d'une partie $I \subset \mathbb{R}$ vers une partie $J \subset \mathbb{R}$.

III.2. Restriction d'une application

Définition 2.30 (Restriction d'une application)

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $P \subset E$ une partie de E. On appelle ***restriction*** de f à P l'application $\tilde{f} : \begin{cases} P & \to & F \\ x \in P \subset E & \mapsto & f(x) \end{cases}$.

Notation

On note souvent $f_{|P}$ la restriction de f à $P \subset E$. Il peut aussi arriver qu'on note par abus f la restriction de f à P en précisant simplement une fois à quelle partie P on se restreint par la suite.

III.3. Composition d'applications

Définition 2.31 (Composée)

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.
On appelle ***composée de** g **et de** f* l'application notée $g \circ f$ et définie par :

$$g \circ f : \begin{cases} E & \to & G \\ x & \mapsto & g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) \end{cases}$$

Important ! La composition n'est pas commutative

La définition que nous venons de donner de la composée de deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$ est cohérente puisque dans l'expression de $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, l'image de x par f est un élément de F qui possède à son tour une image par g :

$$\begin{tikzcd} x \in E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & f(x) \in F \arrow[r, "g"] & g\big(f(x)\big) \in G \end{tikzcd}$$

En revanche, $\cancel{f \circ g}$ n'a à priori ***aucune signification***.

III.4. Injections, surjections, bijections

Définition 2.32 (Injections)

On dit qu'une application f de E dans F est une ***injection***, ou encore qu'elle est ***injective***, si tout élément de F a ***au plus un*** antécédent par f.
Traduction symbolique : f est injective $\Leftrightarrow$ ....

Définition 2.33 (Surjections)

On dit qu'une application f de E dans F est une ***surjection***, ou encore qu'elle est ***surjective***, si tout élément de F a ***au moins un*** antécédent par f. Traduction symbolique : f est surjective $\Leftrightarrow$ ....

Définition 2.34 (Bijections)

On dit qu'une application f de E dans F est une ***bijection***, ou encore qu'elle est ***bijective***, si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de F a ***exactement un*** antécédent par f.

Méthode

- Pour démontrer qu'une ***fonction continue d'un intervalle*** $I \subset \mathbb{R}$ ***à valeurs dans un intervalle*** $J \subset \mathbb{R}$ est injective, surjective ou bijective, une simple étude de fonction peut suffire :
  - ⋆ on étudie la monotonie de la fonction : si elle est strictement monotone, alors elle est injective ;
  - ⋆ on étudie ses extremums ou ses limites : si ils correspondent aux bornes de l'ensemble d'arrivée ***et que la fonction est continue***, alors elle est surjective ;
  - ⋆ si la fonction est injective et surjective, ...

  Le tout peut être résumé dans un tableau de variations.
- Sinon :
  - ⋆ Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est injective on rédige ainsi :
    « ***Soient*** x ***et*** x' ***deux éléments de*** E ***tels que*** $f(x) = f(x')$***. Montrons que*** $x = x'$***.*** »
  - ⋆ Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective on rédige ainsi :
    « ***Soit*** $y \in F$***. Montrons qu'il existe*** $x \in E$ ***tel que*** $y = f(x)$***.*** »
  - ⋆ Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on montre qu'elle est ***injective et surjective***.

Ex. 2.23 ***Les applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?***

$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$ $\qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + x^2 \end{cases}$

$h : \begin{cases} [\![0;9]\!] \to [\![0;9]\!] \\ k \mapsto (k \times 7)\%10 \end{cases}$ autrement dit, $h(k)$ est le reste de la division euclidienne de $7k$ par 10.

Cor. 2.23

Ex. 2.24 Étudier la fonction $k : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 2x^2 + x \end{cases}$.

Montrer que $k_{|[1;+\infty[}$ est une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

Cor. 2.24

Proposition 2.35 (Composée d'injections, de surjections, de bijections)

Soit E, F, G trois ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$ deux applications.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Les réciproques des implications précédentes sont fausses.

Démonstration

Ex. 2.25 Soit E, F et G trois ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1) Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
3) Montrer que les réciproques des deux implications précédentes sont fausses.
4) Que peut-on conclure si $g \circ f$ est bijective ?

Cor. 2.25

III.5. Bijection réciproque

Définition 2.36

Étant donnée une bijection $f : E \to F$, on appelle ***bijection réciproque*** de f l'application $F \to E$ qui à tout $y \in F$ associe l'unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Notation

On note $f^{-1} : F \to E$ la bijection réciproque de $f : E \to F$.

Propriété 2.37 (Propriétés des bijections réciproques)

Si $f : E \to F$ est bijective :

1) $\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x$;
2) $\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y$;
3) on a l'équivalence suivante : $\forall x \in E, \forall y \in F, (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$.

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

Définition 2.38 (Application identité)

Étant donné un ensemble E, on appelle ***application identité de*** E et on note id_E l'application de E dans E qui à tout élément x de E associe x lui-même :

$$\mathrm{id}_E : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & \mathrm{id}_E(x) = x \end{cases}$$

Remarque

La propriété 2.37 s'écrit donc, pour $f : E \to F$ bijective :

1) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$;
2) $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

La troisième propriété - $\forall x \in E, \forall y \in F, (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$ - est utile pour ***obtenir l'expression de la bijection réciproque d'une application*** f ***bijective*** : en effet, étant donnée une application $f : E \to F$ bijective, obtenir l'expression de sa bijection réciproque revient à ***résoudre l'équation*** $y = f(x)$ ***d'inconnue*** $x \in E$ ***où*** $y \in F$ ***est donné***.

Ex. 2.26 ***Compléter***

- Pour une bijection $f : E \to F$, on a $f^{-1} : F \to E$ bijective et $(f^{-1})^{-1}$ ....
- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sont ....
- La fonction carré $c : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$ .... mais sa restriction à $\mathbb{R}_+$ ... . et la fonction racine carrée $r : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$ est ....
- La fonction $h : \begin{cases} [\![0;9]\!] \to [\![0;9]\!] \\ k \mapsto (k \times 7)\%10 \end{cases}$ de l'exercice 2.23 est une bijection dont la bijection réciproque est h^{-1} : ....

Ex. 2.27 Soit E et F deux ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, E)$.

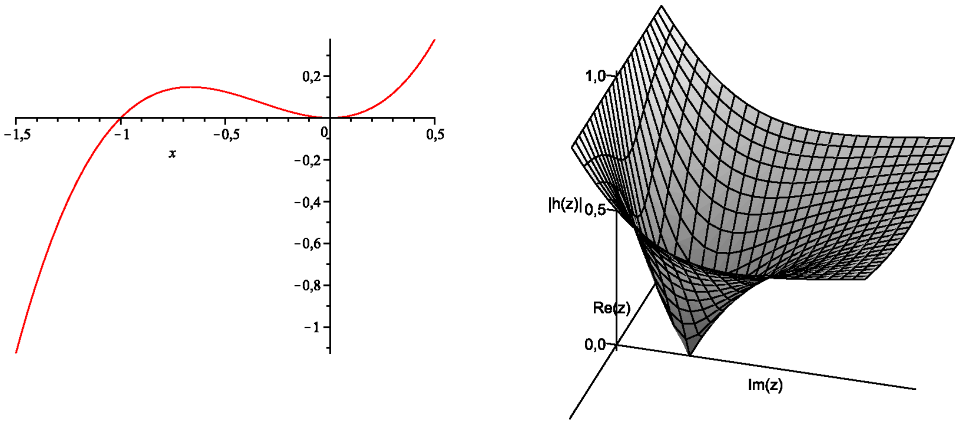
1) Montrer que f et g sont deux bijections réciproques l'une de l'autre si et seulement si $g \circ f = \mathrm{id}_E$ **et** $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
2) Que peut-on affirmer si $g \circ f = \mathrm{id}_E$?

Cor. 2.27

III.6. Graphe, représentations graphiques

Définition 2.39

On appelle ***graphe*** d'une application $f : E \to F$ l'ensemble $\{(x; f(x)), x \in E, f(x) \in F\}$.
Dans le cas où ce graphe est une partie de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, on l'appelle aussi ***représentation graphique de*** f (souvent notée $\mathcal{C}_f$) et il s'interprète comme un ensemble de points du plan ou de l'espace rapporté à un repère.



(a) Fonction g de l'exercice 2.23 (b) Fonction $|h|$ de l'exercice 2.23

FIGURE 2.2 – Représentations graphiques

Propriété 2.40 (Représentations graphiques d'une bijection et de sa réciproque)

On rapporte le plan à un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ orthonormé. Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une bijection. Alors la représentation graphique de la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est déduite de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale autour de la droite d'équation $y = x$.

Démonstration

Ex. 2.28 (Cor.) Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \in J$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. Donner une expression de f^{-1}. Représenter graphiquement f et sa bijection réciproque.

IV. Équations

IV.1. Définitions

Définition 2.41

On appelle ***équation*** une égalité faisant intervenir une ou plusieurs variables ***inconnues***.
On appelle ***inéquation*** une inégalité faisant intervenir une ou plusieurs variables ***inconnues***.
Les parties gauche et droite sont appelées ***membres*** de l'équation ou de l'inéquation.
On appelle ***système*** un ensemble d'équations ou d'inéquations.
L'ensemble des valeurs des inconnues pour lesquelles l'équation, l'inéquation ou le système ont une signification est appelé ***ensemble ou domaine de définition***.
Les valeurs des inconnues pour lesquelles l'équation, l'inéquation ou le système sont vrais sont appelées ***solutions***. Trouver ces valeurs, c'est ***résoudre*** l'équation, l'inéquation ou le système.

Méthode

Pour résoudre une équation, une inéquation ou un système, il faut ***toujours commencer par obtenir leur domaine de définition***.

IV.2. Résolution d'une équation

Méthode : Pour résoudre une équation

- il faut ***autant que possible raisonner par équivalences***. La propriété 2.37 garantit qu'on obtient une équation équivalente en appliquant une même bijection aux deux membres d'une équation ;
- si on utilise des implications, ***il faut vérifier que les valeurs obtenues sont solution de l'équation de départ*** ;
- dans le cas d'équations de degré 2 ou plus, factoriser puis utiliser le fait ***qu'un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul***. On dispose aussi de la méthode du discriminant pour les équations polynomiales du second degré ;
- si l'équation dépend d'un paramètre, il est parfois nécessaire de distinguer (le plus tard possible) différents cas permettant de conclure.

Ex. 2.29 (Cor.) Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes
1) $\sqrt{6-x}+\sqrt{3-x}=\sqrt{x+5}+\sqrt{4-3x}$ 2) $m(m+5)x = 6x$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre

IV.3. Résolution d'un système d'équations

Méthode : Pour résoudre un système d'équations

- à nouveau ***autant que possible raisonner par équivalences***. Notamment, ***on prendra soin de toujours conserver le même nombre de lignes pour les systèmes***, sauf dans le cas où plusieurs lignes sont identiques.
- utiliser ***soit la méthode par combinaisons des lignes***, ***soit la méthode de substitutions des inconnues*** (voir exemple).
  D'une manière générale, la méthode par combinaisons des lignes est préférable car plus efficace.

Remarque

On retiendra par ailleurs qu'un système linéaire de $n \in \mathbb{N}^*$ équations à n inconnues peut avoir :

- soit un unique n-uplet solution ;
- soit aucune solution ;
- soit une infinité de solutions.

Ex. 2.30 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant par les méthodes de combinaison et de substitution :
$$\begin{cases} 3x - 5y &= -9 \\ x - y &= 1 \end{cases}$$

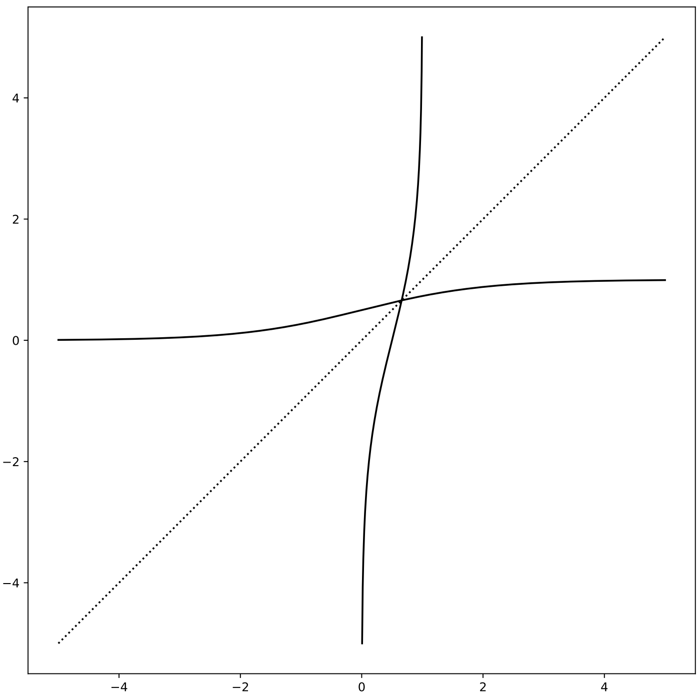
Cor. 2.30

Ex. 2.31 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants par la méthode de combinaison des lignes :
$$S_1 : \begin{cases} 2x + 5 &= y + z \\ y &= 1 + 3x - z \\ x + 2y + 2z &= 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad S_2 : \begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ x + 4y + 9z &= -1 \end{cases}$$

Cor. 2.31

V. Exercices corrigés

Cor. 2.28 : Étudions f : il s'agit d'une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotients de deux fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Calculons sa dérivée :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective. De plus
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{-x}+1} = 1$.
Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$ et sa réciproque est définie de $]0;1[$ sur $\mathbb{R}$.
N.B. : les limites en $\pm\infty$ ne sont pas atteintes, donc $J =]0;1[$ est un intervalle ouvert.



Cor. 2.29 : 1) Ensemble de définition : pour que cette équation ait un sens il faut que :
• $6 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 6$
• $3 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 3$
• $x + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$
• $4 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{4}{3}$
On résout donc l'équation sur $\left[-5; \frac{4}{3}\right]$. Les deux membres étant positifs et la fonction carrée étant bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, l'équation équivaut à $\left(\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \quad 9 - 2x + 2\sqrt{6-x}\sqrt{3-x} = 9 - 2x + 2\sqrt{x+5}\sqrt{4-3x}$$
$$\Leftrightarrow \quad (6-x)(3-x) = (x+5)(4-3x)$$
$$\Leftrightarrow \quad 18 - 9x + x^2 = 20 - 11x - 3x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + x - 1 = 0$$

La méthode du discriminant ou l'utilisation de la racine évidente -1 permettent de conclure que cette équation possède deux solutions $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$ - qui appartiennent toutes les deux à l'ensemble de définition $\left[-5; \frac{4}{3}\right]$.
2) $m(m+5)x = 6x \Leftrightarrow \left(m^2 + 5m - 6\right) x = 0$.
Si $m^2 + 5m - 6 \neq 0$, alors il existe une unique solution $x = 0$.
Si $m^2 + 5m - 6 = 0$, c'est-à-dire si $m \in \{-6; 1\}$, alors tout réel x est solution.

Nombres complexes

I. Définitions

Axiome 3.1

Il existe un nombre i ayant la propriété $i^2 = -1$.

Remarque

$i \notin \mathbb{R}$ puisque le carré de tout nombre réel est positif.

Définition 3.2

On appelle ***nombre imaginaire*** le produit de i par un nombre réel et ***nombre complexe*** la somme d'un nombre réel et d'un nombre imaginaire.
Autrement dit, ***un nombre complexe*** z ***peut toujours s'écrire sous la forme***

$$z = a + ib, \text{ où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

Cette écriture est appelée ***forme algébrique*** du nombre complexe.

Notation

On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble $i\mathbb{R} = \{ib, b \in \mathbb{R}\}$ des nombres imaginaires.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{C} = \{a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ des nombres complexes.
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on note $a = a + 0i$ (réel pur), $ib = 0 + ib$ (imaginaire pur) et $0 = 0 + 0i$.
On peut donc écrire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

Axiome 3.3

L'addition et la multiplication des nombres complexes vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication des nombres réels, à ceci près que

$$i^2 = ...$$

En particulier, les techniques de calcul des sommes finies du chapitre 1 restent valables pour des familles de nombres complexes, tout comme les identités remarquables.

Ex. 3.1 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique (a et b sont des nombres réels, n un entier naturel) :

$A = i^3$ $\quad B = i^4$ $\quad C = i^5$ $\quad D = i^n$

$E = (1 + 2i) \times \dfrac{3 + 4i}{5}$ $\quad F = (a + ib)(a - ib)$ $\quad G = (1 - i)^4$ $\quad H = \dfrac{a + ib}{6 - 8i}$

Ex. 3.2 Simplifier les expressions suivantes (a et b sont des nombres réels) :

$A = (1 + i)^2$ $\quad B = (1 + i)^4$ $\quad C = (2 + i)(3 - i)$ $\quad D = (1 + i)^2 + (1 - i)^2$

$E = (1 + i)(1 - i)$ $\quad F = (3 - 4i)(3 + 4i)$ $\quad G = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2} \times (a + ib)$ $\quad H = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^6$

Définition 3.4

Étant donné un nombre complexe $z = a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ on appelle

- ***conjugué*** de z le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$;
- ***module*** de z le nombre réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$;
- ***partie réelle*** de z le nombre réel $\mathcal{R}e\,(z) = a = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$;
- ***partie imaginaire*** de z le nombre **réel** $\mathcal{I}m\,(z) = b = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

Propriété 3.5

Quels que soient $z, z' \in \mathbb{C}$ on a :

1) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
2) $\overline{-z} = -\bar{z}$
3) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
4) Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
5) $\bar{\bar{z}} = z$
6) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
7) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$
8) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
9) $z\bar{z} = |z|^2$
10) Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
11) $|\bar{z}| = |z| = |-z|$
12) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
13) Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Méthode : Parties réelles et imaginaires

Pour obtenir la partie réelle ou la partie imaginaire d'un nombre complexe, les formules $\mathcal{R}e\,(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ et $\mathcal{I}m\,(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ peuvent s'avérer ***extrêmement efficaces***.
Pour montrer qu'un nombre complexe z est réel, on montre que $\mathcal{I}m\,(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i} = 0$ c'est-à-dire que $\bar{z} = z$.
Pour montrer qu'un nombre complexe z est imaginaire, on montre que $\mathcal{R}e\,(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2} = 0$ c'est-à-dire que $\bar{z} = -z$.

Ex. 3.3 On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$. Montrer que $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Cor. 3.3

Théorème 3.6 (Première inégalité triangulaire)

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 3.7 (Seconde inégalité triangulaire)

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Définition 3.8

On appelle ***affixe*** du point $M(a;b)$ ou du vecteur $\vec{u}(a;b)$ le nombre complexe $z = a + ib$.

Notation

Étant donnés $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note :
$\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ le ***disque ouvert de centre*** z_0 ***et de rayon*** r ***;***
$\overline{\mathcal{D}}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leqslant r\}$ le ***disque fermé de centre*** z_0 ***et de rayon*** r ***;***
$\mathcal{C}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$ le ***cercle de centre*** z_0 ***et de rayon*** r***.***
Notamment, $|z - z_0|^2 = r^2$ est ***une équation cartésienne du cercle de centre*** $C(z_0)$ ***et de rayon*** r.

Ex. 3.4 Donner une équation cartésienne du cercle de centre $A(3; -1)$ et de rayon 3.

Cor. 3.4

Propriété 3.9 ($\mathbb{R}$-linéarité des parties réelle et imaginaire)

Les fonctions $\mathcal{R}e : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{I}m : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$-***linéaires*** c'est-à-dire

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} \mathcal{R}e\,(\lambda z_1 + \mu z_2) & = & \lambda \mathcal{R}e\,(z_1) + \mu \mathcal{R}e\,(z_2) \\ \mathcal{I}m\,(\lambda z_1 + \mu z_2) & = & \lambda \mathcal{I}m\,(z_1) + \mu \mathcal{I}m\,(z_2) \end{cases}$$

« ***Essentiellement, les calculs avec les nombres complexes suivent les mêmes règles que ceux avec les nombres réels*** ».

- $0 \in \mathbb{C}$: il existe un ***élément neutre pour l'addition*** vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C}, z + z' = 0$: tout complexe possède un ***symétrique*** pour l'addition
  z' est noté $-z$ et appelé ***opposé*** de z
- $\forall(z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' = z' + z$: l'addition complexe est ***commutative***
- $\forall(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') + z'' = z + (z' + z'') = z + z' + z''$: l'addition complexe est ***associative***
- $1 \in \mathbb{C}$: il existe un ***élément neutre pour la multiplication*** vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, z \times 1 = 1 \times z = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z' \in \mathbb{C}^*, z \times z' = 1$: tout complexe non nul possède un ***symétrique*** pour la multiplication
  z' est noté $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ et appelé ***inverse*** de z
- $\forall(z, z') \in \mathbb{C}^2, z \times z' = z' \times z$: la multiplication complexe est ***commutative***
- $\forall(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'') = zz'z''$: la multiplication complexe est ***associative***
- $\forall(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$: la multiplication complexe est ***distributive*** sur l'addition complexe

Définition 3.10 (Structure de corps)

Pour résumer l'ensemble de ces propriétés, on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un ***corps*** : cela signifie très exactement que ***l'ensemble des nombres complexes possède une addition et une multiplication internes*** qui vérifient les propriétés que nous venons de donner.

II. Nombres complexes de module 1

Notation

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, autrement dit
$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$
$\mathbb{U}$ a notamment pour éléments 1, i, -1 et $-i$.

Propriété 3.11

L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 vérifie les propriétés :

- le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est un élément de $\mathbb{U}$;
- il existe dans $\mathbb{U}$ un élément neutre pour la multiplication (c'est 1) ;
- tout élément de $\mathbb{U}$ possède un inverse dans $\mathbb{U}$;
- la multiplication est commutative et associative.

Définition 3.12

On résume les propriétés précédentes en disant que $(\mathbb{U}, \times)$ est un ***groupe commutatif***.

Proposition 3.13

Tout nombre complexe non nul s'écrit de façon unique comme produit d'un réel strictement positif et d'un nombre complexe de module 1 :
$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists!(r, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}, z = ru.$

Ex. 3.5 Écrire les nombres complexes suivantes sous la forme ru où $r \in \mathbb{R}_+$ et $u \in \mathbb{U}$:
$A = 3 + 3i \qquad B = -3 - 3i \qquad C = -3 + 4i \qquad D = 12 - 5i$

Proposition 3.14 (Existence des arguments)

Pour tout élément u de $\mathbb{U}$, il existe une infinité de valeurs $\theta \in \mathbb{R}$ telles que $u = \cos\theta + i\sin\theta$. De plus, deux quelconques de ces valeurs diffèrent d'un multiple entier de 2π.

Définition 3.15 (Arguments d'un nombre complexe non nul)

Les deux propositions précédentes nous permettent d'affirmer que
$\forall z \in \mathbb{C}, \exists!\rho \in \mathbb{R}_+, \exists\theta \in \mathbb{R}, z = \rho\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
Cette écriture est appelée ***forme trigonométrique de*** z dans laquelle ρ est le module de z et θ est ***un argument*** de z.

Définition 3.16 (Argument principal)

Pour un nombre complexe non nul, la proposition 3.14 affirme l'existence d'une infinité d'arguments, différant entre eux d'un multiple entier de 2π.
On dit que l'argument est défini ***à*** 2π ***près*** ou encore ***modulo*** 2π.
On appelle ***argument principal*** l'unique argument compris dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Notation

On note $\arg(z)$ tout argument d'un nombre complexe non nul et $\operatorname{Arg}(z)$ l'argument principal de z. Pour signifier que $\arg(z)$ est défini à 2π près, on écrira
$\arg(z) \equiv \operatorname{Arg}(z)\,[2\pi]$ qui se lit « tout argument de z est **congru** à son argument principal modulo 2π » ***ce qui équivaut à*** $\exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$.

Notation

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \in \mathbb{U}$.
$\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$, on note e^z le nombre complexe $e^z = e^a e^{ib} \in \mathbb{C}^*$.

Propriété 3.17 (Propriétés de l'exponentielle complexe)

$\forall(\theta;\theta') \in \mathbb{R}^2$, $\forall(z;z') \in \mathbb{C}^2$:

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\begin{aligned} e^{i\theta} = 1 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi \\ &\iff \theta \equiv 0\,[2\pi] \end{aligned}$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta'\,[2\pi]$
- $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$
- $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $\dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$
- $\begin{aligned} e^z = 1 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi \\ &\iff z \equiv 0\,[2i\pi] \end{aligned}$
- $e^z = e^{z'} \iff z \equiv z'\,[2i\pi]$

Important !

Il n'existe pas de logarithme complexe !

Corollaire 3.18

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\,[2\pi]$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\,[2\pi]$

Méthode : Obtention de la forme trigonométrique d'un complexe non nul

La démonstration de la proposition 3.14 fournit une méthode pour l'obtention de la forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul :

1) on commence par calculer $r = |z|$ puis on écrit z sous la forme $z = ru$ où u est de module 1 ;
2) on cherche ensuite $\phi \in [0;\pi]$ tel que $\mathcal{R}e\,(u) = \cos(\phi)$; on verra au chapitre 7 comment obtenir cette valeur dans le cas général.
3) enfin, si $\mathcal{I}m\,(u) \geqslant 0$ alors $\theta = \operatorname{Arg}(z) = \phi$,

sinon $\mathcal{I}m\,(u) < 0$ et $\theta = \text{Arg}(z) = -\phi$.

On en conclut que $z = |z|e^{i\theta}$.
Il est fréquent que l'on utilise en physique une méthode similaire faisant intervenir la fonction Arctan et le signe de $\mathcal{R}e\,(z)$ (voir chapitre 7).

Ex. 3.6 Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :
$A = 3 + 3i \qquad B = -3 - 3i \qquad C = -3 + \sqrt{3}i \qquad D = 1 - \sqrt{3}i$

Ex. 3.7 On pose $z = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
Calculer z^2 et en déduire la valeur de $\Theta = \text{Arg}(z)$.

Cor. 3.7

Ex. 3.8 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E)\ :\ \bar{z} = z^3$$

Cor. 3.8

III. Utilisations en trigonométrie

Proposition 3.19 (Formules d'Euler)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

Proposition 3.20 (Formule de Moivre)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Ex. 3.9 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $A = \left(\dfrac{1 - \sqrt{3}i}{-1 + i}\right)^{50}$.

Cor. 3.9

```
>>> ((1-(3**0.5)*1j)/(-1+1j))**50
(29058990.52155743-16777215.999999903j)
```

Méthode : Somme de deux complexes de même module

Pour écrire sous forme trigonométrique la somme de deux complexes de même module, on « ***factorise par l'angle moitié*** » :
$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{i\frac{-\theta+\theta'}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.

Il s'agit de la forme trigonométrique si $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) > 0$. Sinon, on obtient la forme trigonométrique en écrivant $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\pi}$ avec $-\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \geqslant 0$.

Ex. 3.10 Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $z = 1 + e^{i\theta}$ et $Z = 1 - e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi;\pi]$.

Cor. 3.10

Méthode : Développement de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en polynômes trigonométriques

Pour obtenir pour tout entier n et tout réel x les expressions de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ on utilise la formule 3.20 de Moivre et la formule du binôme de Newton.

Ex. 3.11 Écrire pour x réel $\cos(3x), \sin(3x), \cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Cor. 3.11

Méthode : Linéarisation des polynômes trigonométriques

Réciproquement, pour transformer, pour $x \in \mathbb{R}$, des produits de $\cos x$ et $\sin x$ en sommes de cosinus et de sinus d'un multiple entier de x, on utilise les formules 3.19 d'Euler et la formule du binôme de Newton.

Ex. 3.12 Linéariser $\cos^2(x)$, $\cos(x)\sin(x)$, $\sin^2(x)$, $\cos^3(x)$, $\sin^3(x)$, $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a)\sin(b)$.

Cor. 3.12

Méthode : Factorisation de certaines sommes trigonométriques

Une expression faisant intervenir une somme de fonctions trigonométriques peut parfois être simplifiée en écrivant $\cos x$ et $\sin x$ comme parties réelle et imaginaire de e^{ix} puis en factorisant l'expression obtenue.

Ex. 3.13 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$

et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

Cor. 3.13

Ex. 3.14 Factoriser pour $p, q \in \mathbb{R}$, $A = \cos(p) + \cos(q)$ et $B = \sin(p) - \sin(q)$.

Cor. 3.14

Maths - Chapitre 4

Trigonométrie

I. Rappels

I.1. Définition, Angles associés

On suppose connue la définition des fonctions trigonométriques à l'aide du cercle trigonométrique dont on déduit immédiatement :

Propriété 4.1

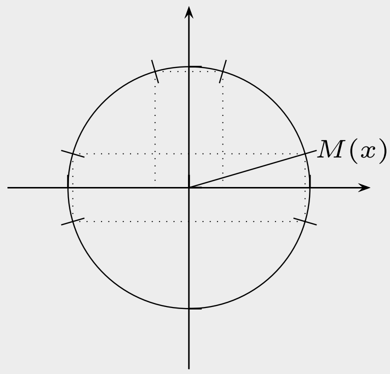
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$	$-1 \leq \sin(x) \leq 1$
$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$	$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(x) = \cos(x_0) \Leftrightarrow$ ....

$\sin(x) = \sin(x_0) \Leftrightarrow$ ....

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ par le théorème de Pythagore.



Ex. 4.1 Donner la valeur exacte de

$A = \cos\left(\frac{588\pi}{3}\right)$ $B = \sin\left(\frac{-89\pi}{6}\right)$ $C = \cos\left(\frac{105\pi}{4}\right)$ $D = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

Définition 4.2 (Fonction tangente)

La fonction tangente est définie par $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.

Son domaine de définition est $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

L'application tan est impaire, π-périodique.

Ex. 4.2 Soit x un réel tel que $\cos(x) = \dfrac{3}{5}$.

1) Dessiner le cercle trigonométrique et placer sur ce dessin $\cos(x)$ et les positions possibles des points du cercle associés à l'angle x.
2) Donner la valeur de $\cos(\pi + x)$, $\cos(x - \pi)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.
3) ***Dans cette question***, on suppose que $x \in]-\pi; 0]$: calculer $\sin(x)$ et $\tan(x)$.
4) ***Dans cette question***, on suppose que $x \in]0; \pi]$: calculer $\sin(x)$ et $\tan(x)$.

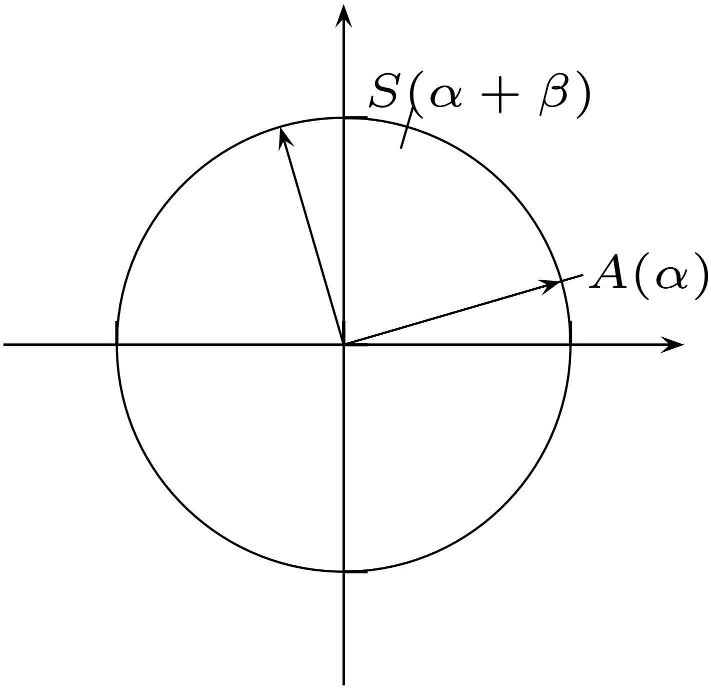
I.2. Formules d'addition

Propriété 4.3 (Formules d'addition)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$\begin{array}{rclcrcl} \cos(\alpha+\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \quad & \cos(\alpha-\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha & \quad & \sin(\alpha-\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \end{array}$$

Démonstration hors programme



Ex. 4.3 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :
(E_1) : $\cos(2x)+\cos(x)=0$ (E_2) : $\tan(x)=2\sin(x)$

Corollaire 4.4 (Formules d'addition de la fonction $\tan$**)**

Lorsque ces expressions sont définies,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Démonstration

Corollaire 4.5 (Formules de duplication)

Lorsque ces expressions sont définies,

$$\cos(2x) = \cos^2(x)-\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1 = 1-2\sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

Démonstration

Ex. 4.4 Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & J \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} \end{array} \right.$.

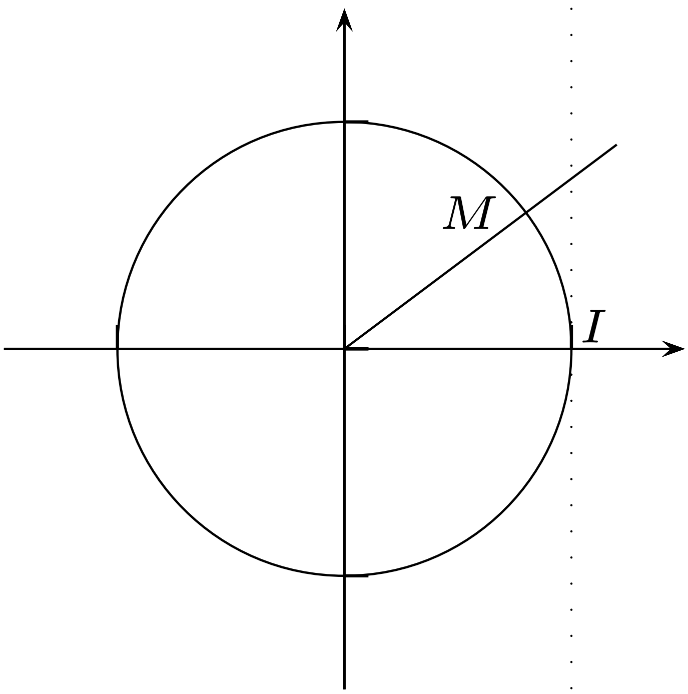
1) Quel est l'ensemble de définition I de f ?
2) Justifier que, pour tout réel x dans I, il existe un unique réel $t \in [0;\pi]$ tel que $x = \cos(t)$. ***Cet unique réel*** t ***est noté*** $\mathrm{Arccos}(x)$***.***
3) Montrer que $f(\cos(t)) = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.
4) En déduire que
$$\forall x \in I, f(x) = 2\cos\left(\frac{\mathrm{Arccos}(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

I.3. Dérivées des fonctions trigonométriques

Lemme 4.6 (Nombre dérivé de $\sin$ **en** 0**)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration hors programme

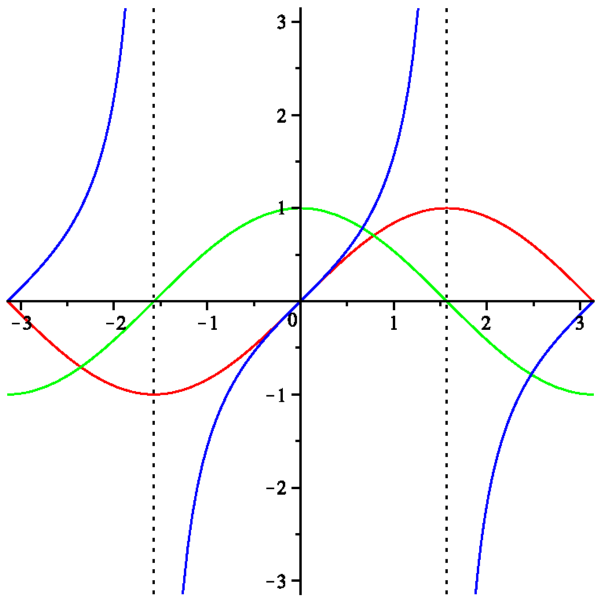


Propriété 4.7 (Fonctions dérivées de $\cos$**,** $\sin$ **et** $\tan$**)**

Les fonctions cos, sin et tan sont dérivables sur leur ensemble de définition et sur ces ensembles
$\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos \qquad \tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$
On a de plus $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.

Démonstration

Fonctions trigonométriques



Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $-\sin(x)$					
Variations de cos					

Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\cos(x)$					
Variations de sin					

Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\frac{1}{\cos^2(x)}$					
Variations de tan					

Ex. 4.5 Étudier la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2-\cos(x)}$.
Tracer rapidement sa représentation graphique.

II. Formules diverses

II.1. Linéarisation

Corollaire 4.8 (Formules de linéarisation)

Quels que soient les réels a et b,

$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}\\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}\\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}\end{aligned}$$

Démonstration

Ex. 4.6 Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x$.

II.2. Formules de factorisation

Corollaire 4.9 (Formules de factorisation)

Quels que soient les réels a et b,

$$\begin{array}{rcl}
\cos(p)+\cos(q) & = & 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\cos(p)-\cos(q) & = & -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\sin(p)+\sin(q) & = & 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\sin(p)-\sin(q) & = & 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{array}$$

Démonstration

Ex. 4.7 Résoudre les équations suivantes :
$(E_1) : \sin(3x)+\sin(5x)=\sin(4x)$ $(E_2) : \cos(x)-\cos(2x)+\cos(3x)=1$

II.3. Angle moitié

Corollaire 4.10

Soit x un réel tel que $\tan(x)$ et $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soient définis.
On pose $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Démonstration

Ex. 4.8 On se place dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct.
On note O l'origine du repère, I le point de coordonnées $(1;0)$ et J le point de coordonnées $(0;1)$.
Pour tout réel t, on définit le point M_t du plan de coordonnées $\left(\frac{1}{1+t^2};\frac{t}{1+t^2}\right)$.
Montrer que, quel que soit le réel t choisi, M_t appartient au cercle de diamètre $[OI]$.
Réciproquement, est-ce que tous les points de ce cercle peuvent s'écrire M_t pour un réel t bien choisi ?

Maths - Chapitre 5

Techniques de calcul différentiel

I. Inégalités dans $\mathbb{R}$

I.1. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est, comme l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, muni d'une relation d'ordre totale $\leqslant$. Cette relation est ***compatible avec les opérations du corps*** $(\mathbb{R}, +, \times)$:

Définition 5.1 (Compatibilité de la relation d'ordre avec les opérations)

La relation d'ordre $\leqslant$ vérifie les propriétés suivantes, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

- compatibilité avec l'addition : $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$;
- compatibilité avec la multiplication : $(x \leqslant y$ et $0 \leqslant z) \Rightarrow x \times z \leqslant y \times z$.

Elle est dite ***compatible avec les opérations du corps*** $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Ex. 5.1 Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Cor. 5.1

Remarque

L'exemple précédent montre que des notions comme celle de croissance d'une fonction ne sont pas définies pour les fonctions à valeurs complexes. Il s'ensuit que certains théorèmes se généralisent mal - ou pas du tout - à de telles fonctions.
Il convient donc de bien comprendre d'emblée qu'il existe une différence fondamentale entre $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, même si comme nous le verrons au chapitre 7 certaines généralisations sont possibles.

Propriété 5.2

Si x et y sont deux réels, alors

$$x \leqslant y \Leftrightarrow -x \geqslant -y \qquad xy \geq 0 \Leftrightarrow (x \text{ et } y \text{ ont même signe}) \qquad x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} \text{ ont même signe}$$

$$0 < x \leqslant y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} \qquad 0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant y^2$$

Démonstration

Remarque

On peut reformuler les propriétés

$x \leqslant y \Leftrightarrow -x \geqslant -y \qquad 0 < x \leqslant y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} \qquad 0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant y^2$

de la façon suivante :

- $x \in \mathbb{R} \mapsto -x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$;
- $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Attention cependant :

- $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x}$ ***n'est pas décroissante*** sur $\mathbb{R}_*$ puisque $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{1}$;
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est ***décroissante*** sur $\mathbb{R}_-$.

I.2. Bornes et extremums d'une partie

Les notions de majorant, minorant, bornes, maximum, minimum et extremums vues pour les entiers au chapitre 1 se généralisent à $\mathbb{R}$ puisqu'il est totalement ordonné. Notamment :

Proposition 5.3 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

Ex. 5.2 Quels sont les majorants et les minorants de $\mathbb{R}_+$? de $\mathbb{R}_-$?

Cor. 5.2

Ex. 5.3 $[0; 1[$ admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? Mêmes questions pour $\mathbb{R}_-$.

Cor. 5.3

Ex. 5.4 Soit $E = \left\{ y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, y = x + \dfrac{1}{x} \right\}$.
E est-il minoré ? Possède-t-il un minimum ?

Cor. 5.4

I.3. Valeur absolue

Définition 5.4

Pour tout réel x, on appelle ***valeur absolue de*** x le maximum de x et de $-x$.

Notation

On note $|x| = \max\{x; -x\}$ la valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$.

Les propriétés de la proposition suivante sont laissées à titre d'exercice.

Proposition 5.5 (Propriétés élémentaires de la valeur absolue)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
- $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
- $|x - y| = r \Leftrightarrow (x = y - r \text{ ou } x = y + r)$
- $|x| = x \Leftrightarrow x \geqslant 0$
- $|xy| = |x| \times |y|$
- si $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$
- $|x| \leqslant r \Leftrightarrow (-r \leqslant x \leqslant r)$
- $|x| < r \Leftrightarrow (-r < x < r)$
- $|x| \geqslant r \Leftrightarrow (x \geqslant r \textbf{ ou } x \leqslant -r)$
- $|x| = r \Leftrightarrow (x = r \text{ ou } x = -r)$
- $|x - y| \leqslant r \Leftrightarrow (y - r \leqslant x \leqslant y + r)$
- $|x| = -x \Leftrightarrow x \leqslant 0$
- si $x \neq 0$, $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|}$

Proposition 5.6 (Inégalités triangulaires)

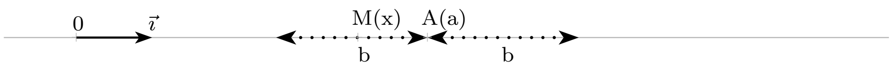
Soit x et y des réels. Alors

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \qquad \text{et} \qquad ||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

Démonstration

Remarque

- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$. De plus, si $r \geq 0$, alors
  $|x| \leqslant r \Leftrightarrow x^2 \leqslant r^2$ et
  $|x| \geqslant r \Leftrightarrow x^2 \geqslant r^2$.
- On rapporte la droite réelle à un repère $(O; \vec{\imath})$. Pour deux réels x et y, la valeur absolue $|y - x|$ s'interprète géométriquement comme la distance entre les points $M(x)$ et $N(y)$: $MN = |y - x|$. Étant donnés deux réels a et b, l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - a| \leqslant b$ d'inconnue x s'interprète donc géométriquement comme l'ensemble des points $M(x)$ dont la distance au point $A(a)$ est inférieure à b.



Ex. 5.5 Résoudre les inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $(x + 5)(2x - 1) \leq (3x - 7)(2x - 1)$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x + 1}} > \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$

Cor. 5.5

Ex. 5.6 Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.

Cor. 5.6

Ex. 5.7 Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x : $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| > 3$.

Cor. 5.7

Ex. 5.8 (Cor.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité $|x+1|+|x-3|<6$.

Ex. 5.9 (Cor.) [∗] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) \leqslant g(x)+g(y)$$

I.4. Partie entière d'un nombre réel

Définition 5.7

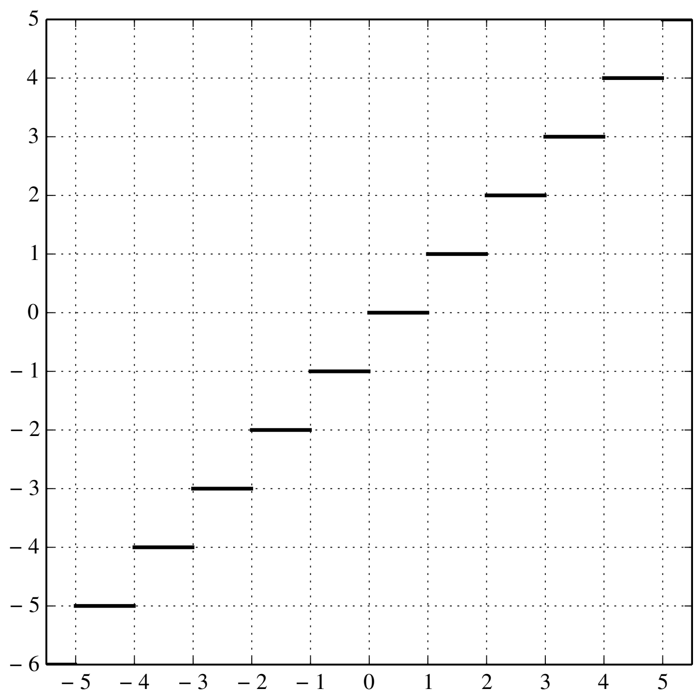
Pour tout réel x, on appelle ***partie entière de*** x le plus grand entier $N \in \mathbb{Z}$ inférieur ou égal à x.

Cet entier existe toujours d'après la propriété 1.5 (propriété fondamentale des entiers).

Notation

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Représentation graphique de $x \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor x \rfloor$



Propriété 5.8

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}, x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

3) Si $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \leq x$ alors $n \leq \lfloor x \rfloor$.
4) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

Démonstration

Méthode

Les deux premières propriétés ci-dessus permettent de traiter la plupart des problèmes faisant intervenir la fonction partie entière. ***Il faut donc absolument les connaître***.

Ex. 5.10

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers positifs a_n et b_n tels que

$$\begin{cases} (2+\sqrt{3})^n & = & a_n + b_n\sqrt{3} \\ 3b_n^2 & = & a_n^2 - 1 \end{cases}$$

2) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^n} \right\rfloor$ est un entier impair.

Cor. 5.10

II. Fonctions réelles d'une variable réelle

Dans ce qui suit, on rapporte le plan à un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ orthonormé.

II.1. Représentations graphiques

Définition 5.9

Une fonction f réelle d'une variable réelle n'est bien définie que lorsqu'on explicite à la fois ses ensembles de départ D et d'arrivée A et une manière d'obtenir l'image $f(x) \in A$ de tout élément $x \in D$. Lorsque l'ensemble de départ est omis, on appelle ***ensemble de définition*** de la fonction f, souvent noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ donnée peut être calculée. Par exemple, l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^*$.

Proposition 5.10

Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une bijection. Alors la représentation graphique de la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ de f est déduite de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale autour de la droite d'équation $y = x$.

Démonstration

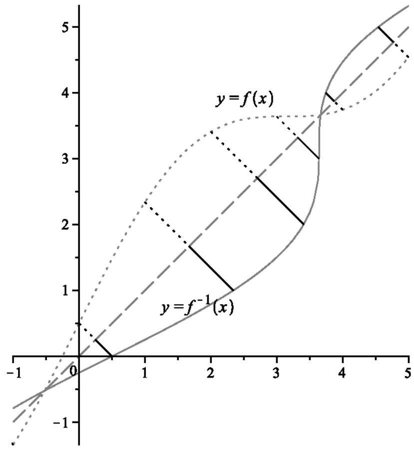


FIGURE 5.1 – Représentations graphiques de f et f^{-1}

II.2. Symétries des représentations graphiques

Définition 5.11 (Parité d'une fonction)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in D$, $-x \in D$, A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to A$ une fonction.

- On dit que f est ***paire*** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est ***impaire*** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Définition 5.12 (Périodicité d'une fonction)

Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$, D une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in D$, $x + p \in D$, A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to A$ une fonction.

On dit que f est ***périodique de période*** p si pour tout $x \in D$, $f(x+p) = f(x)$. On dit alors que p est ***une période*** de f.

Remarque

- Dans la définition précédente, on peut aussi admettre sans modification de signification les périodes strictement négatives.
- Si p est une période, alors tout multiple entier (positif) non nul de p en est aussi une.
- On dit souvent que p est ***la*** période d'une fonction périodique lorsque p est la plus petite période strictement positive de f.

Proposition 5.13 (Symétrie de la représentation graphique d'une fonction)

- Si f est une fonction paire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est une fonction impaire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.
- Si f est une fonction périodique de période p, alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de

vecteur $p\vec{\imath}$.

Démonstration

Ex. 5.11 Quelles sont les symétries de la représentation graphique de la fonction cos ?

Cor. 5.11

II.3. Bornes et extremums d'une fonction

Définition 5.14 (Majorant, minorant)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \to A$ une fonction.
On dit que f est ***majorée par*** $M \in \mathbb{R}$ et on appelle M ***majorant de*** f, si pour tout $x \in D$, $f(x) \leqslant M$.
On dit que f est ***minorée par*** $m \in \mathbb{R}$ et on appelle m ***minorant de*** f, si pour tout $x \in D$, $f(x) \geqslant m$.
Une fonction qui est minorée par m et majorée par M est dite ***bornée*** par m et M.

Remarque

Dire qu'une fonction est majorée (respectivement minorée, bornée) équivaut à dire que son image $f(D)$ est majorée (respectivement minorée, bornée). Les propriétés des parties de $\mathbb{R}$ bornées s'adaptent donc immédiatement aux fonctions réelles bornées.

Proposition 5.15 (Caractérisation des fonctions bornées)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$. La fonction $f : D \to A$ est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Démonstration

Définition 5.16 (Maximum global, minimum global)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \to A$ une fonction.
On dit que f admet un ***maximum global*** si

$$\exists x_0 \in D, \forall x \in D, f(x) \leqslant f(x_0)$$

On dit alors que $f(x_0)$ est ***le maximum*** de f.
On dit que f admet un ***minimum global*** si

$$\exists x_0 \in D, \forall x \in D, f(x) \geqslant f(x_0)$$

On dit alors que $f(x_0)$ est ***le minimum*** de f.

Important ! Unicité des extremums globaux

La proposition 5.3 permet d'affirmer que si une fonction admet un maximum global (ou un minimum global), alors celui-ci est unique. Cependant, ce maximum (ou ce minimum) possède alors un ***ou plusieurs*** antécédent(s).

Notation

On note $\max\limits_{x\in D} f(x)$ le maximum global de f s'il existe et $\min\limits_{x\in D} f(x)$ le minimum global de f s'il existe.

Ex. 5.12 La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est-elle majorée ? minorée ? Si oui, possède-t-elle un maximum global ? un minimum global ?

Cor. 5.12

Ex. 5.13 La fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est-elle majorée ? minorée ? Si oui, possède-t-elle un maximum global ? un minimum global ?

Cor. 5.13

II.4. Monotonie

Définition 5.17 (Croissance, décroissance, monotonie)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \to A$ une fonction et I une partie de D.

- On dit que f est ***croissante sur*** I si $\forall (x,y) \in I^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- On dit que f est ***strictement croissante sur*** I si $\forall (x,y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- On dit que f est ***décroissante sur*** I si $\forall (x,y) \in I^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
- On dit que f est ***strictement décroissante sur*** I si $\forall (x,y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- On dit que f est ***monotone sur*** I si elle est croissante ou décroissante sur I et ***strictement monotone sur*** I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Important ! Intervalles et monotonie

On a défini la croissance, la décroissance ou la monotonie de f sur une partie I quelconque de l'ensemble de départ D. Mais il vaut mieux penser à cette partie comme à un ***intervalle***. En effet, les propriétés caractérisant la monotonie d'une fonction dérivable par exemple (voir proposition 5.28) sont valables sur un intervalle. Ainsi, la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$ puisque $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{1}$.

Proposition 5.18 (Stricte monotonie et injectivité)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \to A$ une fonction strictement monotone. Alors f est injective.
La réciproque est fausse.

Démonstration

Ex. 5.14 Démontrer que si $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ est une bijection strictement monotone, alors sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f.

Cor. 5.14

Méthode : Montrer qu'une fonction n'est pas monotone

Pour montrer qu'une fonction f n'est pas monotone sur un intervalle I, il suffit de trouver un triplet $(a;b;c) \in I^3$ tels que

$$(a < b < c)\ \textbf{et}\ \Big(\big(f(a) < f(b)\ \textbf{et}\ f(c) < f(b)\big)\ \textbf{ou}\ \big(f(a) > f(b)\ \textbf{et}\ f(c) > f(b)\big)\Big)$$

Ex. 5.15 Montrer que $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cor. 5.15

II.5. Monotonie et continuité

Théorème 5.19

Soit f une fonction continue sur ***un intervalle*** I.
f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Théorème 5.20 (Bijection continue)

Soit f une fonction continue sur ***un intervalle*** I.
f est une bijection de I sur $f(I)$ si et seulement si f est strictement monotone.
De plus,

- $f(I)$ est alors un ***intervalle*** ;
- la bijection réciproque f^{-1} est alors continue sur $f(I)$, strictement monotone, de même monotonie que f.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction f continue ***de l'intervalle*** I sur J est bijective :

- on montre qu'elle est strictement monotone ;
- comme le théorème précédent ***permet d'affirmer que*** J ***est un intervalle***, on vérifie que $f(I) = J$ en calculant les limites de f aux bornes de I.

Ex. 5.16 (Cor.) Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to &]1;\infty[\\ x & \mapsto & e^{2x} + e^x + 1 \end{cases}$ est bijective.

Méthode

Si f est bijective continue de I (***intervalle***) sur J (***intervalle***), alors elle est strictement monotone et la propriété de stricte croissance (ou décroissance) est ***une équivalence logique***. Autrement dit, appliquer une même bijection aux deux membres d'une inégalité donne une inégalité équivalente.

Ex. 5.17 Résoudre l'inéquation d'inconnue x réelle

$$\ln\left(x^2 + x + 1\right) > 0$$

en commençant par déterminer son ensemble de définition.

Cor. 5.17

III. Éléments de calcul différentiel

La plupart des résultats donnés dans cette section sont admis et ne seront démontrés que dans le cadre du chapitre consacré à la dérivabilité.
Dans toute la section, I et J sont deux ***intervalles*** réels ***contenant une infinité de points***.

III.1. Définition

Définition 5.21 (Dérivabilité en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I. On dit que f est ***dérivable en*** a si l'application $x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$ admet une limite finie en a. Cette limite s'appelle alors le ***nombre dérivé de*** f ***en*** a et se note $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Remarque

- Si f est dérivable en a, on peut aussi écrire $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.
- Pour $x \neq a$, le quotient $\tau_f(x,a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ s'appelle le ***taux d'accroissement de la fonction*** f ***entre*** a ***et*** x ; il représente la pente de la droite passant par les points $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ du plan rapporté à un repère.

- Le nombre dérivé représente donc la pente de la droite limite obtenue lorsque M tend vers A : cette droite est la tangente à la représentation graphique $\mathcal{C}_f$.

Définition 5.22 (Tangente en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a de I. Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la droite d'équation cartésienne

$$y = f(a) + f'(a) \times (x - a)$$

est la ***tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point*** $A(a, f(a))$.
Cette définition est illustrée par la figure 5.2.

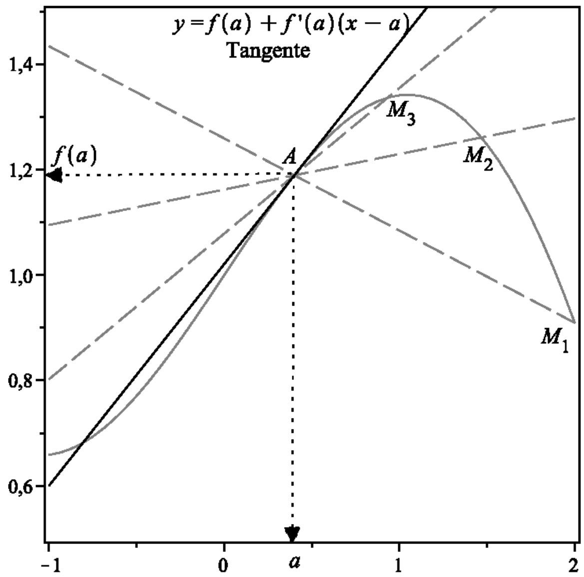


FIGURE 5.2 – Nombre dérivé et tangente en un point

Remarque

La notation de Leibniz $f'(a) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ est un ***moyen mnémotechnique*** de retenir l'équation réduite de la tangente :
$f'(a) = \dfrac{y - f(a)}{x - a} \Rightarrow y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Définition 5.23 (Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$ s'appelle la ***fonction dérivée*** de f.
On note f'' la dérivée de f' si elle existe, etc. et pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ la dérivée n^{e} de f.

III.2. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 5.24 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I.

- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la ***combinaison linéaire*** $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- Le produit fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas sur I, l'inverse $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.
- Si g ne s'annule pas sur I, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Proposition 5.25 (Composition)

Si $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.

Théorème 5.26 (Dérivée de la bijection réciproque)

Soit $f : I \to J$ une application bijective et dérivable. L'application f^{-1} est dérivable en tout $y \in J$ pour lequel $f' \circ f^{-1}(y) \neq 0$ et alors $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$.
Cette proposition est illustrée par la figure 5.3 page 65.

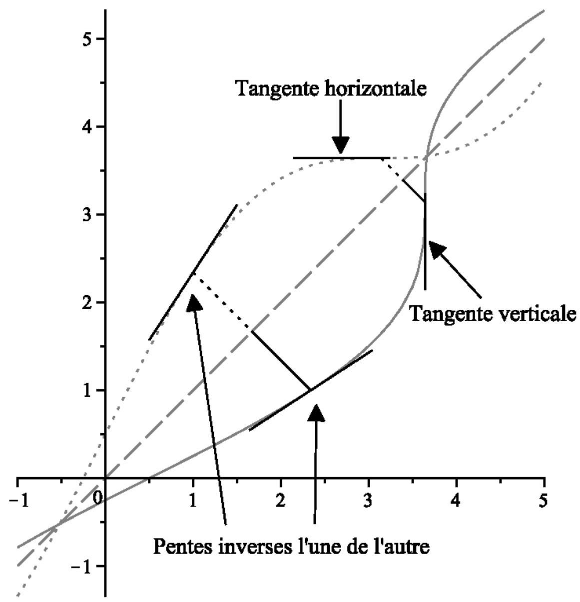


FIGURE 5.3 – Dérivées d'une bijection et de sa réciproque

Opérations sur les fonctions dérivables

Soit u et v deux fonctions satisfaisant aux hypothèses des propositions précédentes et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (\lambda u)' = \lambda u' \qquad (uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\tfrac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2} \qquad \left(\tfrac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u \qquad (u^{-1})' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}}$$

La formule de dérivation d'une fonction composée a été vue sur des exemples en terminale :

$$\big(\exp(u)\big)' = u' \times \exp(u) \qquad \big(\ln(u)\big)' = \frac{u'}{u} \qquad \big(\sqrt{u}\big)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

III.3. À propos des notations et de l'interprétation physique

Étant donnés deux points $M_1(x_1; y_1)$ et $M_2(x_2; y_2)$ (avec $x_1 \neq x_2$) appartenant à la droite (non parallèle à l'axe des ordonnées) d'équation $y = ax + b$, on a

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Donc $y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2)$ ou encore $a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.
Le coefficient directeur d'une droite est donc égal à

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Remplacer Δ par d signifie implicitement que l'on opère des « différences infinitésimales » c'est-à-dire que l'on calcule une ***limite*** :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Lorsque l'on souhaite dériver une ***fonction de plusieurs variables***, il devient important de préciser ***par rapport à quelle variable*** on effectue la dérivation. La notation adoptée (en mathématiques comme en physique) est alors la suivante

$$\frac{\partial E}{\partial x}(a,b,c) = \lim_{h\to 0} \frac{E(a+h,b,c) - E(a,b,c)}{h}$$
$$\frac{\partial E}{\partial y}(a,b,c) = \lim_{h\to 0} \frac{E(a,b+h,c) - E(a,b,c)}{h}$$
$$\frac{\partial E}{\partial z}(a,b,c) = \lim_{h\to 0} \frac{E(a,b,c+h) - E(a,b,c)}{h}$$

On parle alors de ***dérivée partielle par rapport à*** x (respectivement par rapport à y ou par rapport à z). Le symbole ∂ remplace le d des « différences infinitésimales » afin de bien insister sur le fait que la fonction que l'on dérive dépend de plusieurs variables et que l'on dérive partiellement par rapport à l'une d'entre elles.

Ex. 5.18 Calculer la dérivée de $g : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Trouver une primitive G de g, c'est-à-dire une fonction vérifiant $G' = g$.

Cor. 5.18

Ex. 5.19 Calculer les dérivées partielles de
$h : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy - \dfrac{y}{x}$ pour $x \neq 0$.

Cor. 5.19

Ex. 5.20 Calculer les dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.

Cor. 5.20

III.4. Propriétés des fonctions dérivables

On rappelle que I est un ***intervalle réel contenant une infinité de points***.

Proposition 5.27 (Fonction constante)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. La fonction f est constante sur I si et seulement si sa dérivée f' est nulle sur I.

Proposition 5.28 (Variation et dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur I.

- Si $f' \geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
- Si $f' \leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.

Définition 5.29 (Zéro isolé d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que $x_0 \in I$ est un ***zéro isolé de*** f si

- $f(x_0) = 0$;
- il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $x_0 \in J$ et tel que f ne s'annule pas sur $J \backslash \{x_0\}$.

Proposition 5.30 (Condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ ***continue et dérivable*** sur I. Alors f est strictement monotone si et seulement si f' est de signe constant sur I et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide.

Remarque

La condition donnée dans la proposition 5.30 s'interprète (et s'utilise) de la façon suivante :

- la dérivée f' est de signe constant, donc la fonction est monotone ;
- si de plus f' ne s'annule qu'en des ***points isolés*** alors la fonction est strictement monotone.

Ex. 5.21 Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \sin(x) \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective.

III.5. Étude pratique des fonctions

Définition 5.31 (Asymptotes à une représentation graphique)

- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $x_0 \in \mathbb{R}$ ouvert en x_0 et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est appelée ***asymptote verticale*** $\mathcal{C}_f$.
- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $\pm\infty$ et si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = y_0$ est appelée ***asymptote horizontale*** $\mathcal{C}_f$.
- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $\pm\infty$ et s'il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax - b = 0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est appelée ***asymptote oblique*** $\mathcal{C}_f$.

Méthode : Étude et représentation graphique d'une fonction f

1) On commence, s'il n'est pas donné, par obtenir l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2) On cherche les symétries (parité, périodicité...), on réduit l'intervalle d'étude.
3) On cherche l'***ensemble de dérivabilité*** c'est-à-dire l'ensemble des réels x pour lesquels le nombre dérivé $f'(x)$ est défini.
4) On calculer f', éventuellement on cherche à prolonger cette dérivée aux points où elle n'était pas ***à priori*** définie.
5) On étudie le signe de $f'(x)$ puis on dresse le ***tableau de variations de*** f : sur la première ligne, les valeurs particulières de x obtenues aux étapes précédentes ; sur la seconde, le signe de $f'(x)$ et sur la troisième, les variations de f.
6) On complète le tableau de variations par les images et les limites éventuelles de f.
7) On construit la représentation graphique et on y place :
   - les points où la dérivée s'annule pour lesquels la tangente à la courbe est horizontale ;
   - les asymptotes ;
   - éventuellement quelques tangentes, notamment lorsqu'on connaît en un point la valeur de la fonction et la valeur ou la limite de sa dérivée.

Ex. 5.22 Étudier la fonction $L : x \mapsto \dfrac{2\ln(x)}{\ln(x^2+1)}$ après avoir déterminé son ensemble de définition.
Tracer une représentation graphique rapide.

Ex. 5.23 Étudier la fonction $S : x \mapsto \dfrac{2e^x}{1+e^x} - 1$ après avoir déterminé son ensemble de définition.
[***Indication*** : il peut être utile de chercher à savoir si S possède des symétries...]
Tracer une représentation graphique rapide.

Ex. 5.24 Soit $R : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array} \right.$.

1) R admet-elle des symétries ?

2) Étudier le sens de variations de R.
3) Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_R$.
4) Tracer une représentation graphique rapide de R.

Ex. 5.25 Les fonctions L, S R des exercices précédents sont-elles bornées ? possèdent-t-elles des extremums sur $\mathbb{R}$?

Méthode : Montrer qu'une fonction $f : I \to J$ dérivable est bijective

D'après la proposition 5.20, on vérifie que

- la dérivée f' est de signe constant sur I et ne s'annule qu'en des points isolés ;
- les limites ou les valeurs de f aux bornes de I donnent bien les bornes de J : $f(I) = J$.

Pour obtenir une expression de la bijection réciproque f^{-1}, on tente de résoudre l'équation l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x.
Si on parvient à le faire, on obtient alors $x = f^{-1}(y)$, c'est-à-dire une expression de la bijection réciproque.

Ex. 5.26 Les fonctions L, S R sont-elles bijectives ?
Si oui, de quel intervalle sur quel intervalle ? donner une expression de leur bijection réciproque.

Résoudre une inéquation/démontrer une inégalité

Pour résoudre une inéquation (ou démontrer une inégalité) du type $A(x) \geqslant B(x)$:

1) on peut éventuellement utiliser les propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ en partant d'inégalités satisfaites par hypothèses ou déjà démontrées ;
2) ***sinon, on commence par obtenir son ensemble de définition***.
Ensuite, ***on écrit*** $A(x) \geqslant B(x) \Leftrightarrow A(x) - B(x) \geqslant 0$ afin de se ramener à ***l'étude du signe de*** $A(x) - B(x)$.
Puis :
   - il est souvent fructueux d'utiliser la règle selon laquelle « le signe d'un produit est le produit des signes » en ***faisant un tableau de signes*** ;
   - étudier le signe des expressions entre valeurs absolues puis ***faire un tableau de signes*** permettant d'envisager tous les cas possibles se révèle souvent synthétique et efficace ;
   - il peut être intéressant d'étudier la fonction $A - B$ pour montrer qu'elle passe par un minimum (ou par un maximum suivant les cas).

Ex. 5.27 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$$

Ex. 5.28 Résoudre l'inéquation d'inconnue x réelle :

$$(I) : \frac{2e^x}{e^x + 1} - 1 > \frac{-1}{2}$$

III.6. Primitives d'une fonction continue

Définition 5.32

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que F est une ***primitive*** de f sur I si F est dérivable sur I et si $F' = f$.

Proposition 5.33 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction $F : \left\{\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}\right.$ est l'unique primitive de f s'annulant en a et toute primitive de f s'écrit $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Corollaire 5.34

Si f est continue sur $[a; b]$, alors elle admet une infinité de primitives sur $[a; b]$ et quelle que soit la primitive F choisie, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ noté $[F(t)]_a^b$.

IV. Correction des exercices

Cor. 5.8 : On a $|x+1| = x+1 \Leftrightarrow x \geqslant -1$ et $|x-3| = x-3 \Leftrightarrow x \geqslant 3$. On en déduit que l'inégalité à résoudre est donnée suivant la valeur de x par le tableau suivant :

Valeur de x	-1	3	
Inégalité à résoudre	$-x-1-x+3<6$	$x+1-x+3<6$	$x+1+x-3<6$

Sur $]-\infty; -1]$, l'inégalité équivaut donc à $-2x+2<6$ d'où un premier ensemble de solutions $S_1 =]-2; -1]$. De même, sur $[-1; 3]$, l'inégalité devient $4 < 6$ qui est trivialement vraie d'où $S_2 = [-1; 3]$. Enfin, sur $[3; +\infty[$, on résout $2x < 8$ qui conduit à $S_3 = [3; 4[$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est $]-2; 4[$.

Cor. 5.9 : On distingue plusieurs cas :

- si x et y sont positifs, alors l'inégalité à démontrer est $\dfrac{x+y}{1+x+y} \leqslant \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{y}{1+y}$ qui est équivalente à $(x+y)(1+x)(1+y) \leqslant x(1+y)(1+x+y) + y(1+x)(1+x+y)$. En développant partiellement le membre de droite, cette inégalité devient $(x+y)(1+x)(1+y) \leqslant x(1+y)(1+x) + xy(1+y) + y(1+x)(1+y) + xy(1+x)$ c'est-à-dire après simplification $xy(2+x+y) \geqslant 0$. Or cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$.
- si $-x \leqslant y \leqslant 0$, alors $0 \leqslant x+y \leqslant x$.
  Donc $g(x+y) = \dfrac{x+y}{1+x+y} = \dfrac{x+y+1-1}{1+x+y} = 1 - \dfrac{1}{1+x+y} \leqslant 1 - \dfrac{1}{1+x} = g(x)$.
  La fonction g étant positive, on a a fortiori $g(x+y) \leqslant g(x) + g(y)$.
- les autres cas se ramènent aux précédents en échangeant le rôle de x et y et en utilisant la parité de g. Par exemple, pour $y \leqslant -x \leqslant 0$, on a $g(x+y) = g(-x-y) \leqslant g(-y)$ d'après le cas précédent, etc.

Cor. 5.16 : f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Il suffit donc de montrer qu'elle est strictement monotone et que $f(\mathbb{R}) =]1; +\infty[$.

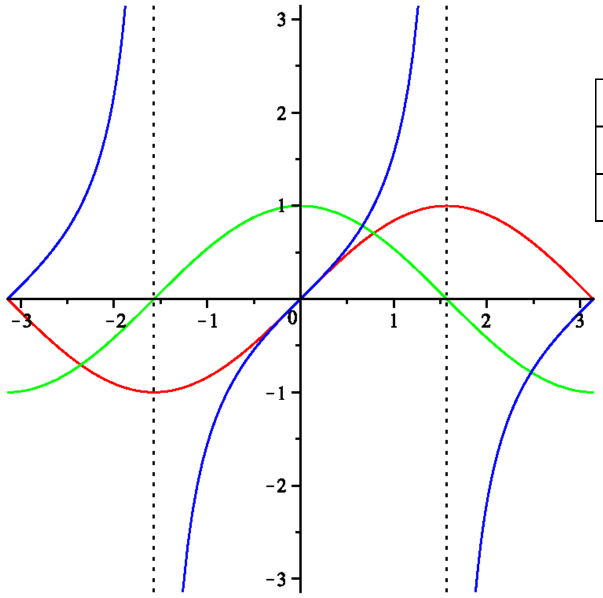
Or, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2e^{2x} + e^x > 0$.

Donc f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})$ est donc un intervalle et
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Donc $f(\mathbb{R}) =]1; +\infty[$ et f est bien une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]1; +\infty[$.

Synthèse sur les notions d'analyse censées être connues

V. Fonctions de référence

Fonctions trigonométriques



$$\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos$$

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

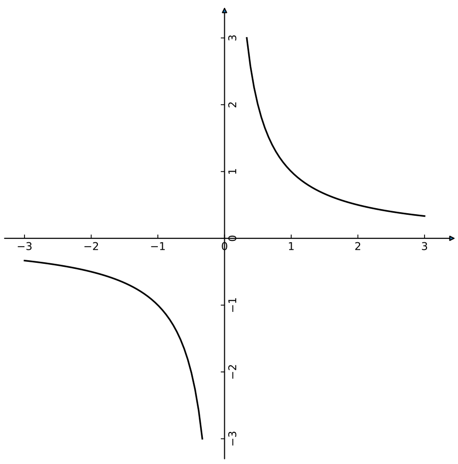
$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $-\sin(x)$	0	$+$	0	$-$	0
Variations de cos	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\cos(x)$					
Variations de sin					

Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\frac{1}{\cos^2(x)}$					
Variations de tan					

Fonction « inverse »



Strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ ***mais pas sur*** $\mathbb{R}^*$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

Permet de retenir les limites :

$$\frac{1}{-\infty} = 0^- \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

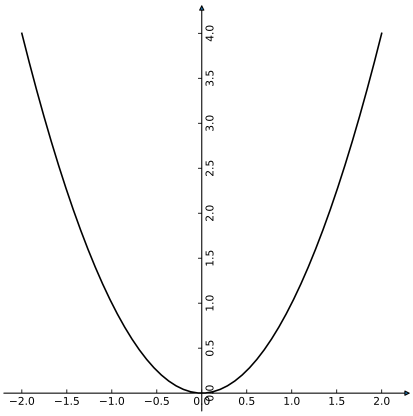
$$\frac{1}{+\infty} = 0^+ \qquad \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Plus précisément :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^- \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Fonction « carré »



Strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

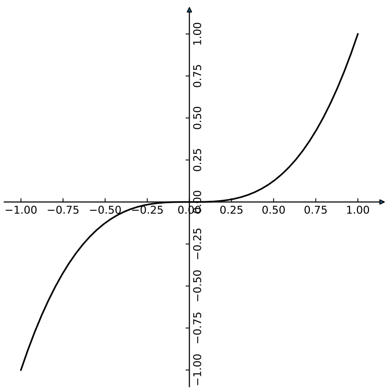
Strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$(x^2)' = 2x$

Limites :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Fonction « cube »



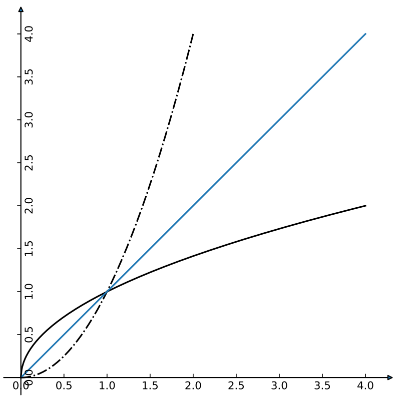
Strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$(x^3)' = 3x^2$

Limites :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Fonction « racine carrée »



Strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Continue sur $\mathbb{R}_+$ ***mais dérivable sur*** $\mathbb{R}_+^*$.

$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

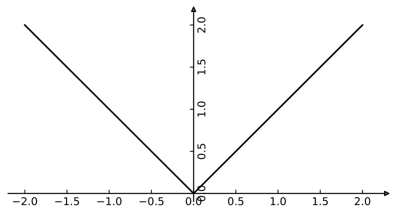
C'est la bijection réciproque de

$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$.

Limite :

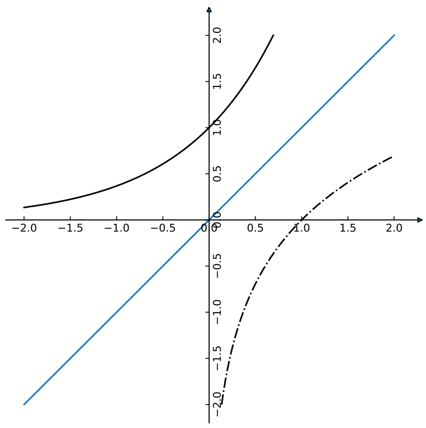
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Fonction « valeur absolue »



Strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
Strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Continue sur $\mathbb{R}$ ***mais dérivable sur*** $\mathbb{R}_-^*$ ***et*** $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, (|x|)' = -1$
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (|x|)' = +1$
$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x}^2 = x$.
Limites :
$\lim\limits_{x \to -\infty} |x| = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} |x| = +\infty$

Fonctions exponentielle et logarithme (népérien)



$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$	$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
Bijective, strictement croissante sur $\mathbb{R}$	Bij. réciproque de exp. Strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$	$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)} = x$
$\exp' = \exp$	$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Limites

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

VI. Limites, dérivées

VI.1. Limites

Proposition 5.35 (Somme de fonctions)

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}$	$\alpha + \alpha'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	???
$-\infty$	$-\infty$	???	$-\infty$

Proposition 5.36 (Produit de fonctions)

$\lim_{x\to a} f(x)$ \ $\lim_{x\to a} g(x)$	$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$	$\alpha \in \mathbb{R}_-^*$	$\alpha = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}_+^*$	$\alpha\alpha'$	$\alpha\alpha'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}_-^*$	$\alpha\alpha'$	$\alpha\alpha'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\alpha' = 0$	0	0	0	???	???
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	???	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	???	$-\infty$	$+\infty$

Méthode : Calcul de limite

- On utilise les tableaux précédents et les limites des fonctions de référence : dans le cas où cela donne la limite cherchée, ***on donne directement cette limite sans justification***.
- Dans les tableaux précédents, les cases où se trouve ??? sont des ***formes indéterminées*** (FI) : dans ce cas, il faut « lever l'indétermination ».
- Pour lever une indétermination, il y a plusieurs techniques :
  - ⋆ simplifier les expressions ;
  - ⋆ factoriser les expressions conduisant à une FI par leur ***terme prépondérant*** ;
  - ⋆ dans le cas d'expressions faisant intervenir une racine carrée, multiplier et diviser par « l'expression conjuguée » ;
  - ⋆ théorème des gendarmes ;
  - ⋆ interpréter la limite comme étant ***la dérivée d'une fonction en un point*** ;
  - ⋆ utiliser les « ***limites comparées*** » (que nous verrons plus tard dans l'année).

Exemples : calculer les limites suivantes (une seule de ces limites n'existe pas)

$A = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 3}$ $\quad B = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 + x^3}{x + x^2}$ $\quad C = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{-5 + \frac{1}{x^2}}$ $\quad D = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\ln^2(x) + 1}$

$E = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$ $\quad F = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ $\quad G = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$ $\quad H = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x - 1}$

$I = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}$ $\quad J = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(x)$ $\quad K = \lim\limits_{x\to 0} x\sin(x)$

VI.2. Dérivées

- Les formules $\big(cte\big)' = 0$, $\big(x\big)' = 1$, $\big(x^2\big)' = 2x$, $\big(x^3\big)' = 3x^2$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$, $\big(\sqrt{x}\big)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sont toutes résumées par l'unique formule
  $(x^n)' = nx^{n-1}$
- Soient λ, μ deux réels, u, v deux fonctions dérivables.
  $\big(\lambda u + \mu v\big)' = \lambda u' + \mu v'$ $\quad \big(uv\big)' = u'v + uv'$ $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
  $(e^u)' = u' \times e^u$ $\quad \big(\ln(u)\big)' = u' \times \dfrac{1}{u}$ $\quad \left(\dfrac{1}{u}\right)' = u' \times \dfrac{-1}{u^2}$ $\quad \big(\sqrt{u}\big)' = u' \times \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$
  $(u^2)' = u' \times 2u$ $\quad (u^3)' = u' \times 3u^2$...

Maths - Chapitre 6

Nombres complexes : équations et géométrie

I. Utilisations en géométrie

Les formules concernant le module et l'argument des nombres complexes permettent une grande variété d'applications géométriques. Nous en donnons ici quelques exemples.
On rappelle que le plan est rapporté à un repère $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ ***orthonormal direct*** et que l'affixe d'un point $M(x; y)$ dans ce repère est le complexe $z = x + iy$.

I.1. Angle de vecteurs

Proposition 6.1

Étant donnés deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives z et z' on a
$(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \operatorname{Arg}(\bar{z}z')\,[2\pi]$
où $(\vec{u}; \vec{v})$ désigne l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration

Corollaire 6.2 (Vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont colinéaires si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}$.

Corollaire 6.3 (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont orthogonaux si et seulement si $\bar{z}z' \in i\mathbb{R}$.

Corollaire 6.4 (Points alignés)

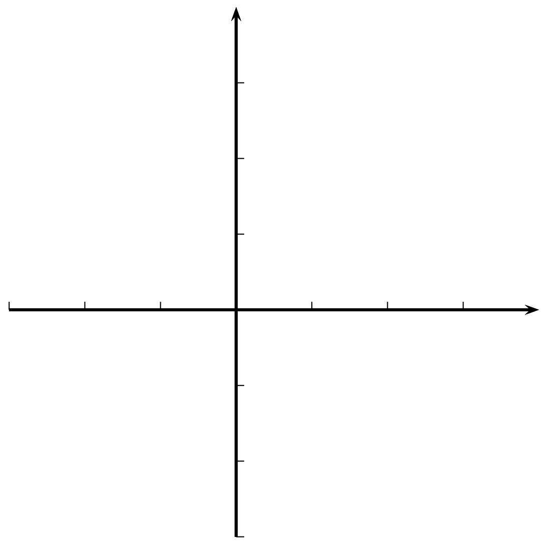
Trois point $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ sont alignés si et seulement si $(\overline{z_A} - \overline{z_B})(z_A - z_C) \in \mathbb{R}$.

I.2. Transformations du plan complexe

On identifie les points du plan et leur affixe, et les vecteurs du plan et leur affixe.
Autrement dit, pour $z \in \mathbb{C}$

- « le point z du plan complexe » signifie « le point M du plan d'affixe z » ;
- « le vecteur z du plan complexe » signifie « le vecteur $\vec{v}$ du plan d'affixe z ».

- Soit $c \in \mathbb{C}$. La transformation $z \mapsto z + c$ du plan complexe est
  ....
  ....
- La transformation $z \mapsto \bar{z}$ du plan complexe est
  ....
  ....
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. La transformation $z \mapsto \lambda z$ du plan complexe est
  ....
  ....
- Soit $u \in \mathbb{U}$. La transformation $z \mapsto uz$ est
  ....
  ....



Ex. 6.1 (Cor.) Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexe.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que ABC soit un triangle équilatéral ***direct***.
2) Montrer que cette condition est équivalente à $a + jb + j^2c = 0$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
3) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ABC soit un triangle équilatéral.
4) Existe-t-il des triangles équilatéraux à coordonnées entières ?
   [***Indication*** : on admettra que $\sqrt{3}$ est irrationnel.]

II. Utilisations en algèbre

II.1. Racine *réelle* n-ième d'un *réel positif*

Proposition 6.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n \in \mathbb{R}_+$ est bijective.

Démonstration

Définition 6.6 (Fonction racine n-ième)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$$

est la bijection réciproque de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n \in \mathbb{R}_+$.

II.2. Racines complexes n-ièmes de l'unité

Théorème 6.7 (Racines n-ièmes de l'unité)

Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z \in \mathbb{C}, z^n = 1$ possède exactement n racine(s), toutes de module 1. L'ensemble des solutions de cette équation est $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!] \right\} \subset \mathbb{U}$.

Démonstration

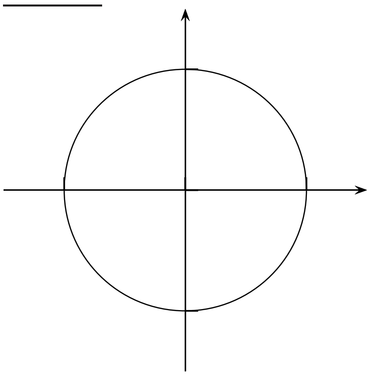
Important !

- Nous venons de voir que $n\theta \equiv 0\,[2\pi] \Leftrightarrow \theta$ ....
- D'après le théorème précédent, l'application $\begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^n \end{cases}$ ***n'est pas une bijection*** si $n > 1$ (puisque 1 a n antécédents).

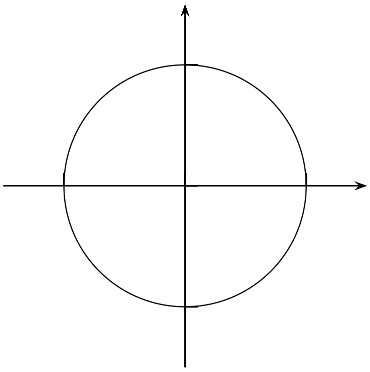
  En conséquence, elle ***n'admet pas de bijection réciproque***.

  La fonction $y \mapsto \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ est ***définie uniquement sur*** $\mathbb{R}_+$.

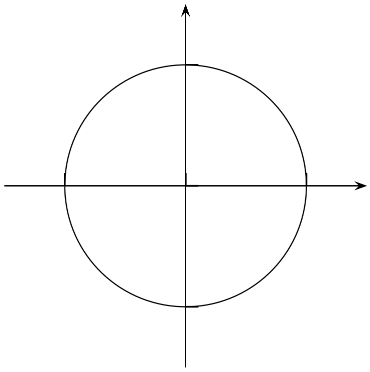
Ex. 6.2 Placer les racines complexes n-ièmes de l'unité dans les cas suivants



Racines cubiques : $n = 3$



Racines quatrièmes : $n = 4$



Racines sixièmes : $n = 6$

Méthode

Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{C}^*$, l'équation $z^n = c$ a exactement n solutions.
Pour la résoudre, on procède de la façon suivante

- on écrit c sous forme trigonométrique : $\exists! \rho \in \mathbb{R}_+^*, \exists \gamma \in \mathbb{R}, c = \rho e^{i\gamma}$;
- on en déduit $|z|$: $|z^n| =$ ....
- on termine en explicitant les différentes valeurs possibles pour $\theta = \arg(z)$:
  $z^n = c \Leftrightarrow$ ....

Ex. 6.3 Résoudre l'équation $z^3 = 1 + i$

Cor. 6.3

II.3. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Théorème 6.8

Étant donnés $a \neq 0$, b et c ***trois nombres complexes***, l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et de discriminant $\Delta = b^2-4ac$ possède :

- une solution ***double*** $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$;
- deux solutions distinctes $z_\pm = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ si $\Delta = \delta^2 \neq 0$.

Démonstration

Méthode

Pour résoudre une équation du second degré à ***coefficients complexes*** :

- on calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac$;
- si $\Delta = 0$, on a immédiatement la solution double ;
- si $\Delta \neq 0$, on cherche la partie réelle et la partie imaginaire de l'un des deux complexes δ vérifiant $\delta^2 = \Delta$ en résolvant le système $\begin{cases} \delta^2 & = \Delta \\ |\delta|^2 & = |\Delta| \end{cases}$ c'est-à-dire en adaptant au cas $n=2$ la méthode de résolution des équations du type $z^n = c$.

Ex. 6.4 Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2-(1+5i)z-2(1-i)=0$.

Cor. 6.4

II.4. Relations coefficients-racines

Théorème 6.9

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ avec $a \neq 0$, b et c ***trois nombres complexes*** alors

$\forall z \in \mathbb{C}, az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2), \qquad z_1+z_2 = -\dfrac{b}{a}, \qquad z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$

Démonstration

II.5. Factorisation d'un polynôme

Définition 6.10 (Polynôme)

On appelle ***polynôme*** à coefficients réels (ou complexes) toute expression $P(x)$ du type

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $(a_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une famille de nombres réels (ou complexes).

Le plus petit entier $k \in [\![0;n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$ est appelé ***degré du polynôme*** $P(x)$.
Le degré du polynôme nul ($P = 0$) est par convention égal à $-\infty$.
Souvent, la variable x n'est pas écrite : on parle simplement du ***polynôme*** P.

Théorème 6.11

Soit P un polynôme à coefficients réels ou complexes et a une racine (réelle ou complexe) de P.
Autrement dit, soit a tel que $P(a) = 0$.
Alors il existe un polynôme Q tel que $P = (X - a)Q$.

Démonstration

Méthode : Résolution des équations polynomiales de degré supérieur à 3

Le théorème précédent permet d'affirmer que si on connaît une solution a d'une équation polynomiale

$$P(x) = 0$$

alors on peut réécrire cette équation $(x - a)Q(x) = 0$.
Ceci conduit à la méthode suivante : pour résoudre une équation polynomiale de degré supérieur à 3

- on cherche une « racine évidente » a de l'équation $P(x) = 0$;
- on factorise P de sorte à ce que l'équation devient $(x - a)Q(x) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = a \\ \textbf{ou} \\ Q(x) = 0 \end{array} \right.$
- on recommence le même procédé sur l'équation $Q(x) = 0$.

Ex. 6.5 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $(E)\quad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$.

II.6. Propriétés de l'exponentielle complexe

Nous avons défini page 45 l'exponentielle complexe par $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = e^{\mathcal{R}e(z)} \times e^{i\mathcal{I}m(z)}$.
En voici quelques propriétés :

Propriété 6.12 (Propriétés de l'exponentielle complexe)

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$:

- $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$
- $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $\dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$

- $$\begin{aligned} e^z = 1 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi \\ &\Leftrightarrow z \equiv 0\,[2i\pi] \end{aligned}$$
- $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z \equiv z'\,[2i\pi]$

Propriété 6.13

$\forall z \in \mathbb{C}$,

- $|e^z| = e^{\mathcal{R}e(z)}$;
- $\arg(e^z) \equiv \mathcal{I}m(z)\,[2\pi]$.

Démonstration

Important !

L'équation $e^z = c \in \mathbb{C}^*$ possède une infinité de solutions complexes, la partie imaginaire de z étant définie à 2π près.

Méthode : Équations du type $e^z = c \in \mathbb{C}^*$

La propriété précédente donne une méthode de résolution des équations du type $e^z = c \in \mathbb{C}^*$: en effet, résoudre l'équation revient à résoudre le système

$$\begin{cases} |e^z| & = \quad e^{\mathcal{R}e(z)} = |c| \\ \arg(e^z) & \equiv \quad \mathcal{I}m(z) \equiv \arg(c)\,[2\pi] \end{cases}$$

Ex. 6.6 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$(E_1) : e^z = -7 \qquad (E_2) : e^z = 5 - 12i$

Cor. 6.6

III. Correction des exercices

Cor. 6.1 :

1) ABC est équilatéral direct si et seulement si C est l'image de B dans la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   Donc ABC est équilatéral direct si et seulement si $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.
2) À partir de l'équation précédente, on obtient :
   $$\begin{aligned} c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) &\Leftrightarrow \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)a - e^{i\frac{\pi}{3}}b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0 \end{aligned}$$
3) ABC est un triangle équilatéral si et seulement si c'est un triangle équilatéral ***direct OU indirect***. D'où :
   ABC est un triangle équilatéral$\Leftrightarrow (a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc) = 0$.
   En développant on obtient
   ABC est un triangle équilatéral$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$.

4) Traitons uniquement le cas direct, le cas indirect étant obtenu par permutation de deux sommets du triangle.
Supposons que b et c soient à parties réelles et imaginaires entières, alors
$$a = -jb - j^2c = \begin{array}{l} \dfrac{-\mathcal{R}e\,(b) + \sqrt{3}\mathcal{I}m\,(b) - \mathcal{R}e\,(c) - \sqrt{3}\mathcal{I}m\,(c)}{2} \\ +i\dfrac{\mathcal{I}m\,(b) - \sqrt{3}\mathcal{R}e\,(b) + \mathcal{I}m\,(c) + \sqrt{3}\mathcal{R}e\,(c)}{2} \end{array}$$
Donc, pour que $\mathcal{R}e\,(a)$ soit entier, il est nécessaire que $\mathcal{I}m\,(b) = \mathcal{I}m\,(c)$ (car $\sqrt{3}$ est irrationnel).
De même, pour que $\mathcal{I}m\,(a)$ soit entier, il est nécessaire que $\mathcal{R}e\,(b) = \mathcal{R}e\,(c)$.
Donc les seuls triangles équilatéraux à coordonnées entières sont ceux réduits à un point !

Fonctions de référence

I. Fonctions usuelles

I.1. Logarithmes, exponentielle

a) Logarithmes

Définition 7.1 (Logarithme népérien)

D'après la proposition 5.33, la fonction $f : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ admet une unique primitive qui s'annule en 1. Elle se note ln et s'appelle la fonction ***logarithme népérien***.

Remarque

- La fonction $F : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \ln|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x}$. C'est évident sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, $F'(x) = -\dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.
- On utilise souvent en physique, chimie et sciences de l'ingénieur la fonction ***logarithme décimal*** notée $\log_{10}$ ou plus simplement log et définie par $\log_{10} : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10} \in \mathbb{R}$.

Propriété 7.2 (Propriétés opératoires)

- Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- Pour $a \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

Démonstration

Propriété 7.3 (Variation, limites)

La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Démonstration

Corollaire 7.4

La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Notation

On note e l'unique réel tel que $\ln(e) = 1$. Approximativement, $e \simeq 2,7$.

Ex. 7.1 Établir, pour $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.

Cor. 7.1

Ex. 7.2 Montrer que, pour $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.

En déduire que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) < S_n < 1 + \ln(n)$.

Cor. 7.2

b) Exponentielle

Définition 7.5 (Exponentielle)

La fonction exponentielle, notée exp, est la bijection réciproque de la fonction ln.

Remarque

Pour tout entier relatif n, on a $\ln(e^n) = n\ln(e) = n = \ln(\exp(n))$. On en déduit, ln étant injective, que $\exp(n) = e^n$. On généralise en notant, pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$.

Propriété 7.6 (Dérivée de l'exponentielle)

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration

Propriété 7.7 (Propriétés opératoires)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

- $e^{x+y} = e^x e^y$ (équation fonctionnelle).
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

Démonstration

Ex. 7.3 (Cor.) Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\exp\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \exp(a_i)$.

Ex. 7.4 Établir, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Cor. 7.4

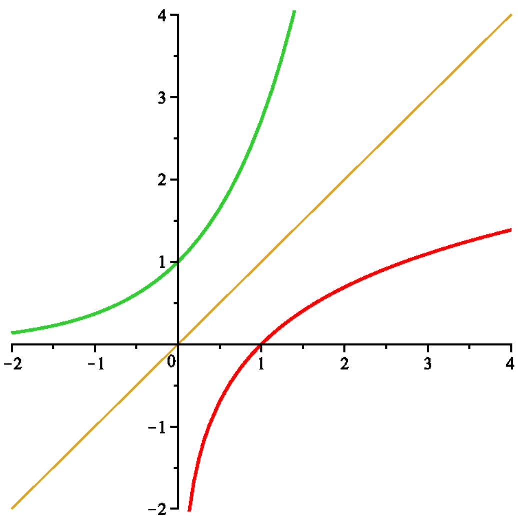
Ex. 7.5 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{k/n}}{n} \geqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$

puis que $e \geqslant \dfrac{5}{2}$.

c) Synthèse et représentations graphiques

Exponentielle et logarithme



Valeur de x	$-\infty$ 0 $+\infty$
Signe de $\exp(x)$	
Variations de exp	

Valeur de x	$-\infty$ 0 $+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	
Variations de $\ln\|x\|$	

I.2. Puissances

Définition 7.8 (Fonctions puissances)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance α, notée p_α, est définie par $p_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{cases}$.

Remarque

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la fonction p_α est définie sur $\mathbb{R}$ et pour $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ elle est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour toute autre valeur de α, la fonction p_α est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge pour $\alpha > 0$ par continuité par 0 en 0.
- ***Il est très important de retenir que, par définition,***

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = e^{b \ln a}.$$

Dans la plupart des problèmes faisant intervenir des puissances d'exposant non entier, c'est la seconde expression qui permet de parvenir au résultat.

Propriété 7.9 (Dérivée)

L'application p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration

Propriété 7.10 (Propriétés opératoires, variations, limites)

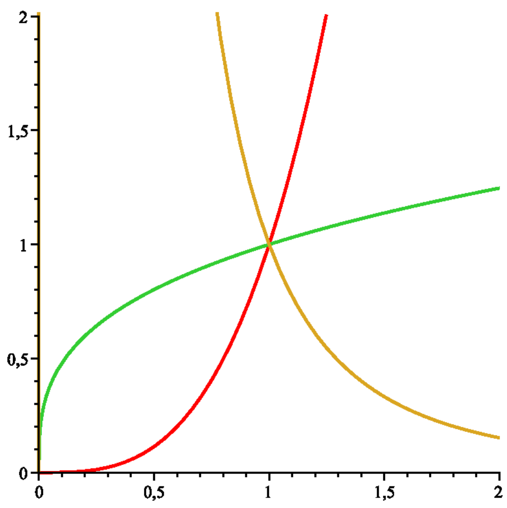
- Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.
- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tous $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ et $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
- Si $\alpha < 0$, p_α est strictement décroissante, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$.
- Si $\alpha > 0$, p_α est strictement croissante, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$.
- Si $\alpha = 0$, p_0 est la fonction constante à 1.

Démonstration

Remarque

La fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ prolongée par 0 en 0 vérifie, pour tout $x \geqslant 0$, $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x$. C'est donc la bijection réciproque de la fonction carrée restreinte à $\mathbb{R}_+$: c'est la fonction racine carrée.

Fonctions puissance



$\alpha \geqslant 1$:

Valeur de x	$0 \qquad 1 \qquad +\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$	
Variations de x^α	

$0 \leqslant \alpha < 1$:

Valeur de x	$0 \qquad 1 \qquad +\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$	
Variations de x^α	

$\alpha < 0$:

Valeur de x	$0 \qquad 1 \qquad +\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$	
Variations de x^α	

I.3. Croissances comparées

Lemme 7.11 (Lemme fondamental)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Démonstration

Proposition 7.12 (Croissances comparées)

- Pour tous réels strictement positifs α et β, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$$

- Pour tout réel a strictement supérieur à 1 et tout réel α, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x |x|^\alpha = 0$$

Démonstration

Méthode : Fonction du type u^v

Soit $u : D \to \mathbb{R}_+^*$ et $v : D \to \mathbb{R}$. Pour étudier $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto u(x)^{v(x)}$, on écrira,

$$\forall x \in D, f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

Ex. 7.6 (Cor.) [**] Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $x^y + y^x > 1$.

Ex. 7.7 On rappelle que nous avons démontré, à l'exercice 7.2, que
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

I.4. Fonctions circulaires

Voir chapitre 4.

I.5. Fonctions circulaires réciproques

La restriction $\sin_{|[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ de la fonction sinus est strictement croissante, donc injective (d'après la proposition 5.18) ; de plus, $\sin(\frac{-\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. $\sin_{|[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ est donc une bijection continue de $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$.
De même, $\cos_{|[0,\pi]}$ est une bijection continue strictement décroissante de $[0, \pi] \to [-1, 1]$ et $\tan_{|]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ une bijection continue strictement croissante de $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

Définition 7.13 (Arcsinus, arccosinus, arctangente)

- Arcsinus, notée Arcsin, est la bijection réciproque de la fonction $\sin_{|[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$:

$$\text{Arcsin} : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto \sin^{-1}_{|[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x) \end{cases}$$

- Arccosinus, notée Arccos, est la bijection réciproque de la fonction $\cos_{|[0,\pi]}$:

$$\text{Arccos} : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow [0,\pi] \\ x & \longmapsto \cos^{-1}_{|[0,\pi]}(x) \end{cases}$$

- Arctangente, notée Arctan, est la bijection réciproque de la fonction $\tan_{|]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$:

$$\text{Arctan} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto \tan^{-1}_{|]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}(x) \end{cases}$$

Propriété 7.14 (Équations trigonométriques)

- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\text{Arcsin}x) = x$ et $\cos(\text{Arccos}x) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\text{Arctan}x) = x$.
- Pour tout $y \in [-1,1]$, l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de
  $\sin(x) = y$ est $S_1 = \{\text{Arcsin}\, y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \text{Arcsin}\, y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
  $\cos(x) = y$ est $S_2 = \{\text{Arccos}\, y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\text{Arccos}\, y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\tan(x) = y$ a pour ensemble de solutions $\{\text{Arctan}\, y + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Propriété 7.15

- Arcsin est impaire, strictement croissante et continue sur $[-1,1]$.
- Arccos est strictement décroissante et continue sur $[-1,1]$.
- Arctan est impaire, strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
  De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{Arctan}(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration

I.6. ATTENTION : composition des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques

Important ! Bijections réciproques de restrictions

Les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan ***ne sont pas*** les réciproques de sin, cos ou tan, mais celles de restrictions bien choisies. Ceci engendre quelques difficultés. Par exemple :

- $\text{Arcsin}(\sin x) = x$ si et seulement si $x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$;

- $\text{Arcsin}\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  On fera également attention pour $\text{Arccos}(\cos x)$ et $\text{Arctan}(\tan x)$.

Méthode : Simplification des composées de fonctions circulaires et réciproques

- $\forall x \in [-1;1], \left| \begin{array}{l} \sin(\text{Arcsin}(x)) = x \\ \cos(\text{Arccos}(x)) = x \end{array} \right.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x$
- $\text{Arccos}(\cos(x)) = x \Leftrightarrow x \in [0;\pi]$: autrement dit, $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$ si et seulement si x est dans l'intervalle $[0;\pi]$. En dehors de cet intervalle, on utilise les propriétés $\cos(-x) = \cos(x)$ et cos périodique de période 2π.
- $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$: autrement dit, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$ si et seulement si x est dans l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. En dehors de cet intervalle, on utilise les propriétés $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et sin périodique de période 2π.
- $\text{Arctan}(\tan(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: autrement dit, $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$ si et seulement si x est dans l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. En dehors de cet intervalle, on utilise la propriété tan périodique de période π.
- Enfin, on a démontré les propriétés suivantes :

  $\forall x \in [-1;1], \left| \begin{array}{l} \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$

Ex. 7.8 Simplifier $\text{Arccos}(\cos x)$, $\text{Arcsin}(\sin x)$ et $\text{Arctan}(\tan x)$ si $x \in [\pi, 2\pi]$.

Cor. 7.8

Ex. 7.9

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin(x)$.
2) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \left[\frac{-\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$.
   Simplifier $\text{Arcsin}(\sin(x))$.
3) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $x \in [k\pi; \pi + k\pi]$.
   Simplifier $\text{Arccos}(\cos(x))$.
4) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \left]\frac{-\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.
   Simplifier $\text{Arctan}(\tan(x))$.

I.7. Dérivées des fonctions circulaires réciproques

Nous allons utiliser le théorème 5.26 pour obtenir une expression de la dérivée des fonctions Arccos, Arcsin et Arctan.

Lemme 7.16

Pour $x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ et $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

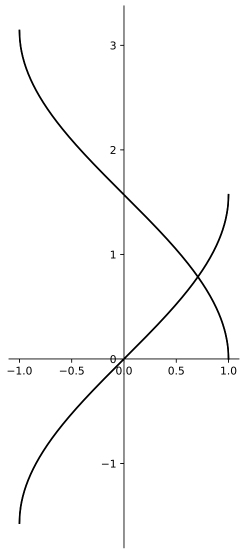
Démonstration

Propriété 7.17 (Dérivabilité)

- Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $\text{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

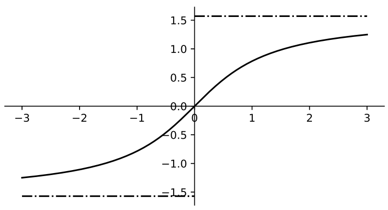
Démonstration

Fonctions trigonométriques réciproques



Valeur de x	$-1 \quad 0 \quad +1$
Signe de $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
Variation de Arccos	

Valeur de x	$-1 \quad 0 \quad +1$
Signe de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
Variation de Arcsin	



Valeur de x	$-\infty \quad 0 \quad +\infty$
Signe de $\dfrac{1}{1+x^2}$	
Variation de Arctan	

Ex. 7.10 Montrer que $2\,\text{Arctan}\,\frac{1}{2} = \text{Arctan}\,\frac{4}{3}$.

Cor. 7.10

Ex. 7.11 Simplifier les expressions $\sin(2\,\text{Arcsin}(x))$, $\cos^2\left(\frac{1}{2}\,\text{Arccos}\,x\right)$ et $\cos(\text{Arctan}\,x)$.

Cor. 7.11

Ex. 7.12 Montrer que pour tout $x \in [-1,1], \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Cor. 7.12

Ex. 7.13 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$. Qu'en est-il si $x \in \mathbb{R}_-^*$?

Cor. 7.13

Remarque

L'exercice 7.13 précédent montre notamment qu'une fonction peut être dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ ***sans pour autant être constante sur*** $\mathbb{R}^*$***.***

En effet, le théorème 5.27 énonçant l'équivalence ($f' = 0 \Leftrightarrow f = cte$) n'est valable ....!

Ex. 7.14 (Cor.) Simplifier lorsque c'est possible $\operatorname{Arccos}(1 - 2x^2)$.

I.8. Valeurs particulières des fonctions circulaires et de leurs réciproques

Remplir les deux tableaux suivants :

Valeur de x	Valeur de $\cos(x)$
0	
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{3\pi}{4}$	
$\frac{5\pi}{6}$	
π	
Valeur de	Valeur de u

Valeur de x	Valeur de $\sin(x)$	Valeur de $\tan(x)$
$\frac{-\pi}{2}$		
$\frac{-\pi}{3}$		
$\frac{-\pi}{4}$		
$\frac{-\pi}{6}$		
0		
$\frac{\pi}{6}$		
$\frac{\pi}{4}$		
$\frac{\pi}{3}$		
$\frac{\pi}{2}$		
Valeur de	Valeur de u	//////////
Valeur de	//////////	Valeur de u

I.9. Fonctions hyperboliques

Définition 7.18 (Fonctions hyperboliques)

- La fonction cosinus hyperbolique, notée ch, est définie par $\operatorname{ch} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$.

- La fonction sinus hyperbolique, notée sh, est définie par sh : $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$.

Propriété 7.19

Pour tout réel x, on a $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$, $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x}$ et $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

Démonstration

Remarque

De la même façon que $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ sur le cercle $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$, la troisième formule montre que $t \mapsto (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 1\}$.
Cet ensemble est ***une hyperbole***, ce qui justifie l'adjectif hyperbolique.

Ex. 7.15 Obtenir pour $x \in \mathbb{R}$ des formules de duplication de $\operatorname{ch}(2x)$ et $\operatorname{sh}(2x)$ similaires à celles des fonctions trigonométriques.

Cor. 7.15

Ex. 7.16 (Cor.) Obtenir pour $a, b \in \mathbb{R}$ des formules d'addition de $\operatorname{ch}(a+b)$ et $\operatorname{sh}(a+b)$ similaires à celles des fonctions trigonométriques.

Propriété 7.20 (Dérivées)

Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$.

Démonstration

Propriété 7.21 (Variations, limites)

- L'application ch est paire, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et continue. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{x} = +\infty$ (branche parabolique).
- L'application sh est impaire, strictement croissante et continue. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x} = +\infty$ (branche parabolique).

Démonstration

Ex. 7.17 Calculer les dérivées secondes des fonctions $f : x \mapsto \sin x \operatorname{sh} x$ et $g : x \mapsto \cos x \operatorname{ch} x$.

Cor. 7.17

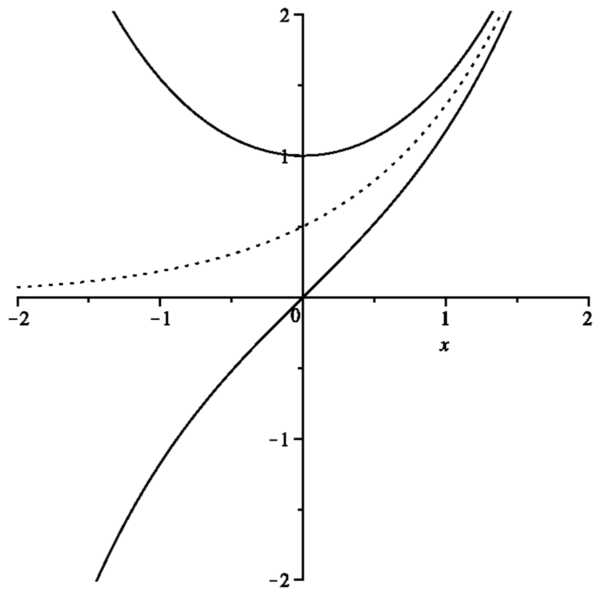
Ex. 7.18 Étudier les variations de $h : x \mapsto \text{sh}x + \cos x$.

Cor. 7.18

Remarque

- On rapporte le plan à un repère orthonormé. Soit $m : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^x}{2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le point $E(x, m(x))$ est le milieu du segment vertical $[S(x, \operatorname{sh} x), C(x, \operatorname{ch} x)]$.
- On montre en mécanique que la courbe représentative de ch épouse la forme d'un fil pesant et homogène suspendu par ses deux extrémités. Pour cette raison, on l'appelle la chaînette.

Fonctions hyperboliques



Valeur de x	$-\infty$ 0 $+\infty$
Signe de $\text{sh}(x)$	
Variations de ch	
Variations de sh	
Signe de $\text{ch}(x)$	

II. Extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Dans ce qui suit, I est un intervalle réel contenant une infinité de points.

II.1. Parties réelle et imaginaire d'une fonction à valeurs complexes

Définition 7.22 (Parties réelle et imaginaire, module)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle et à valeurs complexes.
Il existe un unique couple de fonctions $f_1 : I \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I \to \mathbb{R}$ telles que $f = f_1 + if_2$.
L'application f_1 s'appelle la ***partie réelle*** de f et f_2 s'appelle la ***partie imaginaire*** de f.
L'application $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ s'appelle ***module*** de f.

Notation

On note $f_1 = \mathcal{R}e\,(f)$, $f_2 = \mathcal{I}m\,(f)$ et $|f|$ le module de f.

Définition 7.23 (Fonctions à valeurs complexes bornées)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction.
On dit que f est bornée si $|f|$ est majorée.

Remarque

Cette définition généralise la notion de fonction à valeurs réelles bornée. Cependant, les notions de fonction majorée et de fonction minorée ne s'étendent pas aux fonctions à valeurs complexes.

Ex. 7.19 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour tout x réel par $f(x) = \dfrac{\sin x}{ix + x + 1}$. Calculer l'expression pour $x \in \mathbb{R}$ de $\mathcal{R}e\,(f)\,(x)$ et de $\mathcal{I}m\,(f)\,(x)$.

Cor. 7.19

II.2. Continuité et dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes

Définition 7.24

On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est continue si $\mathcal{R}e\,(f)$ et $\mathcal{I}m\,(f)$ sont continues. De même, on dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable si $\mathcal{R}e\,(f)$ et $\mathcal{I}m\,(f)$ sont dérivables. On pose alors pour tout $x \in I$, $f'(x) = \mathcal{R}e\,(f)'\,(x) + i\mathcal{I}m\,(f)'\,(x)$.
Enfin, on dit que $F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}$ si $F' = f$. On étend de même la notion d'intégrale, en posant pour $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathcal{R}e\,(f)\,(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathcal{I}m\,(f)\,(t)\mathrm{d}t$.

Les formules portant sur la dérivée (ou la continuité) d'une somme, d'un produit ou d'un quotient sont aussi valables pour les fonctions à valeurs complexes.

II.3. Dérivée de $\exp \circ \phi$

Proposition 7.25

Si $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dérivable alors $f : \left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\phi(t)} \end{array}\right.$ est aussi dérivable et $\left(e^{\phi}\right)' = \phi' e^{\phi}$.

Démonstration

III. Compléments

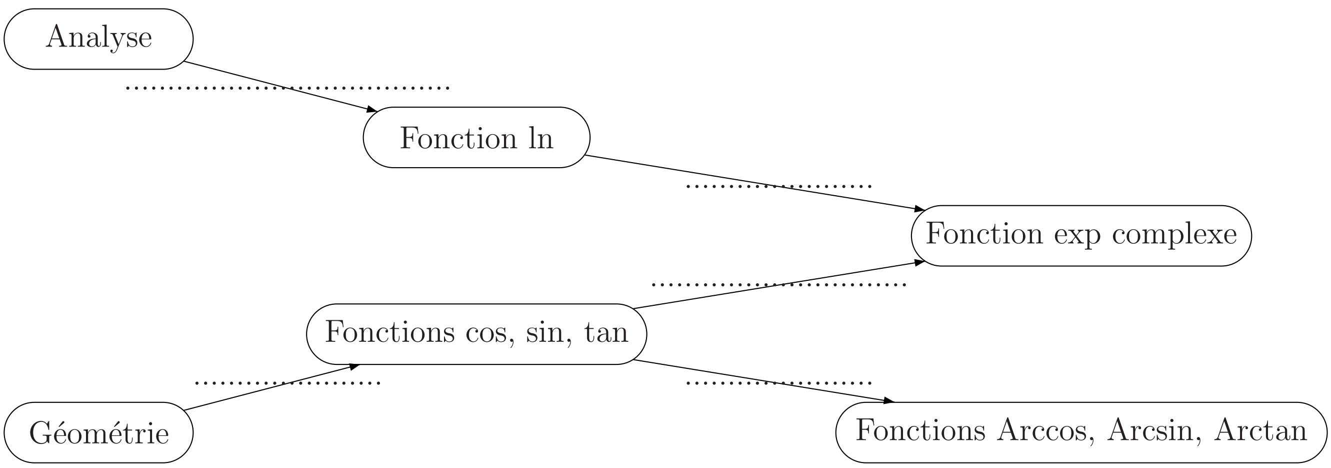
III.1. Technique d'élimination des racines carrées

Méthode : Élimination des racines carrées

Pour les expressions du type $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1+x^2}$ et $\sqrt{x^2-1}$, à l'aide d'un changement de variable judicieux, on fait apparaître un carré sous la racine.

- Pour $\sqrt{1-x^2}$, définie si $x \in [-1,1]$, on pose $x = \sin t$.
  Ainsi $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$. Si l'on impose $t \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on peut se passer des valeurs absolues. Ici, on peut aussi poser $x = \cos t$.
- Pour $\sqrt{1+x^2}$, définie pour tout x réel, on pose $x = \operatorname{sh} t$.
  Alors $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{ch} t$.
- Pour $\sqrt{x^2-1}$, définie pour tout $x \geqslant 1$, on pose $x = \operatorname{ch} t$.
  Par suite $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = |\operatorname{sh} t|$. On peut se passer de la valeur absolue en imposant $t \geqslant 0$. La quantité $\sqrt{x^2-1}$ est aussi définie pour tout $x \leqslant -1$; dans ce cas, on pose $x = -\operatorname{ch} t$.

III.2. Résumé de l'ordre logique de définition des fonctions usuelles



III.3. Tableau des dérivées/primitives usuelles

Fonction $\xrightarrow{\text{Dérivation}}$	Dérivée	Intervalle(s) de validité
$\ln\lvert x\rvert$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
exp	exp	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$]0;+\infty[$ prolongeable en 0 si $\alpha \geqslant 1$ valable aussi sur $]-\infty;0[$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$
sin	cos	$\mathbb{R}$
cos	$-\sin$	$\mathbb{R}$
tan	$1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ pour $k \in \mathbb{Z}$
Arcsin	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
Arccos	$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
Arctan	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
ch	sh	$\mathbb{R}$
sh	ch	$\mathbb{R}$
Primitive $\xleftarrow{\text{Primitivation}}$	Fonction	Intervalle(s) de définition

Remarque

- Une fonction continue possède une primitive sur ***tout intervalle inclus dans son ensemble de définition*** d'après le théorème 5.33 (théorème fondamental du calcul intégral).
- Pour cette raison, l'***ensemble de dérivabilité d'une fonction de référence*** est l'***intersection de son ensemble de définition avec l'ensemble de définition de sa dérivée***.
- Le théorème de dérivation d'une composée (5.25) s'écrit, dans le cas particulier des fonctions de référence, de la façon suivante :
  $(\exp\circ\phi)' = \phi' \times \exp\circ\phi$
  $(\ln\circ\phi)' = \phi' \times \frac{1}{\phi}$
  etc...
  à condition que ϕ prenne ses valeurs dans l'ensemble de dérivabilité de* exp*,* ln*, etc...

IV. Correction des exercices

Cor. 7.3 : On le démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- **Initialisation** : $\forall a_1 \in \mathbb{R}, \exp(a_1) = \exp(a_1)$.
- **Hérédité** :
  Supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné et quels que soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i)$.
  $\forall a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}, \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\exp(a_{n+1})$.
  On utilise alors la propriété de récurrence :
  $\forall a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}, \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i)\exp(a_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \exp(a_i)$.
- **Conclusion** : la propriété est initialisée au rang $n = 1$ et héréditaire donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i)$$

Cor. 7.6 : Pour $x \geqslant 1$, comme $y > 0$, $x^y \geqslant 1$ et $y^x > 0$, donc $x^y + y^x > 1$. De même, l'inégalité est vérifiée pour $y \geqslant 1$. On suppose donc $0 < y < 1$ et on pose $f : x \in \,]0, 1] \mapsto x^y + y^x = x^y + e^{x\ln(y)}$
f est dérivable sur $]0, 1]$ comme somme et composée de fonctions dérivables et
$f'(x) = yx^{y-1} + \ln(y)y^x = y\left(x^{y-1} + \ln(y)y^{x-1}\right)$ qui est du signe de $x^{y-1} + \ln(y)y^{x-1}$.
En posant $g : x \in]0, 1] \mapsto \dfrac{x^{y-1}}{y^{x-1}} + \ln(y)$, étudier le signe de f' revient à étudier celui de g. C'est une fonction dérivable, de dérivée

$$g'(x) = \frac{(y-1)x^{y-2}y^{x-1} - \ln(y)x^{y-1}y^{x-1}}{y^{2x-2}} = (y - 1 - x\ln(y))\frac{x^{y-2}}{y^{x-1}}$$

qui est du signe de $y - 1 - x\ln(y)$.
Or $y - 1 - x\ln(y) \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{y-1}{\ln(y)} \geqslant x$ car $\ln(y) < 0$. De plus, pour tout $y \in \,]0, 1[, \ln(y) < y - 1$ donc $0 < \frac{y-1}{\ln(y)} < 1$. Donc g est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{y-1}{\ln(y)}\right]$ de limite $+\infty$ en 0^+ et strictement croissante sur $\left[\frac{y-1}{\ln(y)}, 1\right]$ avec $g(1) = 1 + \ln(y)$.

Valeurs de x	0		$\frac{y-1}{\ln(y)}$		1
Variations de $g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g\left(\frac{y-1}{\ln(y)}\right)$	$\nearrow$	$1+\ln(y)$

Or, $g(y) = 1 + \ln(y) = g(1)$***, donc, pour tout*** $y \in \,]0, 1[$***, on a*** $y < \frac{y-1}{\ln(y)} < 1$ ***et*** g ***est strictement décroissante sur*** $]0, y]$***. On en déduit, en notant*** $\alpha \in]0, y]$ ***l'unique solution de*** $f'(\alpha) = 0$ ***si elle existe, que le tableau de variations de*** f ***sur*** $]0, y]$ ***est de la forme :***

Si $y \geqslant \frac{1}{e}$			
Valeurs de x	0		y
Signe $f'(x)$		$+$	
Variations de $f(x)$	1	$\nearrow$	$2y^y$

Si $y < \frac{1}{e}$					
Valeurs de x	0		α		y
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $f(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$2y^y$

Ces tableaux de variations permettent de conclure dans tous les cas puisque :

- si $y \in \,]0, 1[$ et $x \in \,]0, y]$, $y \in \,]0, 1[\,\mapsto 2y^y$ passe par un minimum $2e^{-\frac{1}{e}} > 1$ en $y = \frac{1}{e}$ donc $f(x)$ est minorée par sa limite 1 lorsque $x \to 0$;
- si $y \in \,]0, 1[$ et $x \in [y, 1[$, on arrive à la même conclusion en échangeant x et y.

Cor. 7.14 : $\operatorname{Arccos}(1-2x^2)$ a un sens si $-1 \leqslant 1-2x^2 \leqslant 1$, c'est-à-dire si $-1 \leqslant x \leqslant 1$. On peut se limiter à $0 \leqslant x \leqslant 1$ grâce à la parité.

Voici deux méthodes.

- (Changement de variable) On pose $x = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $1-2x^2 = 1-2\sin^2(t) = \cos(2t)$ et, comme $0 \leqslant 2t \leqslant \pi$, on en déduit $\operatorname{Arccos}(\cos(2t)) = 2t$.
  Ainsi, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $\operatorname{Arccos}(1-2x^2) = 2\operatorname{Arcsin} x$.
  On conclut grâce à la parité que, pour tout $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos}(1-2x^2) = 2|\operatorname{Arcsin} x|$.
- (En dérivant) La fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(1-2x^2)$ est dérivable sur $]0,1[$ et pour $x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.
  Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = 2\operatorname{Arcsin}(x) + k$.
  Les deux membres de cette identité étant continus sur $[0;1]$, on obtient $k=0$ en calculant leur valeur par exemple pour $x=0$ ou $x=1$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\dots$
  Ainsi pour tout $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\operatorname{Arccos}(1-2x^2) = 2|\operatorname{Arcsin} x|$.

Cor. 7.16 :

1) $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{e^a+e^{-a}}{2}\frac{e^b+e^{-b}}{2} + \frac{e^a-e^{-a}}{2}\frac{e^b-e^{-b}}{2} = \frac{e^ae^b+e^{-a}e^{-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b)$.
2) $\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b = \frac{e^a-e^{-a}}{2}\frac{e^b+e^{-b}}{2} + \frac{e^a+e^{-a}}{2}\frac{e^b-e^{-b}}{2} = \frac{e^ae^b-e^{-a}e^{-b}}{2} = \operatorname{sh}(a+b)$.

Maths - Chapitre 8

Équations différentielles et calcul intégral

L'objectif de ce chapitre est de donner quelques outils de résolution des équations différentielles. En commençant par la plus simple de toute : étant donnée une fonction f, trouver une fonction F telle que $F' = f$.

I. Calcul pratique des intégrales et des primitives

Dans ce qui suit, I est un intervalle ***réel*** contenant une infinité de points.

I.1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^0$

Définition 8.1 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^0$)

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est ***de classe*** $\mathcal{C}^0$ ***sur*** I si f est continue sur I.

Notation

Pour $J \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^0(I, J)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans J. On note donc $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ pour signifier qu'une fonction f est définie sur I, à valeurs dans J et continue sur I.

I.2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 8.2 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***sur*** I si f est dérivable sur I et si f' ***est continue*** sur I.

Notation

Pour $J \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^1(I, J)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J. On note donc $f \in \mathcal{C}^1(I, J)$ pour signifier qu'une fonction f est définie sur I, à valeurs dans J et dérivable (donc continue) sur I ***et de dérivée*** f' ***continue sur*** I.

I.3. Intégrales et primitives

a) Primitivation « à vue »

On dit qu'on primitive ***« à vue »*** une fonction lorsque l'obtention d'une primitive se fait en n'utilisant que :

- les primitives des fonctions de référence ;

- le fait que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$, une primitive de $\lambda f' + \mu g'$ est $\lambda f + \mu g$;
- les formules habituelles de dérivation (mais utilisées « à l'envers »...) ;
- notamment, le fait qu'une primitive de $u' \times f' \circ u$ est $f \circ u$.

Ex. 8.1 Donner une primitive des fonctions suivantes :

$f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$ $\quad f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x) + 2\sin(2x)$ $\quad f_3 : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

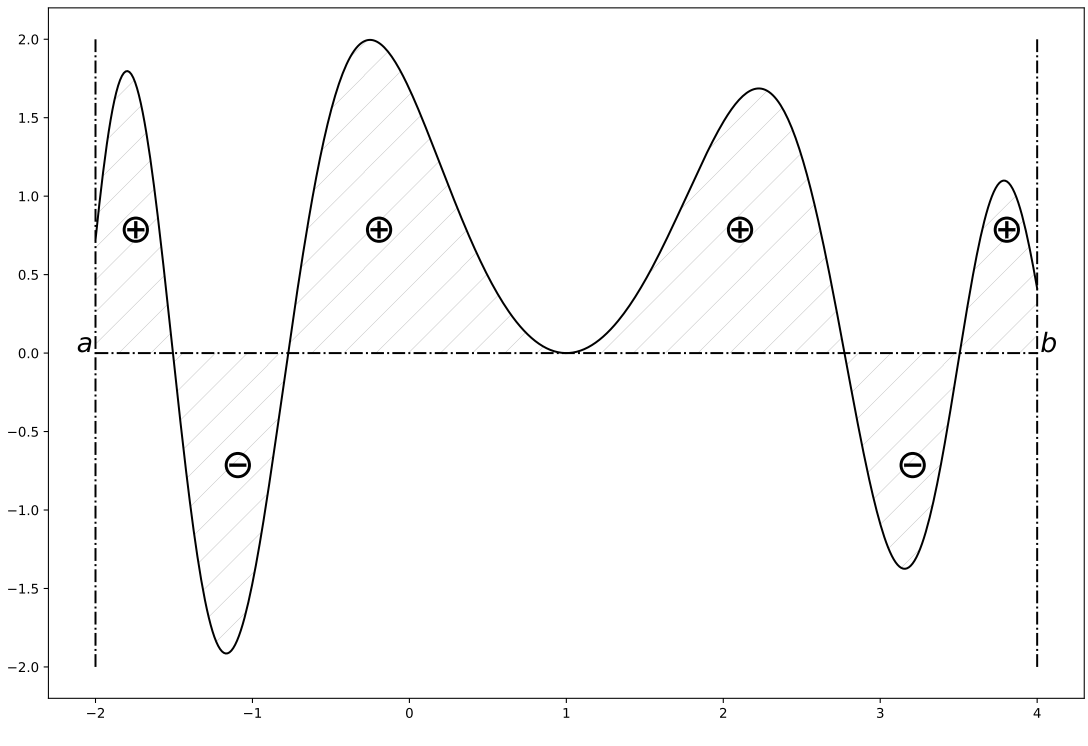
$f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1+2x}{1+x^2}$ $\quad f_5 : x \in]-1;1[\mapsto \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad f_6 : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (1+x^2)^3$

b) Définition/interprétation d'une intégrale

Étant donnés :

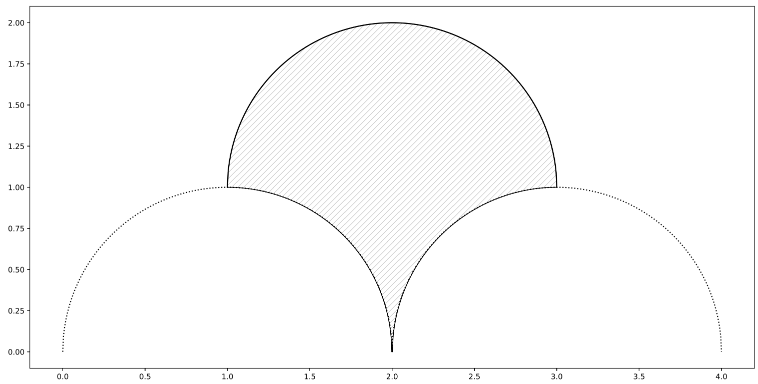
- $a < b$ deux réels de l'intervalle I
- f une fonction continue sur I ***à valeurs réelles***

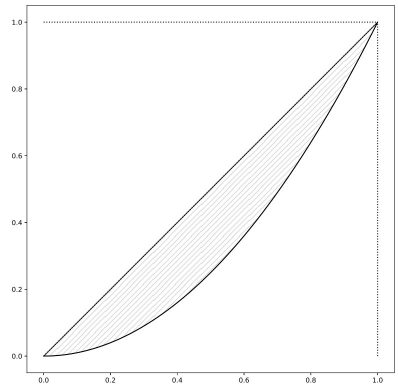
nous donnerons en fin d'année une ***définition*** de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ qui permet d'interpréter sa valeur comme ***l'aire algébrique*** (c'est-à-dire pouvant être positive ou négative) de la portion du plan représentée ci-dessous (à condition que le repère soit orthonormé).



Si $b < a$***, on pose*** $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$

Ex. 8.2 Calculer l'aire des parties hachurées ci-dessous :





Indications : sur la figure de gauche, les trois cercles sont de rayon 1, leurs centres ont pour coordonnées $C_1(1;0)$, $C_2(3;0)$ et $C_3(2;1)$.
Sur la figure de droite, la portion hachurée se trouve entre la courbe d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = x$.

c) Propriétés de l'intégrale

Étant donnés $a \in I, b \in I, f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C}), g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$:

- ***Linéarité*** :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \mu \in \mathbb{C}, \int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t) \mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t) \mathrm{d}t$$

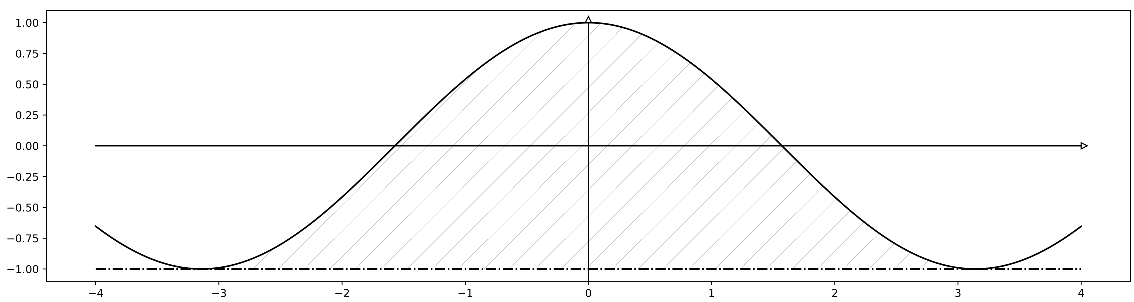
- ***Croissance*** :
  Si f et g sont ***à valeurs réelles***,
  si $a < b$,
  et si $\forall t \in [a;b], f(t) \leqslant g(t)$,

$$\text{alors } \int_a^b f(t) \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t) \mathrm{d}t.$$

- ***Relation de Chasles*** :

$$\forall (a;b;c) \in I^3 \text{ (sans hypothèse sur leur ordre)}, \int_a^b f(t) \mathrm{d}t + \int_b^c f(t) \mathrm{d}t = \int_a^c f(t) \mathrm{d}t$$

Ex. 8.3 On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, la fonction cos.
Que vaut l'aire hachurée ?



Ex. 8.4

1) Calculer $\mathcal{I} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1)$.

d) Théorème fondamental du calcul intégral

Si f est une fonction continue sur I, alors d'après le théorème fondamental du calcul intégral (proposition 5.33 page 70), quel que soit $a \in I$, $x \in I \mapsto \displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f, donc une ***fonction de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***sur*** I (puisque sa dérivée f est continue).

Méthode : Primitives et intégrales

- Si f est une fonction continue sur I dont ***on connaît une primitive*** F, alors pour $a, b \in I$, $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.
- Si f est une fonction continue sur I dont ***on ne connaît pas de primitive***, alors pour $a \in I$, $x \in I \mapsto \displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ en est une.

  L'ensemble de toutes les primitives de f ***est obtenu en rajoutant à cette primitive particulière une constante (réelle ou complexe suivant les cas) quelconque.***

  Les techniques de calcul d'intégrale que nous allons voir durant cette section peuvent alors ***parfois*** permettre d'obtenir une expression d'une primitive de f. Cependant, même lorsque le TFCI garantit l'existence de primitives, il est ***parfois impossible d'en obtenir une expression***.

Notation

On note $[F(t)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$. On a donc pour une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$ de primitive F :

$$\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Lorsqu'on cherche ***une primitive quelconque*** d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$, on notera souvent $x \in I \mapsto \displaystyle\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une telle primitive. En utilisant la notation précédente, l'absence de borne inférieure dans l'intégrale s'interprète de la façon suivante :

$$\int^{x} f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]^x = F(x)$$

Ex. 8.5 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0$.

Cor. 8.5

Ex. 8.6 Calculer $A(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(xt)\mathrm{d}t$.
Indication : on distinguera les deux cas $x = 0$ et $x \neq 0$.

I.4. Intégration par partie

Proposition 8.3 (Intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $(a;b) \in I^2$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Ex. 8.7 Trouver l'ensemble des primitives de $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$.

Cor. 8.7

Ex. 8.8 Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto xe^x$.

Cor. 8.8

Ex. 8.9 (Cor.) Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x\cos(x)$.

I.5. Changement de variable

Proposition 8.4 (Changement de variable)

Soit ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f continue sur $J = \phi(I)$. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f \circ \phi(t) \times \phi'(t)\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f\big(\phi(t)\big) \times \phi'(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Méthode : Changement de variable dans une intégrale

En pratique, dans $\displaystyle\int_A^B f(u)\mathrm{d}u$, on effectue très souvent le changement de variables en utilisant une ***bijection*** $\phi : [a,b] \to [A,B]$. Cependant, la proposition 8.4 est valable sous la forme donnée y compris ***si ϕ n'est pas bijective***.

1) On pose $u = \phi(t)$ et on calcule $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \phi'(t)\mathrm{d}t$.
2) On calcule la bijection réciproque $t = \psi(u)$.
3) On remplace dans l'intégrale : $\displaystyle\int_{u=A}^{u=B} f(u)\mathrm{d}u = \int_{t=\psi(A)}^{t=\psi(B)} f(\phi(t))\,\phi'(t)\mathrm{d}t$.

On peut aussi poser $t = \psi(u)$ et adapter la méthode précédente.

Ex. 8.10 Calculer $L = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$.

Cor. 8.10

Ex. 8.11 Calculer $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$.

Cor. 8.11

Ex. 8.12 Calculer une primitive des fonctions $f : x \in]-1;1[\mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{x^2+9}$ et $h : x \in]-1;+\infty[\mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+1}$.

Cor. 8.12

Méthode : Primitives des fonctions du type $x \mapsto \dfrac{\alpha}{ax^2+bx+c}$

Les trois ***méthodes*** utilisées pour l'obtention de primitives dans l'exercice 8.12 sont ***à connaître***. Voici un résumé de ces méthodes :

1) On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du dénominateur.
2) Suivant le signe de Δ, **sur chaque intervalle où la fonction est définie** :
   a) si $\Delta > 0$, l'équation $at^2 + bt + c = 0$ possède deux solutions $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
   On écrit $I(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int^x \frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)}\mathrm{d}t$ puis on cherche $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\dfrac{1}{(t-t_1)(t-t_2)} = \dfrac{A}{t-t_1} + \dfrac{B}{t-t_2}$ ce qui permet de calculer $I(x)$.
   b) si $\Delta = 0$, l'équation $at^2 + bt + c = 0$ possède une solution double $t_0 \in \mathbb{R}$.

On écrit $I(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int^x \dfrac{1}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t$ qui se calcule simplement :

$I(x) =$ ....

c) si $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.
On écrit $I(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int^x \dfrac{1}{(t+A)^2+B}\mathrm{d}t$ pour éliminer le terme en t du dénominateur. Le dénominateur ne s'annulant pas, on a alors forcément $B > 0$ ce qui permet d'obtenir l'intégrale à l'aide de changement(s) de variable(s).

3) Si l'on souhaite obtenir **l'ensemble des primitives sur un intervalle où l'intégrande est définie**, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, toutes les primitives s'obtiennent à partir de celle calculée en rajoutant un terme constant.

Pour les fonctions du type $x \mapsto \dfrac{ux+v}{ax^2+bx+c}$, on élimine le terme ux du numérateur en faisant apparaître la dérivée du dénominateur (voir exercice suivant).

Ex. 8.13 Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+4}$.

Cor. 8.13

Ex. 8.14 (Cor.) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t = k$$

Ex. 8.15 (Cor.) Calculer $I(x) = \displaystyle\int^x \dfrac{\mathrm{d}t}{5t^2+2t+1}$ en précisant le ou les ***intervalle(s)*** sur lesquels on effectue l'intégration.

Ex. 8.16 (Cor.) Calculer $J(x) = \displaystyle\int^x \dfrac{\mathrm{d}t}{3t^2+4t+1}$ en précisant le ou les ***intervalle(s)*** sur lesquels on effectue l'intégration.

I.6. Primitives usuelles

Primitives usuelles

Le tableau suivant donne les primitives à connaître. La colonne « Validité » indique les intervalles maximaux de validité de la primitive fournie. Lorsqu'on cherche une primitive sur une réunion d'intervalles, on doit a priori prendre ***des constantes d'intégration différentes sur chaque intervalle***. Le tableau peut aussi se lire « à l'envers » : pour chaque primitive donnée, la colonne de gauche fournit sa dérivée. Enfin, les primitives de tan s'obtiennent en écrivant $\tan = \dfrac{-\cos'}{\cos}$, celles de $\dfrac{1}{\sin(x)}$ ou $\dfrac{1}{\cos(x)}$ de la même manière que dans l'exercice 8.11

et celles des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{a^2 \pm x^2}$ à l'aide de l'exercice 8.12.
Lorsque ce n'est pas précisé, a ***est un réel strictement positif et*** k ***un entier relatif***.

Fonction	**Primitive**	**Validité**
$x \mapsto x^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* \text{ et } \mathbb{R}_-^* & \text{si } a \in \mathbb{Z}_-^* \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\|x\|$	$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \ln\|x\|$	$x \mapsto x\ln\|x\| - x$	$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{e}^{cx},\ c \in \mathbb{C}^*$	$x \mapsto \frac{1}{c}\mathrm{e}^{cx}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln\|\cos(x)\|$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$	$]-1,1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$

I.7. Primitives particulières

Méthode : Calcul des primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ **et** $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$

On écrit $e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\sin(bx) = e^{(a+ib)x}$, dont on connaît les primitives. On passe ensuite à la partie réelle ou imaginaire suivant ce que l'on cherche.

Ex. 8.17 Calculer l'ensemble des primitives de $x \mapsto e^x(\cos x + \sin x)$.

Cor. 8.17

Méthode : Polynômes trigonométriques

Pour primitiver un polynôme trigonométrique (c'est-à-dire une somme d'expressions du type $\cos^n(x)\sin^p(x)$), on le ***linéarise***.

Ex. 8.18 Calculer l'ensemble des primitives de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos^2(x)$ et de $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^3(x)$.

Cor. 8.18

II. Équations différentielles

II.1. Généralités

Définition 8.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I \subset \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{C}$ n fois dérivable de dérivées continues.
On appelle ***équation différentielle d'ordre*** n ***sur*** I une relation satisfaite pour tout $t \in I$ par $y(t)$, $y'(t)$, ..., $y^{(n)}(t)$.

Parmi les équations différentielles que l'on rencontre en physique, on peut par exemple citer :

- Oscillateur harmonique : $y'' + \omega_0^2 y = 0$
- Pendule pesant : $\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

Ex. 8.19 (Cor.) La fonction tangente est solution sur $I = \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle du premier ordre : $y' = 1 + y^2$.
Trouver toutes les solutions de cette équation différentielle définies de I dans $\mathbb{R}$.

II.2. Équations différentielles linéaires

Définition 8.6

On dit qu'une équation différentielle est ***linéaire*** lorsqu'elle s'écrit

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

où $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ et b sont des fonctions continues définies sur I.
On dit qu'elle est ***à coefficients constants*** lorsque $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ sont des fonctions ***constantes***.
On dit qu'elle est ***homogène*** ou ***sans second membre*** lorsque $b = 0$. Sinon on dit qu'elle est ***avec second membre***.

Ex. 8.20 Expliciter la nature des équations différentielles suivantes :

- Oscillateur harmonique :..
- Pendule pesant :..
- $xy''' + 2y'' - y = \cos(x)$ est. ....

III. Linéaires du premier ordre

III.1. À propos de l'annulation des solutions d'une EDL1 (hors-programme)

Définition 8.7

Soit I un intervalle.
On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ ***s'annule sur*** I si et seulement si

$$\exists x \in I, f(x) = 0$$

On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ ***est nulle sur*** I si et seulement si

$$\forall x \in I, f(x) = 0$$

On appelle ***fonction nulle*** (définie sur I) la fonction

$$N_I : x \in I \mapsto 0$$

Proposition 8.8

La fonction nulle est solution de toute équation différentielle linéaire ***homogène***.

Démonstration

Ex. 8.21 Vérifier que la fonction cos est solution de l'équation différentielle linéaire

$$\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$$

Cor. 8.21

La proposition et l'exercice précédent montrent que, en dehors même de la fonction nulle qui est toujours solution des équations différentielles linéaires ***homogènes***, il existe des ***solutions d'une EDL1 homogène non nulles qui s'annulent***, et même qui s'annulent une infinité de fois.

Ex. 8.22 Soit $(E) : u(x)y' + v(x)y = 0$ une EDL1 homogène, avec u et v deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que u s'annule en $x_0 \in I$ et que $v(x_0) \neq 0$.
Montrer que toute solution de (E) s'annule en x_0.

Cor. 8.22

Méthode

Comme nous allons le voir, les théorèmes du cours ne donnent de solutions que pour les équations différentielles homogènes du type $(E_n) : y' + a(x)y = 0$ appelée ***équations différentielles sous forme normale***.
Pour résoudre les équations différentielles plus générales de la forme $(E) : u(x)y' + v(x)y = 0$, la méthode à utiliser sera la suivante :

- sur tout intervalle où la fonction u ne s'annule pas, on résout l'équation différentielle

$(E_0) : y' + \dfrac{v(x)}{u(x)}y = 0$ qui est sous forme normale ;

- au(x) point(s) x_0 où la fonction u s'annule, on tente de faire un ***recollement*** $\mathcal{C}^1$ des solutions obtenues sur les intervalles de part et d'autre de x_0 (voir exercice 8.23).
  Parfois ce recollement est possible, parfois il ne l'est pas.
  Lorsque le recollement est possible, l'exercice précédent montre que les solutions s'annulent nécessairement.

III.2. Sans second membre

Théorème 8.9

Étant donnée une fonction $a : I \to \mathbb{C}$ continue et $A : I \to \mathbb{C}$ l'une de ses primitives, l'équation $y' + a(t)y = 0$ a pour solutions $y : t \in I \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{C}$ et il existe une unique solution vérifiant la condition initiale $t_0 \in I, y(t_0) = k_0$ où $k_0 \in \mathbb{C}$.

Démonstration

Remarque

Le théorème précédent complète les résultats énoncés au paragraphe III.1. : si y est une solution ***non nulle*** d'une EDL1 homogène ***sous forme normale*** sur un intervalle I, alors y ***ne s'annule pas sur*** I.
En effet, quel que soit le complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$,
$|e^z| = e^a \times \left|e^{ib}\right| = e^a > 0$, donc $e^z \neq 0$.
Mais cela n'avait rien d'évident à priori.

Ex. 8.23 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $xy' - 2y = 0$.
Résoudre la même équation sur $\mathbb{R}_-^*$.
En déduire les solutions de $xy' - 2y = 0$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Cor. 8.23

III.3. Équations avec second membre

Théorème 8.10

Étant données deux fonctions $a, b : I \to \mathbb{C}$ continues, l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1(I)$ de l'équation différentielle $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de l'équation homogène associée.

Démonstration

Méthode : Méthode de variation de la constante

Pour obtenir une solution particulière de l'équation (E) avec second membre, on résout d'abord l'équation homogène (E') associée dont la solution est de la forme $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
On recherche alors une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$: en remplaçant $y(t)$ dans (E), on obtient $\lambda'(t)$ et une solution particulière y_p de (E) après intégration.

Ex. 8.24 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ $(E_1) : y' - \frac{2}{x}y = x^2$ puis $(E_2) : y' - \frac{2}{x}y = 1 - \ln(x)$.

Cor. 8.24

III.4. Principe de superposition

Théorème 8.11 (Principe de superposition)

Étant données deux fonctions b_1 et b_2 continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$,
si y_1 est une solution particulière de $y' + a(t)y = b_1(t)$ sur I et
si y_2 est une solution particulière de $y' + a(t)y = b_2(t)$ sur I,
alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $(E) : y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$ sur I.

Démonstration

Méthode : Principe de superposition

Le théorème précédent est utilisé de la façon suivante :

- lorsque le second membre $b(t)$ d'une équation différentielle est une somme de fonctions on peut tenter d'obtenir des solutions particulières associées à chacun de ses termes puis faire la somme des solutions obtenues pour avoir une solution particulière de l'équation d'origine ;
- dans certains cas au contraire, on peut tenter en ajoutant et retranchant une même expression au second membre de se ramener à des termes plus faciles à intégrer.

Ex. 8.25 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E) : y' - \frac{2}{x}y = \ln(x)$.

Cor. 8.25

III.5. Exercices

Ex. 8.26 Résoudre l'équation différentielle $y' + y = x + 1$.

Cor. 8.26

Ex. 8.27 Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = \cos^2(x)$.

Cor. 8.27

Ex. 8.28 (Cor.) Résoudre pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'équation différentielle $y' - iy = -i\,(e^{it} + 1)$.

IV. Linéaires du second ordre

Dans tout ce qui suit, $a, b \in \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.
On cherche les solutions y deux fois dérivables à dérivées continues de l'équation différentielle ***linéaire d'ordre deux à coefficients constants***

$$(E) : y'' + ay' + by = f(t)$$

On note (E') l'équation homogène associée.

IV.1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Définition 8.12 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$)

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est ***de classe $\mathcal{C}^2$ sur*** I si f est deux fois dérivable sur I et si f'' ***est continue*** sur I.

Notation

Pour $J \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^2(I, J)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I à valeurs dans J. On note donc $f \in \mathcal{C}^2(I, J)$ pour signifier qu'une fonction f est définie sur I, à valeurs dans J, dérivable deux fois (donc continue) sur I ***et de dérivée seconde*** f'' ***continue sur*** I.

IV.2. Équation homogène

Remarque

Soit $(E') : y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants. Cherchons, par analogie avec les équations différentielles linéaires du premier ordre, les solutions de (E') du type $x \mapsto e^{rx}$ où r est une constante ***réelle ou complexe***.

....

....

....

Définition 8.13 (Équation caractéristique)

Étant donnée (E') : $y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants, on appelle ***équation caractéristique*** de (E') l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Théorème 8.14

Soit (E') : $y''+ay'+by = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients complexes constants et $r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.
Alors les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de (E') sont :

- si $\Delta \neq 0$, en notant r_1 et r_2 les racines complexes de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t), (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

- si $\Delta = 0$, en notant r_0 la racine complexe de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto (At + B) \exp(r_0 t), (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

Démonstration

Remarque

Dans les deux cas y s'écrit $y = Ay_1 + By_2$ où A et B sont des constantes réelles ou complexes.
On dit que y est ***combinaison linéaire de*** y_1 ***et*** y_2 ou encore que y peut s'exprimer ***dans la base de fonctions*** (y_1, y_2).

Ex. 8.29 Résoudre pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'équation différentielle $y'' - (1 + i)y' + iy = 0$.

Cor. 8.29

IV.3. Solutions réelles de l'équation homogène à coefficients réels

Théorème 8.15

Soit (E') : $y''+ay'+by = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients ***réels*** constants.
Soit $r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.
Alors les solutions ***à valeurs réelles*** de (E') sont :

- si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les racines ***réelles*** de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- si $\Delta = 0$, en notant r_0 la racine ***réelle*** de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto (At + B) \exp(r_0 t), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- si $\Delta < 0$, en notant $\alpha + i\omega$ et $\alpha - i\omega$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto \exp(\alpha t)\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Cette dernière solution peut aussi s'écrire $y : t \mapsto Y_0 \exp(\alpha t)\cos(\omega t + \phi), (Y_0, \phi) \in \mathbb{R}^2$ (voir exercice **??** page **??**) .

Démonstration

Remarque

Là encore, dans tous les cas y s'écrit $y = Ay_1 + By_2$. À nouveau, y est ***combinaison linéaire de*** y_1 et y_2 ou encore y peut s'exprimer ***dans la base de fonctions*** (y_1, y_2).

Ex. 8.30 Résoudre pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 6y' + 18y = 0$.

Cor. 8.30

IV.4. Équation avec second membre

Théorème 8.16

Étant donnés $(a; b) \in \mathbb{K}^2$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$ est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de l'équation homogène associée.

Le principe de superposition reste lui aussi valable et les démonstrations sont identiques au cas du premier ordre.

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle avec second membre, on résout tout d'abord l'équation homogène associée, puis on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre. La méthode de variation de la constante est parfois encore applicable mais en pratique, seuls sont au programme de PCSI les seconds membres de la forme De^{ct} avec $(D, c) \in \mathbb{C}^2$ qui permettent aussi de traiter les seconds membres du type $De^{ut}\cos(vt)$ ou $De^{ut}\sin(vt)$ en passant à la partie réelle ou imaginaire.
Dans ce cas on cherche une solution particulière de la forme

1) $t \mapsto Ue^{ct}$ lorsque c n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
2) $t \mapsto Ute^{ct}$ lorsque c est solution simple de l'équation caractéristique ;
3) $t \mapsto Ut^2e^{ct}$ lorsque c est solution double de l'équation caractéristique.

Ex. 8.31 Donner l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 2y = e^{-t}\cos(t)$.

Cor. 8.31

IV.5. Unicité des solutions

Théorème 8.17

Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ alors il existe une unique solution de l'équation différentielle

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(t)$$

vérifiant les ***conditions initiales*** $\begin{cases} y(t_0) &= v_0 \\ y'(t_0) &= v_1 \end{cases}$ où $t_0 \in \mathbb{R}$, $(v_0; v_1) \in \mathbb{K}^2$.

Démonstration

Explicitement hors-programme.

Correction des exercices

Cor. 8.9 : On intègre par parties : $\displaystyle\int^x t\cos(t)\mathrm{d}t = [t\sin(t)]^x - \int^x \sin(t)\mathrm{d}t = x\sin(x) + \cos(x)$. L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x\cos(x)$ est donc $\{x \mapsto x\sin(x) + \cos(x) + k, k \in \mathbb{R}\}$.

Cor. 8.14 : ***Analyse*** : si f vérifie la condition donnée, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x-a) = 0$, ce qui s'écrit en posant $u = x - a$, $\forall u \in \mathbb{R}, f(u+2a) = f(u)$. Donc f est $2a$-périodique.
Synthèse : supposons que f est $2a$-périodique et soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{x-a}^{y-a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y+a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x-a}^{y-a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y-a}^{x-a} f(u+2a)\mathrm{d}u \qquad \texttt{en posant } u = t - 2a \\
&= \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x-a}^{y-a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y-a}^{x-a} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Donc $\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas de la valeur de $x \in \mathbb{R}$ ce qui achève notre démonstration.

Cor. 8.15 : Discriminant : $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, le dénominateur ne s'annule donc jamais. On calcule une primitive sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{5t^2 + 2t + 1} \\
&= \frac{1}{5}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}} \\
&= \frac{5}{4}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{5t+1}{2}\right)^2 + 1}
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = \frac{5t+1}{2}$, $\mathrm{d}u = \frac{5}{2}\mathrm{d}t$. D'où

$$I(x) = \frac{5}{4}\int^{\frac{5x+1}{2}} \frac{\frac{2}{5}\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{5x+1}{2}\right)$$

Cor. 8.16 : Discriminant : $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$. Le dénominateur possède donc deux racines $t_1 = \dfrac{-4+2}{6} = \dfrac{-1}{3}$ et $t_2 = -1$. On calcule une primitive sur $]-\infty; -1[$ ou $\left]-1; \dfrac{-1}{3}\right[$ ou $\left]\dfrac{-1}{3}; +\infty\right[$.

$$\begin{aligned} J(x) &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{3t^2+4t+1} \\ &= \frac{1}{3}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)} \end{aligned}$$

On cherche à écrire $\dfrac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)}$ sous la forme $\dfrac{A}{t+\frac{1}{3}} + \dfrac{B}{t+1}$.

On peut procéder ***par identification*** ou utiliser la méthode suivante :

$$\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)} = \frac{A}{t+\frac{1}{3}} + \frac{B}{t+1} \overset{\times\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\Longrightarrow} \frac{1}{t+1} = A + \frac{B\left(t+\frac{1}{3}\right)}{t+1} \overset{t=\frac{-1}{3}}{\Longrightarrow} A = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)} = \frac{A}{t+\frac{1}{3}} + \frac{B}{t+1} \overset{\times(t+1)}{\Longrightarrow} \frac{1}{t+\frac{1}{3}} = \frac{A\,(t+1)}{t+\frac{1}{3}} + B \overset{t=-1}{\Longrightarrow} B = \frac{-3}{2}$$

D'où $J(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{2}\displaystyle\int^x \dfrac{1}{t+\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{t+1}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+\frac{1}{3}}{x+1}\right| = \ln\sqrt{\left|\dfrac{3x+1}{3x+3}\right|}$.

Cor. 8.19 : $1 + y^2$ est une fonction strictement positive. L'équation différentielle donnée est donc équivalente à

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1$$

En primitivant on obtient donc $\mathrm{Arctan}(y) = x + k$ où k est une constante réelle.

On en déduit que $y = \tan(x+k)$. Or pour que y soit définie sur I, il faut que k soit un multiple entier de π.

La seule solution définie sur I de $y' = 1 + y^2$ est donc la fonction tangente.

Cor. 8.28 : La solution générale de l'équation homogène est $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{it}, \lambda \in \mathbb{C}$. Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante :

$\lambda' e^{it} = -i\left(e^{it}+1\right)$ donc $\lambda' = -i\left(e^{-it}+1\right)$ et $\lambda = -it + e^{-it}$ convient. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1 + (\lambda - it)e^{it}, \lambda \in \mathbb{C}\right\}$.

Nombres réels et suites numériques

« Les considérations qui font l'objet de ce petit écrit remontent à l'automne 1858. Je me trouvais alors, en tant que professeur, à l'École polytechnique fédérale de Zurich, pour la première fois dans la situation de devoir exposer les éléments du calcul différentiel, et je ressentais à cette occasion, plus vivement que jamais auparavant, le manque d'un fondement véritablement scientifique à l'arithmétique. En concevant qu'une grandeur variable s'approche d'une valeur limite fixe, et notamment en prouvant la proposition ***que chaque grandeur qui croît constamment [et qui reste majorée] doit de façon certaine s'approcher d'une valeur limite***, je me réfugiais dans les évidences géométriques. Maintenant aussi, je considère l'appel à l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel comme extrêmement utile du point de vue didactique, et même indispensable si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais [...] ce sentiment d'insatisfaction s'imposait tant à moi que je pris la ferme résolution d'y réfléchir sans relâche [...]. On dit constamment que le calcul différentiel s'occupe des grandeurs continues, et ***pourtant nulle part n'est donnée une explication de cette continuité***. », extrait de *Continuité et nombres irrationnels*

Richard Dedekind [1]

Le point de départ de ce chapitre sera la propriété qui résulte du travail de **Dedekind** et de ses successeurs et qui ***caractérise l'avantage théorique qu'il y a de travailler dans l'ensemble des nombres réels plutôt que dans l'ensemble des nombres rationnels***. Nous approfondirons la notion de nombre réel et en tirerons des conséquences pour l'étude des suites numériques et de ***leurs limites***.

I. L'ensemble des nombres réels

I.1. Rappels et pré-requis

Ensembles usuels de nombres

Il convient d'emblée de bien comprendre que la notion de nombre réel repose :

- ***sur l'intuition géométrique*** de ***droite munie d'un repère***, qui contient en elle-même l'idée de ***continuité*** ;
- ***sur les intuitions algébriques*** de ***corps*** (voir la définition 3.10) et de ***relation d'ordre compatible avec les opérations*** (voir les définitions 1.1 et 5.1).

1. **Richard Dedekind**(1831 ;1916), mathématicien allemand ayant contribué à fonder la logique mathématique contemporaine, notamment la construction des ensembles de nombres.

À ce titre les trois définitions précédentes ***doivent être revues et réapprises*** si besoin est.
On rappelle de plus que :

- $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont trois exemples de corps, les ***deux premiers uniquement étant munis d'une relation d'ordre totale compatible avec leurs opérations*** ;
- on a la suite d'inclusions strictes $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ où $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux c'est-à-dire des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{N}{10^n}$ avec $(N,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$;
- on appelle ***nombres irrationnels*** les éléments de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Définition 9.1 (Majorant, minorant)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ est ***majorée par*** $M \in \mathbb{R}$ et on dit que M ***est un majorant de*** E si ....

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ est ***minorée par*** $m \in \mathbb{R}$ et on dit que m ***est un minorant de*** E si ....

Une partie qui est minorée par m et majorée par M est dite ....

Définition 9.2 (Maximum, minimum, extremums)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ possède ***un plus grand élément*** $G \in \mathbb{R}$ aussi appelé ***maximum de*** E si ....

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ possède ***un plus petit élément*** $P \in \mathbb{R}$ aussi appelé ***minimum de*** E si ....

Proposition 9.3 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

I.2. Propriété de la borne supérieure, inférieure

Définition 9.4 (Borne supérieure, borne inférieure)

Soit $\mathcal{A}$ une partie ***non vide*** de $\mathbb{R}$.

- On dit que S est ***la borne supérieure*** de $\mathcal{A}$ si S est ***le plus petit majorant*** de $\mathcal{A}$; si $\mathcal{A}$ ***n'est pas majorée***, on convient que sa borne supérieure est $+\infty$.
- On dit que I est ***la borne inférieure*** de $\mathcal{A}$ si I est ***le plus grand minorant*** de $\mathcal{A}$; si $\mathcal{A}$ ***n'est pas minorée***, on convient que sa borne inférieure est $-\infty$.

Les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble vide ne sont pas définies.

Notation

À condition que l'un ou l'autre existe, on note $S = \sup \mathcal{A}$ et $I = \inf \mathcal{A}$.

Ex. 9.1 Pour les ensembles suivants, donner, s'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, le maximum, le minimum, la borne supérieure, la borne inférieure :
$\mathbb{N}$, $]1;2]$, $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{Q}_+, x^2 < 2\}$

Remarque

Si $\mathcal{A}$ admet un plus grand élément, alors cet élément est aussi la borne supérieure de $\mathcal{A}$.
En effet, ...
....

De même si $\mathcal{A}$ admet un plus petit élément, alors c'est aussi la borne inférieure de $\mathcal{A}$.
Les réciproques sont fausses (voir exercice précédent).

Axiome 9.5 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ ou *propriété de la borne supérieure*)

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet **dans** $\mathbb{R}$ une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet **dans** $\mathbb{R}$ une borne inférieure.

Remarque

Cette propriété distingue le corps des nombres réels de celui des nombres rationnels. Elle ***doit être connue***. Elle exprime la ***continuité*** de la droite réelle et complète la remarque précédente : pour une partie ***non vide*** $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$

- $\mathcal{A}$ majorée ***équivaut à*** $\sup \mathcal{A}$ existe ;
- $\max \mathcal{A}$ existe ***implique*** $\sup \mathcal{A}$ existe, mais la réciproque est fausse.

L'ensemble des majorants d'une partie quelconque $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ est

- vide si $\mathcal{A}$ n'est pas majorée,
- $\mathbb{R}$ si $\mathcal{A}$ est vide,
- l'intervalle $[\sup \mathcal{A}; +\infty[$ sinon. En effet, d'après l'axiome précédent, l'ensemble des majorants possède toujours un plus petit élément si $\mathcal{A}$ est non vide majoré, c'est la borne supérieure.

Ces remarques s'adaptent à la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Méthode

Pour démontrer que S est la borne supérieure de $\mathcal{A} \neq \emptyset$ majorée on montre :

1) que S est un majorant de $\mathcal{A}$;
2) que tout majorant de $\mathcal{A}$ est supérieur ou égal à S.

Pour obtenir la borne supérieure d'une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, on peut aussi commencer par calculer l'ensemble des majorants, puis obtenir le plus petit d'entre eux.
La méthode s'adapte à l'obtention de la borne inférieure de $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Ex. 9.2

1) Soient m et n deux entiers strictement positifs.
   Montrer que $0 < \dfrac{mn}{(m+n)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

2) Soit $A = \left\{ \dfrac{mn}{(m+n)^2}, m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
Montrer que A admet une borne supérieure S et une borne inférieure I et les calculer.

3) S est-elle le maximum de A ?
I est-elle le minimum de A ?

I.3. Approximations décimales

Définition 9.6

$(x_0; x) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $|x - x_0| \leq \epsilon$, on dit que x_0 est ***une approximation décimale*** de x à ϵ près. De plus :
si $x_0 > x$, on dit que x_0 est une valeur approchée de x par ***excès***.
si $x_0 < x$, on dit que x_0 est une valeur approchée de x par ***défaut***.

Théorème 9.7 (Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$)

L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } a < b, \exists x \in \mathbb{D} \text{ tel que } a < x < b$$

Démonstration hors programme

Soient $a < b$ deux réels. On a donc $b - a > 0$.
Notons $n = \lfloor \log_{10}(b-a) \rfloor - 1 \in \mathbb{Z}$.
$n + 1 \leqslant \log_{10}(b-a) < n + 2 \Rightarrow 10^{n+1} \leqslant b - a < 10^{n+2} \Rightarrow 10 \leqslant \dfrac{b-a}{10^n} < 100$.
On en déduit que $\dfrac{a}{10^n} < \dfrac{a}{10^n} + 10 \leqslant \dfrac{b}{10^n}$.
On conclut en posant $N = \left\lfloor \dfrac{a}{10^n} + 9 \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ *qui vérifie* $\dfrac{a}{10^n} < N \leqslant \dfrac{a}{10^n} + 9 < \dfrac{b}{10^n}$ *d'où* $a < \dfrac{N}{10^{-n}} < b$.

Corollaire 9.8

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Corollaire 9.9

Pour tout réel x et tout réel $\epsilon > 0$, il existe une approximation décimale de x à ϵ près, que ce soit par défaut ou par excès.

Démonstration

I.4. Intervalles réels

On rappelle que les intervalles réels ont été définis au chapitre 2 page 31 pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par :

- ***Intervalles fermés*** :
  $[a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.
- ***Intervalles semi-ouverts*** :
  $]a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$, $[a; b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$,
  $[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$, $]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leqslant b\}$.
- ***Intervalles ouverts*** :
  $]a; b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$, $]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$, $]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$
  et $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

En particulier, $\emptyset = [1; 0] =]1; 0] =]0; 0[$ est un intervalle réel (à la fois fermé, semi-ouvert et ouvert).

Remarque

Le théorème 9.7 peut s'énoncer à l'aide des intervalles sous la forme :
« Pour tout intervalle réel I ouvert non vide, il existe un nombre décimal d tel que $d \in I$ ».

Lemme 9.10

Étant donnée une partie ***non vide*** $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$:

1) si $\mathcal{A}$ est majorée et possède par conséquent une borne supérieure S, alors quel que soit $x < S$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x < x' \leqslant S$;
2) si $\mathcal{A}$ est minorée et possède par conséquent une borne inférieure I, alors quel que soit $x > I$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x > x' \geqslant I$;
3) si $\mathcal{A}$ n'est pas majorée, alors quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x < x'$;
4) si $\mathcal{A}$ n'est pas minorée, alors quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x' < x$.

Démonstration

Proposition 9.11

Une partie $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous u et v dans $\mathcal{X}$, on a $[u, v] \subset \mathcal{X}$.

Démonstration

Ex. 9.3 (Cor.) [$*$] A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x; y) \in A \times B, x \leq y$.

1) Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.
2) Montrer que $\sup A = \inf B \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists (x; y) \in A \times B, y - x < \epsilon$.

II. Introduction aux suites

II.1. Définitions

Définition 9.12 (Suites)

On appelle ***suite réelle*** tout élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et ***suite complexe*** tout élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Par extension, si A est une ***partie infinie*** de $\mathbb{N}$, tout élément de $\mathbb{R}^A$ est aussi appelé suite réelle et tout élément de $\mathbb{C}^A$ est aussi appelé suite complexe.

Dans ce qui suit, on notera $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation

Si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ est une suite, on préfère généralement comme pour les familles finies la notation u_0, u_1, u_2, etc… pour les images de la suite u.
On peut cependant aussi noter $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$etc… ces images.
La ***suite elle-même*** est notée u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Attention à ne pas confondre u_n ***qui est l'image de*** n ***par la suite*** u ***et*** u ***elle-même***.

Remarque

De façon évidente, la restriction $u_{|I}$ d'une suite à une partie finie $I \subset \mathbb{N}$ est une famille finie.
Les notions de suite et de famille finie sont donc intimement liées.

Définition 9.13 (Égalité de deux suites)

Deux suites u et v sont ***égales*** si :

- elles sont ***définies sur la même partie*** $A \subset \mathbb{N}$;
- $\forall n \in A, u_n = v_n$.

On supposera à partir de maintenant que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$ sauf indication contraire.

Définition 9.14 (Suites particulières)

Étant donnée u une suite réelle ou complexe, on dit :

- que u est ***constante*** s'il existe un réel ou un complexe a tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a$;
- que u est ***stationnaire*** s'il existe un réel ou un complexe a et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n = a$;
- que u est ***périodique*** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n+p \in A$ et $u_{n+p} = u_n$.
  La période de la suite est alors le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ satisfaisant cette propriété.

Remarque

Une définition alternative du mot ***période*** désigne ***tout entier satisfaisant la propriété donnée***. Auquel cas, il existe ***une infinité de périodes*** pour une suite périodique et on demandera souvent de donner ***la plus petite période*** de la suite.

Définition 9.15 (Propriété valable « à partir d'un certain rang »)

Étant donné un prédicat P dépendant d'une variable $x \in \mathbb{K}$, on dira que la suite u vérifie P ***à partir d'un certain rang*** si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $P(u_n)$ soit vraie.

Ex. 9.4 Écrire à l'aide de quantificateurs :
u vérifie P ***à partir d'un certain rang*** si et seulement si ....
ou plus simplement ....
Reformuler le fait qu'une suite est stationnaire.
u est stationnaire si et seulement si ....

II.2. Modes de définition d'une suite

Une suite peut être définie de multiples façons. On retiendra les trois modes de définition suivants illustrés chacun par un exercice :

a) De façon explicite

Ex. 9.5 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{2n} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{2n+1} = (-1)^n \end{cases}$.
Montrer que u est périodique et préciser sa période.

Cor. 9.5

b) De façon implicite

Ex. 9.6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $e^{u_n} - 1 = u_n + n$.

Cor. 9.6

c) Par récurrence

Ex. 9.7 On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} & u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n} \end{cases}$.
Montrer que lorsqu'elle est définie, cette suite est périodique. On précisera notamment les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite est définie et la période de la suite suivant la valeur de u_0.

Cor. 9.7

Remarque

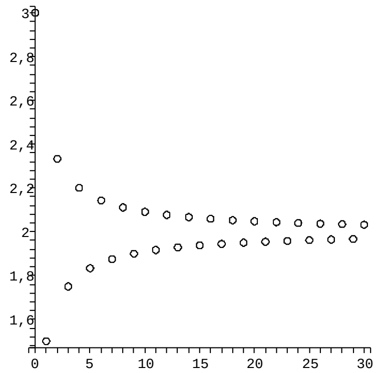
Dans le cas d'une suite définie par récurrence, la ***démonstration par récurrence*** est un outil ***indispensable***. Il faut toujours l'avoir à l'esprit.

II.3. Définitions spécifiques aux suites réelles

Définition 9.16 (Représentation graphique)

La représentation graphique d'une ***suite réelle*** u est l'ensemble des points du plan de coordonnées (n, u_n) obtenu lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

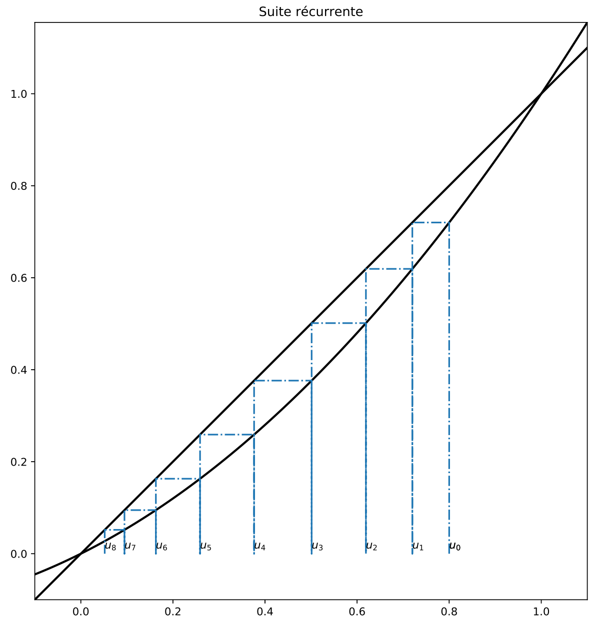
Exemple : représentation graphique de la suite $u : n \in \mathbb{N} \mapsto u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$.



Définition 9.17 (Représentation graphique d'une suite récurrente)

Lorsque la suite est définie par récurrence $u : \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & \in & \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array} \right.$, il est souvent plus aisé pour observer son « comportement » (on parle plutôt de sa ***dynamique***) de la représenter graphiquement en traçant la représentation graphique de la fonction f, la droite d'équation $y = x$, puis en utilisant ces deux représentations graphiques pour obtenir de proche en proche les valeurs des termes de la suite u sur l'axe des abscisses.

Exemple : représentation graphique de la suite $u : \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & \frac{4}{5} \\ u_{n+1} & = & \frac{u_n^2 + u_n}{2} \end{array} \right.$.



Définition 9.18 (Suites majorées, minorées)

On dit qu'une ***suite réelle*** u est ***majorée*** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$.
On dit qu'une ***suite réelle*** u est ***minorée*** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$.

Remarque

Comme il n'existe pas de relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations $+$ et $\times$, les notions de suites majorées et minorées ne sont pas définies sur $\mathbb{C}$. Cependant, la définition suivante est valable pour les suites réelles ***et complexes*** :

Définition 9.19 (Suites bornées)

On dit qu'une suite ***réelle ou complexe*** u est ***bornée*** si la suite réelle $|u|$ est majorée.

Proposition 9.20

Une suite ***réelle*** u est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Démonstration

Définition 9.21 (Suites monotones)

On dit qu'une ***suite réelle*** u est ***croissante*** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
On dit qu'une ***suite réelle*** u est ***décroissante*** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.
On dit qu'une ***suite réelle*** est ***monotone*** si elle est croissante ou décroissante.
Lorsque les inégalités sont strictes, on dit que la suite est ***strictement*** croissante ou ***stric-***

tement décroissante, et par conséquent ***strictement*** monotone.

Méthode

Pour étudier la monotonie d'une suite u on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Cependant, dans le cas d'une suite $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ définie par récurrence,
$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$ dépend de la valeur de u_n.
Dans ce cas, pour montrer que la suite est monotone, on cherchera des ***intervalles*** $I \subset \mathbb{R}$ tels que

- $\forall x \in I, f(x) \in I$: on dit que l'intervalle I est ***stable par*** f ;
- g est de signe constant sur I.

Cette méthode sera précisée lors du chapitre sur la continuité.

Ex. 9.8 Soit $u : \begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n^2 + u_n}{2} \end{cases}$ (voir représentation graphique précédente).
Montrer que si $u_0 \in [0; 1]$, alors u est décroissante.

Cor. 9.8

III. Suites arithmétiques, géométriques et récurrentes linéaires

III.1. Suites arithmétiques

Définition 9.22

Une suite u est dite ***arithmétique*** s'il existe un nombre r (réel ou complexe) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé ***raison*** de la suite u.

Propriété 9.23

u est une suite arithmétique si et seulement si $\exists r \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

Démonstration

Proposition 9.24 (Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = n\frac{u_{p+1} + u_{p+n}}{2}$$

Autrement dit, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique du premier et du dernier de ces termes.

Démonstration

Démonstration faite au chapitre 1, section II.5.

III.2. Suites géométriques

Définition 9.25

Une suite u est dite ***géométrique*** s'il existe un nombre q (réel ou complexe) tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$.
q est appelé ***raison*** de la suite u.

Propriété 9.26

u est une suite géométrique si et seulement si $\exists q \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.

Démonstration

La démonstration est similaire à celle faite pour les suites arithmétiques.

Proposition 9.27 (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = u_{p+1} \frac{1-q^n}{1-q}$$

Démonstration

Démonstration faite au chapitre 1, section II.5.

Corollaire 9.28

Quels que soient $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{C}$, $x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.

III.3. Suites récurrentes linéaires

Définition 9.29

On appelle ***suite arithmético-géométrique*** toute suite définie pour $a, b \in \mathbb{K}$ par u :

$$\begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{K} \\ u_{n+1} & = & a u_n + b \end{cases}$$

Remarque

Si $a = 1$, on retrouve le cas particulier des suites arithmétiques, et si $b = 0$ on retrouve celui des suites géométriques.

Proposition 9.30

Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit u une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ $(a \neq 1)$. Alors :

u est la somme d'une suite géométrique v de raison a et d'une suite constante c ***vérifiant la même relation de récurrence que*** u.

Démonstration

Remarque

On peut faire une analogie entre les suites arithmético-géométriques et les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 (aussi curieux que cela puisse paraître au premier abord !).

En effet, considérons l'équation $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$. Pour obtenir ses solutions, il faut :

- .... ;
- ....
....

....
....

Définition 9.31

On appelle ***suite récurrente linéaire d'ordre 2*** toute suite définie pour $a, b \neq 0 \in \mathbb{K}$ par

$$u : \begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{K} \\ u_1 & \in & \mathbb{K} \\ u_{n+2} & = & au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

On appelle ***équation caractéristique associée*** à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{C}$

$$r^2 - ar - b = 0, \text{ de discriminant } \Delta = a^2 + 4b$$

Proposition 9.32

On obtient une formule explicite pour le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ en résolvant l'équation caractéristique puis

- si $\Delta \neq 0$ en écrivant $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$ où z_1, z_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ doivent être calculées de sorte à ce que $u_0 = \lambda z_1^0 + \mu z_2^0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$;

- si $\Delta = 0$ en écrivant $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ vérifient $u_0 = (\lambda \times 0 + \mu)z_0^0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu)z_0 = (\lambda + u_0)z_0$.

Démonstration
La démonstration sera faite ultérieurement conformément au programme.

Remarque

- On remarquera ***la très grande ressemblance entre les propositions précédentes*** et ***celles concernant les équations différentielles linéaires*** du chapitre 8, section IV. Cette ressemblance entre des objets à priori très éloignés sera expliquée dans les chapitres sur les espaces vectoriels et justifie l'usage répété du mot ***linéaire*** pour qualifier ces objets.
- ***Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants***, la proposition 9.32 s'adapte lorsque $u_0, u_1, a, b \in \mathbb{R}$ à l'obtention d'une formule explicite pour les suites réelles :
  - ⋆ si $\Delta > 0$, on écrit $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$ où z_1, z_2 sont les deux solutions ***réelles*** distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ doivent être calculées de sorte à ce que $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$;
  - ⋆ si $\Delta = 0$, on écrit $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$ où z_0 est l'unique solution ***réelle*** double de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifient $u_0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + u_0)z_0$;
  - ⋆ si $\Delta < 0$, on écrit $u_n = r^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$ où $re^{\pm i\theta}$ sont les deux solutions ***complexes conjuguées*** distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifient $u_0 = \lambda$ et $u_1 = r\,[u_0 \cos(\theta) + \mu \sin(\theta)]$.

Méthode : Suites arithmético-géométrique et suites récurrentes linéaires

- Pour une suite arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b, a \neq 1$, ***on retient uniquement*** qu'une formule explicite est obtenue comme ***somme d'une suite géométrique de raison*** a ***et d'une solution particulière constante de la formule de récurrence***. Le premier terme de la suite géométrique peut être facilement obtenu par le calcul du premier terme de u.
- Pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0$, ***on retient uniquement*** la formule explicite suivant les valeurs du discriminant. Les valeurs de λ, μ peuvent être facilement obtenues par le calcul des deux premiers termes de u.
  On est aidé en cela par la ressemblance entre la méthode vue pour les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants et celle énoncée dans la proposition 9.32 et la remarque suivante.

Ex. 9.9 ***Suite de Fibonacci***
Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$.

Cor. 9.9

Ex. 9.10 Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.
Comment aurait-on pu obtenir la formule explicite sans le recours à la méthode du cours ?

Cor. 9.10

Ex. 9.11 Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$ et montrer que cette suite est périodique.

Cor. 9.11

Ex. 9.12 (Cor.) Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.
Simplifier $u_{100} + u_{101}$. Ce résultat se généralise-t-il ?

Important ! Ressemblance... oui mais !

Les équations différentielles linéaires sont données sous la forme $y'' + ay' + by = 0, b \neq 0$ tandis que les suites récurrentes linéaires vérifient
$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0 \Leftrightarrow u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0, b \neq 0$ ce qui explique la légère différence entre les équations caractéristiques associées (et leur discriminant).
En outre, si $\Delta = 0$ par exemple, la solution générale de $y'' + ay' + by = 0, b \neq 0$ s'écrit $y = (\lambda x + \mu)e^{z_0 x}$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique
tandis que la formule explicite obtenue pour $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0$ est $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique.

III.4. Démonstration par récurrence double

Méthode : Démonstration par récurrence double

Étant donné $n_0 \in \mathbb{Z}$, pour démontrer qu'un prédicat $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geqslant n_0$, on peut effectuer une ***récurrence double*** :

- **Initialisation** : ***on vérifie que*** $P(n_0)$ ***et*** $P(n_0+1)$ ***sont vrais***.
- **Hérédité** : on suppose que pour un entier $n \geqslant n_0$, les propriétés $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies, ***en énonçant clairement ces propriétés appelées hypothèses de récurrence***. On démontre alors, sous ces hypothèses, que $P(n+2)$ ***est vraie***.
- **Conclusion** : « ***La propriété est initialisée aux rangs*** n_0 ***et*** n_0+1 ***et héréditaire pour*** $n \geqslant n_0$***, elle est donc vraie pour tout entier*** $n \geqslant n_0$***.*** »

En résumé, on démontre :

$$\overbrace{P(n_0) \text{ et } P(n_0+1)}^{\text{Initialisation}} \Rightarrow P(n_0+2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{\big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \Rightarrow P(n+2)}_{\text{Hérédité}} \Rightarrow \ldots$$

Ex. 9.13 ***Suite de Fibonacci (bis)***
Sans utiliser la formule explicite obtenue à l'exercice 9.9, montrer que la suite de Fibonacci définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$ vérifie :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.

Cor. 9.13

Ex. 9.14 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on pose

$$\Pi_n(z) = z^n + \frac{1}{z^n} \quad \text{et} \quad Z = z + \frac{1}{z}$$

Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \Pi_n(z) = P_n(Z)$$

Montrer que les racines de P_n sont réelles et appartiennent à $[-2; 2]$.

IV. Limite d'une suite réelle

Dans cette section, les suites considérées sont des ***des suites réelles***.

IV.1. Limite finie

Définition 9.33

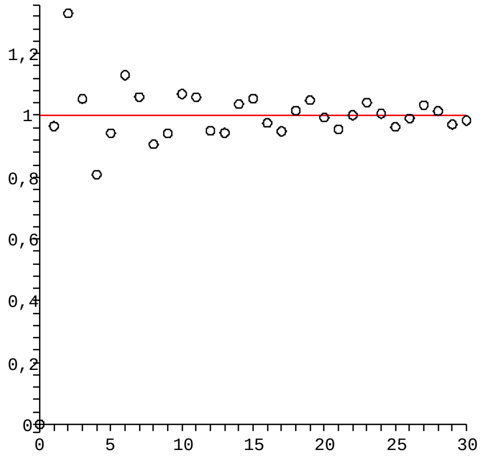
On appelle ***intervalle non trivial*** de $\mathbb{R}$ tout intervalle non vide et non réduit à un point.

Définition 9.34

On dit qu'une suite réelle u ***tend vers*** le réel α (ou ***converge vers*** α) si tout intervalle fermé non trivial centré sur α contient ***tous les termes de la suite à partir d'un certain rang***.α est appelé ***limite de la suite*** u.
Une suite ***qui converge vers un nombre réel*** est dite ***convergente***.
Sinon, elle est dite ***divergente***.

Notation

Avec des quantificateurs cela s'écrit : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \alpha| \leqslant \epsilon$.
On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.



Remarque

- N dépend à priori de ϵ et généralement, plus ϵ est petit, plus N doit être choisi grand.
- Il découle immédiatement de la définition que
  $|u_n| \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \Leftrightarrow u_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Méthode

Pour montrer qu'une suite u converge vers α ***à l'aide de cette définition*** :

1) on se donne une valeur $\epsilon > 0$
   « ***Soit*** $\epsilon > 0$***.*** »
2) on trouve un rang N adapté à ϵ
   « ***Montrons qu'il existe*** $N \in \mathbb{N}$ ***tel que pour tout entier*** $n \geq N, |u_n - \alpha| \leqslant \epsilon$***.*** »

On peut aussi faire une démonstration par analyse/synthèse.

Ex. 9.15 Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Cor. 9.15

Proposition 9.35

Si u converge vers $l > 0$, alors il existe un rang N à partir duquel $u_n > 0$.

Démonstration

IV.2. Unicité de la limite d'une suite convergente

Lemme 9.36

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence :

$x = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, |x| \leqslant \epsilon$

Démonstration

Proposition 9.37

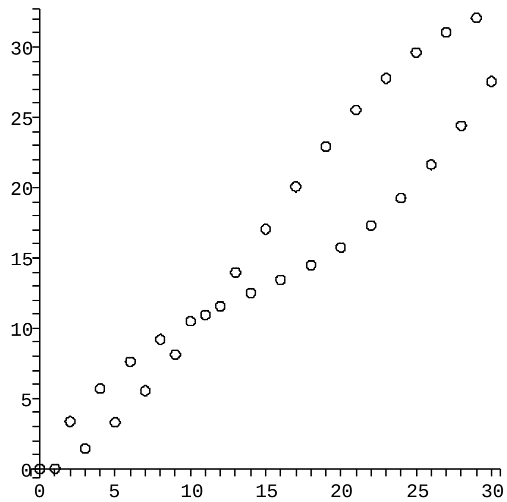
La limite d'une suite convergente est unique.

Démonstration

IV.3. Limite infinie

Définition 9.38

On dit qu'une suite réelle u ***tend vers*** $+\infty$ (ou ***diverge vers*** $+\infty$) si tout intervalle du type $[A, +\infty[$ contient ***tous les termes de la suite à partir d'un certain rang***.



Notation

Avec des quantificateurs :

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition 9.39

De même, on dit que u ***tend vers*** $-\infty$ (ou ***diverge vers*** $-\infty$) et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si

....

Remarque

N dépend à priori de A et plus $|A|$ est grand, plus N doit être choisi grand.

Méthode

Pour montrer qu'une suite u diverge vers $\pm\infty$ ***à l'aide de cette définition*** :

1) on se donne une valeur $A \in \mathbb{R}$

« ***Soit*** $A \in \mathbb{R}$. »

2) on trouve un rang N adapté à A

« ***Montrons qu'il existe*** $N \in \mathbb{N}$ ***tel que quel que soit*** $n \geqslant N, u_n \geqslant A$ »
pour une suite divergeant vers $+\infty$
ou
« ***Montrons qu'il existe*** $N \in \mathbb{N}$ ***tel que quel que soit*** $n \geqslant N, u_n \leqslant A$ »
pour une suite divergeant vers $-\infty$.

On peut aussi faire une démonstration par analyse synthèse.

Ex. 9.16 Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^p = +\infty$.

Cor. 9.16

Proposition 9.40

La limite (finie ou infinie) d'une suite est unique.

IV.4. Propriété

Propriété 9.41

Si u est une suite convergente alors elle est bornée.
Si u diverge vers $\pm\infty$ alors elle n'est pas bornée.
Les réciproques sont fausses en général.

Démonstration

IV.5. Opérations sur les limites finies

Théorème 9.42

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l_2 \in \mathbb{R}$ alors

1) Combinaisons linéaires : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda l_1 + \mu l_2$.
2) Produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = l_1 l_2$.
3) Quotient : si $l_1 \neq 0$, alors $\dfrac{v}{u}$ est définie à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{l_2}{l_1}$.

Démonstration

IV.6. Passage à la limite dans une inégalité

Théorème 9.43

Si u et v sont deux suites réelles convergeant vers l_1 et l_2 et telles que à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $l_1 \leqslant l_2$.
Si à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, on ne peut rien affirmer de plus : on a toujours $l_1 \leqslant l_2$.

Démonstration

V. Théorèmes d'existence d'une limite

V.1. Théorèmes des gendarmes

Théorème 9.44

Si u et v sont deux suites réelles et l un réel tels que u converge vers 0 et à partir d'un certain rang $|v_n - l| \leqslant u_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Théorème 9.45 (Théorème des gendarmes)

Si u, v et w sont trois suites réelles telles que u et w convergent vers la même limite l et à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Théorème 9.46

Soient u et v deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

Corollaire 9.47

La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$,

- diverge vers $+\infty$ si $a > 1$;
- est constante égale à 1 si $a = 1$ (donc converge vers 1) ;
- converge vers 0 si $-1 < a < 1$;
- n'admet pas de limite si $a \leqslant -1$.

Démonstration

V.2. Suites monotones

Théorème 9.48

Toute suite réelle croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

Théorème 9.49

Toute suite réelle décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème 9.50 (Théorème de convergence monotone)

Toute suite réelle croissante majorée converge vers sa borne supérieure.
Toute suite réelle décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.

Démonstration

Ex. 9.17 On reprend la suite $u : \begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n^2 + u_n}{2} \end{cases}$ définie dans un précédent exercice.
Nous avons montré que si $u_0 \in [0;1]$ alors u est décroissante.
Montrer de plus que, dans ce cas, elle est convergente.

Cor. 9.17

V.3. Suites adjacentes

Définition 9.51

On dit que deux suites u et v sont adjacentes si $\begin{cases} \text{l'une est une suite croissante} \\ \text{l'autre est une suite décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \end{cases}$

Théorème 9.52 (Théorème des suites adjacentes)

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.

Démonstration

Ex. 9.18 Soient u et v les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que u et v sont adjacentes.

VI. Compléments

VI.1. Suites extraites

Définition 9.53

Étant donnée une suite u, on dit que v est une ***suite extraite*** de u s'il existe une injection croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}$.

Proposition 9.54

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Proposition 9.55

Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite l, alors u converge aussi vers l.

Ex. 9.19 On donne $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}\right)$. Expliciter les suites extraites $(v_n)_{n\in N} = (u_{6n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in N} = (u_{6n+4})_{n\in\mathbb{N}}$.
Que peut-on en conclure pour la suite u ?

Cor. 9.19

VI.2. Suites complexes

Définition 9.56

Étant donnée une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexe, on définit les suites $\mathcal{R}e\,(z) = (\mathcal{R}e\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}, \mathcal{I}m\,(z) = (\mathcal{I}m\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $\bar{z} = (\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $|z| = \big(|z_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 9.57

On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - l| = 0$.
Sinon, on dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Notation

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$.

Important !

Les limites infinies ***ne sont pas définies pour les suites complexes***.

Théorème 9.58

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{R}e\,(z_n) = \mathcal{R}e\,(l) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{I}m\,(z_n) = \mathcal{I}m\,(l) \end{cases}$$

Démonstration

Remarque

Ce théorème permet d'étudier les suites complexes en se ramenant aux suites réelles. Il permet aussi de transférer certaines propriétés des suites réelles aux suites complexes : limite d'une somme, d'un produit, etc...

Important !

Tous les théorèmes concernant les suites réelles faisant intervenir la relation d'ordre ....
....
....

VI.3. Droite numérique achevée

Définition 9.59

On appelle ***droite numérique achevée*** l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Notation

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Remarque

On peut prolonger les lois de $(\mathbb{R}; +; \times)$ à $\overline{\mathbb{R}}$ par analogie avec les théorèmes opératoires sur les limites mais pas totalement à cause des cas d'indétermination.

Ainsi, soit $l \in \mathbb{R}$, on pose :

$l + \infty =$..............................	$l - \infty =$..............................
$+\infty + \infty =$..........................	$-\infty - \infty =$..........................
$-\infty + \infty =$..........................	$+\infty - \infty =$..........................

De même, soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_-^*$, on a :

$a \times (+\infty) =$..........................	$a \times (-\infty) =$..........................
$b \times (+\infty) =$..........................	$b \times (-\infty) =$..........................
$(+\infty) \times (+\infty) =$......................	$(-\infty) \times (-\infty) =$......................
$(-\infty) \times (+\infty) =$......................	$(+\infty) \times (-\infty) =$......................
$0 \times (+\infty) =$..........................	$0 \times (-\infty) =$..........................

Ces tableaux peuvent être aussi vus comme des tableaux récapitulatifs des opérations sur les limites. Ils sont complétés pour $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0^+$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ par $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0^+$.

On retiendra enfin que les limites de la forme $1^{\pm\infty}$, $\pm\infty^0$ et 0^0 ....

VI.4. Exercice de synthèse

Ex. 9.20 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$.

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ I_{n+1} en fonction de I_n.
3) Calculer I_2, I_3 et I_4.
4) Montrer qu'il existe une suite d'entiers positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $I_n = (-1)^n (a_n e - n!)$.
5) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive.
6) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
7) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a_n}$ et en déduire une approximation rationnelle de e à 10^{-3} près.

VII. Correction des exercices

Cor. 9.3 :

1) En deux temps :
   - Soit $y \in B$. $\forall x \in A, x \leq y$ donc y est un majorant de A et $\sup A \leq y$.
     Nous venons de démontrer que $\forall y \in B, \sup A \leq y$.
   - Ainsi, B est minoré par $\sup A$ et $\inf B \geq \sup A$.
2) Supposons que $\sup A = \inf B$ et soit $\epsilon > 0$.
   Soit $u = \sup A - \frac{\epsilon}{2}$ et $v = \inf B + \frac{\epsilon}{2}$. D'après le lemme 9.10, il existe $x \in A$ tel que $u < x < \sup A$ c'est-à-dire $-\sup A < -x < -u$, et $y \in B$ tel que $\inf B < y < v$.
   En faisant la somme des deux inégalités, on obtient l'existence de $(x; y) \in A \times B$ tels que $0 < y - x < v - u = \epsilon$.
   Réciproquement, supposons que $\forall \epsilon > 0, \exists (x; y) \in A \times B, y - x < \epsilon$. Soit $\epsilon > 0$ et $x \in A, y \in B$ tels que $y - x < \epsilon$.
   On a donc $\inf B \leqslant y < x + \epsilon \leqslant \sup A + \epsilon$. Autrement écrit et en utilisant le premier résultat démontré, pour tout $\epsilon > 0$, $\sup A \leqslant \inf B < \sup A + \epsilon$.
   Ce qui permet de conclure que $\sup A = \inf B$ (si l'on n'est pas convaincu par la précédente propriété, on fait une démonstration par l'absurde).

Cor. 9.12 : Équation caractéristique : $z^2 + z - 2 = 0$ de discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu (-2)^n$.
Or $u_0 = 0 = \lambda + \mu$ et
$u_1 = 3 = \lambda - 2\mu$
donc $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (-2)^n$$

On a donc $u_{100} + u_{101} = 1 - (-2)^{100} + 1 - (-2)^{101} = 2 - (2^{100} - 2^{101}) = 2(1 + 2^{99}) = 2u_{99}$.
Ce résultat se généralise évidement puisqu'il s'agit en fait de la formule de récurrence donnée pour u !

Maths - Chapitre 10

Calcul matriciel

I. Ensembles de matrices

I.1. Introduction

Essentiellement, les matrices sont des tableaux rectangulaires de nombres. En cela, elles se rapprochent des ***tableaux*** `numpy` vus en informatique.
A titre d'exemple, voici deux matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \pi \\ \sqrt{2} & -5 & e \end{pmatrix}$$

Elles ont de très nombreuses applications : comme un outil de calcul et de présentation pour la résolution des systèmes linéaires par exemple, mais aussi, de façon plus étonnante, en physique et en Sciences de l'ingénieur (on utilise par exemple, en mécanique, la ***matrice d'inertie*** d'un solide, ou encore la ***matrice des contraintes*** d'un élément de volume). On peut aussi citer les matrices de convolution en informatique/intelligence artificielle.
Le présent chapitre vise à introduire ***les propriétés calculatoires*** des matrices :

- non seulement pour introduire des ***opérations sur les matrices*** permettant une écriture symbolique très compacte et efficace des opérations sur les lignes des systèmes linéaires ;
- mais encore pour étudier les ***propriétés des opérations matricielles*** qui ***se distinguent en bien des points des propriétés habituelles des opérations sur les scalaires***.

Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K}, +, .)$ désigne un corps, pour nous $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et n, p, q des entiers naturels non nuls.
Commençons par donner la définition d'une matrice :

Définition 10.1 (Matrice)

On appelle ***matrice*** A de ***type*** (n,p) ou ***d'ordre*** (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau à n ***lignes et*** p ***colonnes*** d'éléments de $\mathbb{K}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant p}}$$

Les a_{ij} sont appelés ***coefficients*** de la matrice.
Lorsque $p = 1$, la matrice est appelée ***matrice-colonne*** ou encore ***vecteur-colonne***.
Lorsque $n = 1$, la matrice est appelée ***matrice-ligne*** ou encore ***vecteur-ligne***.

Comme l'indique la définition précédente, une matrice se caractérise par ***son nombre de lignes*** n, ***son nombre de colonnes*** p et par la valeur de ses coefficients.
Cette remarque conduit à définir divers ensembles de matrices, regroupant toutes les matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes :

Notation

L'ensemble des matrices de coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Dans le cas où $n = p$, on note plus simplement $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices de cet ensemble sont appelées ***matrices carrées***.
L'ensemble des vecteurs-colonne est noté $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou plus simplement $\mathbb{K}^n$.
L'ensemble des vecteurs-ligne est noté $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ ou plus simplement $\mathbb{K}^p$.

I.2. Combinaisons linéaires de matrices de même ordre

Définition 10.2 (Multiplication par un scalaire)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit la matrice λA par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant p}}$$

Définition 10.3 (Addition de matrices de même ordre)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit la matrice $A + B$ par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant p}}$$

Définition 10.4 (Combinaison linéaire de matrices de même ordre)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, toute matrice de la forme $\lambda A + \mu B$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ est appelée ***combinaison linéaire des matrices*** A ***et*** B.

On définit de même l'addition ou la combinaison linéaire de N matrices de même ordre, où N est un entier supérieur ou égal à 2.

I.3. Matrices élémentaires $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Notation

Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et tout $j \in [\![1; p]\!]$, on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient e_{ij} qui est égal à 1. Autrement dit

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

I.4. Produits de matrices

Ex. 10.1 Effectuer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & -4 & 0 \\ 3i & 2+i & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2+3i \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3+i & 7+6i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & -4 & 0 \\ 3i & 2+i & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Définition 10.5

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $A \times B = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par

$$AB = (c_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant q}} \text{ où } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Autrement dit, pour obtenir le coefficient c_{ij} de AB, on effectue les « produits scalaires » du i-ème vecteur ligne de A par le j-ème vecteur colonne de B.

Remarque

Pour que le produit de deux matrices soit possible, il faut et il suffit que ***le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit égal au nombre de lignes de la matrice de droite***.
Le produit possède alors ***le même nombre de lignes que la matrice de gauche et le même nombre de colonnes que la matrice de droite***.
D'autre part, ***les produits*** AB ***et*** BA ne sont tous les deux possibles que si ***les matrices***

A ***et*** B ***sont d'ordre*** (n,p) ***et*** (p,n).
Cette impossibilité, en général, d'échanger les matrices A ***et*** B est une première preuve que ***le produit de matrices n'est pas commutatif***. En voici une autre :

Ex. 10.2

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$

I.5. Matrice nulle

Définition 10.6

On appelle matrice ***nulle*** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Notation

On note $0_{n,p}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.6. Matrices carrées particulières

a) Matrices commutantes

Il peut arriver que ***pour deux matrices carrées de même ordre*** A ***et*** B ***on ait*** $AB = BA$.

$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 36 \\ 36 & 23 \end{pmatrix}$, $AB =$, $BA =$

Définition 10.7

Pour deux matrices carrées A et B de même ordre n, on dit que A et B ***commutent*** si $AB = BA$.

b) Diagonale d'une matrice

Définition 10.8

On appelle ***diagonale*** d'une matrice carrée les coefficients a_{ii}, $i \in [\![1; n]\!]$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la diagonale sont appelés ***coefficients diagonaux***.

Définition 10.9

On appelle ***matrice diagonale*** A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice dont ***tous les coefficients sont nuls*** à l'exception éventuellement des coefficients diagonaux.

Définition 10.10

On appelle matrice ***identité*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n, la matrice diagonale dont ***tous les coefficients diagonaux valent 1***.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Matrices triangulaires

Définition 10.11

On appelle ***matrice triangulaire supérieure*** toute matrice carrée A dont les ***coefficients sous-diagonaux sont nuls*** : $\forall i > j, a_{ij} = 0$.

Définition 10.12

On appelle ***matrice triangulaire inférieure*** toute matrice carrée A dont les ***coefficients sur-diagonaux sont nuls*** : $\forall j > i, a_{ij} = 0$.

$$T_S = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \qquad T_I = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Définition 10.13

On appelle matrice triangulaire toute matrice triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure.

d) Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 10.14

On appelle ***matrice symétrique*** toute matrice A pour laquelle $\forall i, j \in [\![1; n]\!], a_{ij} = a_{ji}$.

Définition 10.15

On appelle ***matrice antisymétrique*** toute matrice carrée A pour laquelle
$\forall i, j \in [\![1; n]\!], a_{ij} = -a_{ji}$.
En particulier, pour $i = j$, on a :...

$$S = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Notation

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices ***symétriques*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices ***antisymétriques*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.7. Propriétés du produit matriciel

Propriété 10.16

L'addition de matrices est commutative, associative, possède un élément neutre qui est la matrice nulle. Par ailleurs toute matrice possède une matrice opposée.
Concernant la multiplication matricielle et la multiplication par un scalaire : soient n, p, q et r quatre entiers naturels non nuls.
Associativité :
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), (AB)C = A(BC)$.
$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
Élément neutre :
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), 1_{\mathbb{K}}.A = A$.
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AI_n = I_nA = A$.
Distributivité :
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), A(B + C) = AB + AC$.
$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (A + B)C = AC + BC$.

Démonstration

Remarque

La distributivité de la multiplication matricielle autorise à factoriser ***à droite*** ou ***à gauche***.

Définition 10.17

On définit la puissance k-ième d'une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ par
$A^k = \underbrace{A \times ... \times A}_{k \text{ facteurs}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $A^0 = I_n$.

La définition précédente n'est rendue possible que parce que le produit matriciel est associatif.

Propriété 10.18

Toute combinaison linéaire de matrices diagonales est une matrice diagonale.
Toute combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
Toute combinaison linéaire de matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Démonstration

Propriété 10.19

Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Démonstration

I.8. Des règles qui ne sont pas valables pour les produits de matrices

L'exercice 10.2 montre que ***la multiplication de deux matrices carrées de même ordre n'est pas commutative*** !

Un produit de deux matrices non nulles peut être nul !
Autrement dit, si $AB = 0$... on ne peut rien conclure !
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$

Une matrice carrée non nulle peut avoir une puissance k-ième nulle !
Autrement dit, si $A^k = 0$... On ne peut rien conclure !
$A = \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}$, $A^2 =$

Les produits d'une même matrice par deux matrices distinctes peuvent être égaux !
Autrement dit, si $AB = AC$... on ne peut rien conclure en général !
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $AB =$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AC =$
ou encore, $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $AD =$

Les identités remarquables ne sont plus valables en général !
En effet, en développant $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) =$ ....
on montre que $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2 \Leftrightarrow$ ....

I.9. Identités remarquables pour *les matrices carrées qui commutent*

Proposition 10.20

Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre $n \in \mathbb{N}^*$ ***qui commutent***, alors $\forall p \in \mathbb{N}$:

1) $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k}B^k$
2) $A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^{p-k}B^k\right)$

Démonstration

II. Méthode du pivot et calcul matriciel

II.1. Matrices et systèmes linéaires

Proposition 10.21

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, le produit AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Démonstration

Un système linéaire peut s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_p = b_2 \\ ... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right. \Leftrightarrow AX = B$$

où $A = (a_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant p}}$, $B = (b_i)_{i \leqslant n}$ et $X = (x_j)_{j \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ est le p-uplet inconnu.
Réciproquement, on peut présenter la résolution d'un système linéaire sous forme matricielle.
Ex. 10.3

1) Résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ et de paramètre $s \in \mathbb{R}$:
$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} (s+2)x & + & 3y & = & 2s+1 \\ 2sx & + & (s+1)y & = & 3s-1 \end{array}\right.$
2) Trouver un système paramétré par s qui possède un unique couple solution pour $s \in \mathbb{R}\backslash\{1;2\}$, une infinité de solutions pour $s = 1$ et aucune solution pour $s = 2$ puis le résoudre.

Cor. 10.3

II.2. Systèmes compatibles/incompatibles

Définition 10.22 (Système compatible)

Étant donné un système $\mathcal{S}$ s'écrivant $AX = B$ sous forme matricielle avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le vecteur inconnu, on dit que

- $\mathcal{S}$ est ***compatible s'il existe une combinaison linéaire des colonnes de*** A ***égale à*** B ;
- $\mathcal{S}$ est ***incompatible sinon***.

Proposition 10.23

L'ensemble des solutions d'un système linéaire est :

- ***vide*** si et seulement si le système est ***incompatible*** ;
- ***non vide*** si et seulement si le système est ***compatible***.
  De plus, dans ce dernier cas, les solutions du système sont les vecteurs de la forme $X_0 + Y$ où X_0 est une solution particulière du système et Y une solution quelconque du ***système*** $AY = 0_{p,1}$ ***homogène associé à*** $\mathcal{S}$.

Démonstration

II.3. Matrices d'opérations élémentaires

Définition 10.24 (Matrice de transvection)

On appelle ***matrice de transvection de*** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme $V_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$ appartiennent à $[\![1; n]\!]$. Autrement dit une matrice de transvection est une matrice de la forme

$$V_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} \quad & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Définition 10.25 (Matrice de transposition)

On appelle ***matrice de transposition de*** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme $T_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ où $i \neq j$ appartiennent à $[\![1; n]\!]$. Autrement dit une matrice de transposition est une matrice de la forme

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Définition 10.26 (Matrice de dilatation)

On appelle ***matrice de dilatation de*** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme
$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i \in [\![1; n]\!]$. Autrement dit une matrice de dilatation est une matrice de la forme

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Définition 10.27 (Matrice d'opération élémentaire)

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une ***matrice d'opération élémentaire*** si c'est une matrice de transvection, de transposition ou de dilatation.

Remarque

Les notations $V_{ij}(\lambda)$, T_{ij} et $D_i(\lambda)$ pour les matrices d'opérations élémentaires ***ne sont pas des notations officielles***. Elles ne sont introduites que dans le but de faciliter l'usage des matrices d'opérations élémentaires dans la suite de ce chapitre.
En revanche elles ne peuvent pas être utilisées en dehors de ce chapitre (en colle, en devoir, aux concours...) à moins d'en redonner la définition.

Ex. 10.4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Calculer $AV_{1,2}(2)$, $V_{1,2}(2)A$, $AT_{2,3}$, $T_{2,3}A$, $AD_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et $D_2\left(\frac{1}{2}\right)A$.

Cor. 10.4

II.4. Interprétation des produits par les matrices d'opérations élémentaires

Propriété 10.28

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Multiplier A ***à gauche*** par $V_{ij}(\lambda) \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***ajouter à la*** i***-ème ligne de*** A ***le produit de*** j***-ème ligne de*** A ***par*** λ.
Multiplier A ***à gauche*** par $T_{ij} \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***échanger les*** i***-ème et*** j***-ème lignes de*** A.

Multiplier A ***à gauche*** par $D_i(\lambda) \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***multiplier à la*** i***-ème ligne de*** A ***par*** λ.
Multiplier A ***à droite*** par $V_{ij}(\lambda) \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***ajouter à la*** j***-ème colonne de*** A ***le produit de*** i***-ème colonne de*** A ***par*** λ.
Multiplier A ***à droite*** par $T_{ij} \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***échanger les*** i***-ème et*** j***-ème colonnes de*** A.
Multiplier A ***à droite*** par $D_i(\lambda) \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***multiplier à la*** i***-ème colonne de*** A ***par*** λ.

Démonstration

Définition 10.29 (Matrices équivalentes par ligne)

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites ***équivalentes par ligne*** si elles se déduisent l'une de l'autre par un produit fini ***à gauche*** de matrices élémentaires.

Définition 10.30 (Matrices équivalentes par colonne)

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites ***équivalentes par colonne*** si elles se déduisent l'une de l'autre par un produit fini ***à droite*** de matrices élémentaires.

Notation

Si deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes par ligne, on note $A \underset{L}{\sim} A'$.
Si deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes par colonne, on note $A \underset{C}{\sim} A'$.

III. Matrices carrées inversibles

III.1. Définition

Proposition 10.31

Si $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $BA = AC = I_n$, alors $B = C$.

Démonstration

Définition 10.32 (Matrice carrée inversible)

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est ***inversible*** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

On dit alors que B est ***l'inverse*** de la matrice A.

Notation

Si A est une matrice inversible, on note A^{-1} son inverse.

Ex. 10.5 Montrer qu'il existe des matrices carrées non nulles non inversibles.

Cor. 10.5

Proposition 10.33

Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles. De plus :

- ***Matrices de transvection*** : $V_{ij}(\lambda)^{-1} = V_{ij}(-\lambda)$;
- ***Matrices de transposition*** : $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$;
- ***Matrices de dilatation*** : $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$.

Démonstration

C'est une conséquence directe de la propriété 10.28.

III.2. Groupe linéaire

Définition 10.34

On appelle ***groupe linéaire d'ordre*** n et on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 10.35

1) $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$;
2) si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3) si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration

III.3. Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Le théorème précédent conduit à la méthode suivante :

Méthode : Obtention de l'inverse d'une matrice

Pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, obtenir la matrice A^{-1} ***revient à appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice*** $(A|I_n)$.
À la fin de l'algorithme, la matrice obtenue sera alors $(I_n|A^{-1})$.

Ex. 10.6 Ces matrices sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix},\ C_t = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$$

III.4. Seconde méthode pour l'obtention de l'inverse d'une matrice

Méthode : Obtention de l'inverse d'une matrice

Pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, obtenir la matrice A^{-1} ***revient à appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice*** $(A|X)$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

À la fin de l'algorithme, la matrice obtenue sera alors $(I_n|A^{-1}X)$.

Ex. 10.7 (Cor.) Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ à l'aide de la méthode précédente.

IV. Transposée d'une matrice et compléments

IV.1. Transposée

Définition 10.36

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelle ***transposée de*** A la matrice B de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $\forall i \in [\![1;p]\!], \forall j \in [\![1;n]\!], b_{i,j} = a_{j,i}$.

Notation

On note A^{T} la transposée de la matrice A.

Définition 10.37

L'application trans : $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^{\mathrm{T}} \end{array} \right.$ est appelée ***transposition***.

IV.2. Matrices symétriques et antisymétriques

Proposition 10.38

La définition des matrices symétriques et antisymétriques se traduit à l'aide de la transposition par :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice symétrique si et seulement si $A^{\mathrm{T}} = A$;
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice antisymétrique si et seulement si $A^{\mathrm{T}} = -A$.

IV.3. Transposée des matrices d'opérations élémentaires

Proposition 10.39

La transposée des matrices d'opérations élémentaires vérifie :
- pour $i \neq j \in [\![1;n]\!]$, $V_{ij}(\lambda)^{\mathrm{T}} = V_{ji}(\lambda)$;
- $T_{ij}^{\mathrm{T}} = T_{ji} = T_{ij}$ car les matrices de transposition sont symétriques ;
- pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $D_i(\lambda)^{\mathrm{T}} = D_i(\lambda)$.

IV.4. Propriétés

Propriété 10.40

La transposition vérifie :
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$;
- si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), (A^{-1})^{\mathrm{T}} = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$.

Démonstration

V. Correction des exercices

Cor. 10.7 : Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a :

$$\begin{aligned}
(A|X) &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 & b \\ 2 & -3 & 2 & c \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -5 & a-3b \\ 0 & 13 & -4 & 2a-3c \end{pmatrix} && \begin{array}{r} L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \end{array} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & a \\ 0 & 5 & -5 & a-3b \\ 0 & 0 & 45 & -3a+39b-15c \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow 5L_3 - 13L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 45 & 30 & 0 & 16a-13b+5c \\ 0 & 15 & 0 & 2a+4b-5c \\ 0 & 0 & 15 & -a+13b-5c \end{pmatrix} && \begin{array}{r} L_1 \leftarrow 15L_1 - \frac{1}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 + \frac{1}{3}L_3 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{array} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 45 & 0 & 0 & 12a-21b+15c \\ 0 & 15 & 0 & 2a+4b-5c \\ 0 & 0 & 15 & -a+13b-5c \end{pmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4a-7b+5c}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2a+4b-5c}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a+13b-5c}{15} \end{pmatrix} && \begin{array}{r} L_1 \leftarrow \frac{1}{45}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{15}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{15}L_3 \end{array}
\end{aligned}$$

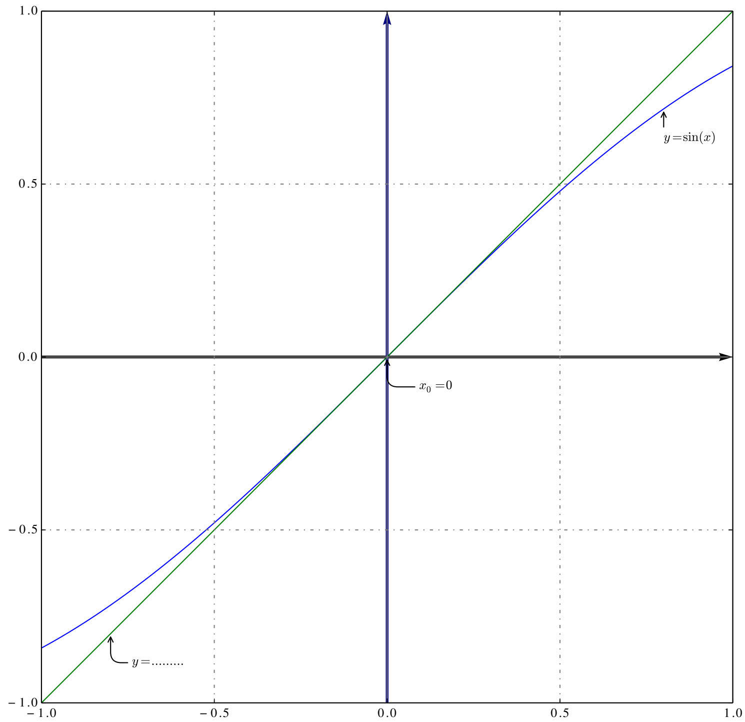
Ce dernier résultat prouve que A est inversible et que

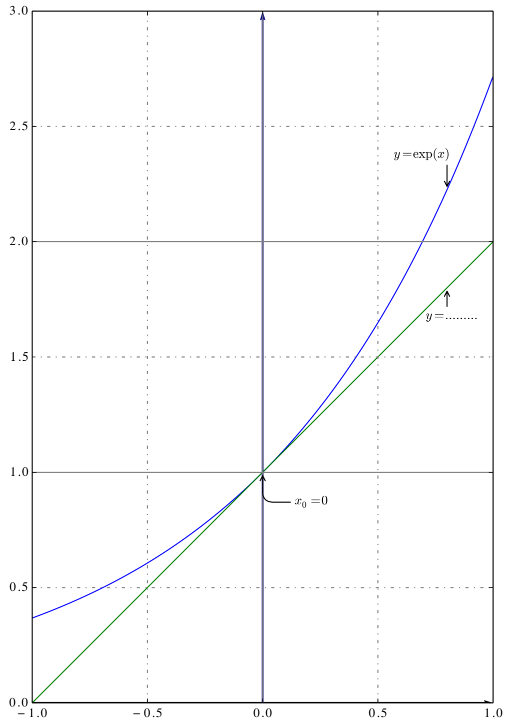
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{-7}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{15} & \frac{13}{15} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & 13 & -5 \end{pmatrix}$$

Maths - Chapitre 11

Développements limités

L'IDÉE fondamentale à l'origine des développements limités repose sur une généralisation de la notion de tangente : au voisinage d'un point x_0, la valeur $f(x_0+h)$ d'une fonction f dérivable peut être approximée par $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$, ce qui revient à approximer f par une fonction affine au voisinage de x_0.
Par exemple, au voisinage de 0 : $\sin h \approx$.................... ou encore $e^h \approx$....................





Peut-on obtenir des « approximations de meilleure qualité » à l'aide de polynômes de degré supérieur ?
L'objectif de ce chapitre est d'une part de clarifier la notion d'approximation d'une suite par une autre suite ou d'une fonction par une autre fonction, d'autre part d'élaborer des outils permettant d'obtenir des ***approximations polynomiales des fonctions usuelles***.

I. Équivalence, domination, négligeabilité

I.1. Notion de voisinage

Définition 11.1 (Voisinages d'un réel, voisinages de $\pm\infty$)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = -\infty$ ou $x_0 = +\infty$).
On dit que I est ***un voisinage de*** x_0 si :

- $x_0 = +\infty$ et I est un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;

- $x_0 = -\infty$ et I est un intervalle de la forme $]-\infty; A]$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- $x_0 \in \mathbb{R}$ et I est un intervalle de la forme $[x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon]$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

I.2. Relations de comparaison entre suites

Définition 11.2 (Équivalence de suites)

On dit que la suite u est ***équivalente à*** la suite v ***au voisinage de*** $+\infty$ si ***à partir d'un certain rang*** $n_0 \in \mathbb{N}$

- la suite v ne s'annule plus à partir du rang n_0 ;
- le quotient $\dfrac{u}{v}$ tend vers 1.

Notation

Si la suite u est équivalente à la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Définition 11.3 (Domination)

On dit que la suite u est ***dominée par*** la suite v ***au voisinage de*** $+\infty$ si ***à partir d'un certain rang*** $n_0 \in \mathbb{N}$

- la suite v ne s'annule plus à partir du rang n_0 ;
- le quotient $\dfrac{u}{v}$ est borné : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, m \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant M$.

Notation

Si la suite u est dominée par la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.

Définition 11.4 (Négligeabilité)

On dit que la suite u est ***négligeable devant*** la suite v ***au voisinage de*** $+\infty$ si ***à partir d'un certain rang*** $n_0 \in \mathbb{N}$

- la suite v ne s'annule plus à partir du rang n_0 ;
- le quotient $\dfrac{u}{v}$ tend vers 0.

Notation

Si la suite u est négligeable devant la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ ou plus simplement $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$.

Ex. 11.1 Comparer les suites :

- $u_n = n$ et $v_n = n^2$;
- $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$;
- $u_n = \frac{1}{n^3}$ et $v_n = \frac{1}{n}$;
- $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

Cor. 11.1

I.3. Relations de comparaison entre fonctions

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0 lui-même.

Définition 11.5 (Équivalence de fonctions)

On dit que la fonction f est ***équivalente à*** la fonction g ***au voisinage de*** x_0 si

- il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0) ;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Notation

Si la fonction f est équivalente à la fonction g au voisinage de x_0, on note $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

Définition 11.6 (Domination)

On dit que la fonction f est ***dominée par*** la fonction g ***au voisinage de*** x_0 si

- il existe un voisinage I de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0) ;
- le quotient $\dfrac{f}{g}$ est borné sur I : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, m \leqslant \dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant M$.

Notation

Si la fonction f est dominée par la fonction g au voisinage de x_0, on note $f(x) \underset{x\to x_0}{=} O\left(g(x)\right)$.

Définition 11.7 (Négligeabilité)

On dit que la fonction f est ***négligeable devant*** la fonction g ***au voisinage de*** x_0 si

- il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0) ;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Notation

Si la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de x_0, on note $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}\left(g(x)\right)$ ou plus simplement $f(x) = \underset{x_0}{o}\left(g(x)\right)$.

Ex. 11.2 Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de :

- $x \mapsto \sin(x)$;
- $x \mapsto \exp(x) - 1$;
- $x \mapsto \ln(1+x)$;
- $x \mapsto \cos(x) - 1$.

Cor. 11.2

I.4. Propriétés des équivalents

Important !

$\cos(x)$	est équivalent à	$1+x$	en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1+x} = 1$
-1	est équivalent à	-1	en 0... et partout ailleurs ! ***Mais***
$\cos(x)-1$	***n'est pas équivalent à***	x	en 0 d'après l'exercice précédent.

Il ***n'est donc pas autorisé de faire une somme d'équivalents*** !
On préférera pour les calculs la notion de ***développement limité*** que l'on verra plus loin.
Cependant les propriétés opératoires suivantes peuvent être utilisées dans les cas simples :

Propriété 11.8

Si $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ et $w(x) \underset{x\to x_0}{\sim} z(x)$ alors :

1) il existe un voisinage de x_0 sur lequel u et w ne s'annulent pas ;
2) $v(x) \underset{x\to x_0}{\sim} u(x)$ et $z(x) \underset{x\to x_0}{\sim} w(x)$;
3) $u(x)w(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)z(x)$;
4) $\dfrac{u(x)}{w(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{v(x)}{z(x)}$;
5) $\forall p \in \mathbb{Z}, u^p(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v^p(x)$ et si $v>0$ au voisinage de x_0, $\forall p \in \mathbb{R}, u^p(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v^p(x)$.

Démonstration

Ex. 11.3

1) Montrer que $\ln(e+x)$ et $\cos(x)$ sont équivalents pour $x \to 0$.
2) Trouver un équivalent simple de $\ln(e+x)-1$ pour $x \to 0$.

Cor. 11.3

Propriété 11.9 (Propriétés conservées par équivalence)

Si $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ alors :

1) il existe un voisinage de x_0 sur lequel u et v sont de même signe ;
2) $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$ existe si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)$ existe et en cas d'existence, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x)$.

Démonstration

I.5. Propriétés des « petit o »

Propriété 11.10 (Équivalent et « petit o »)

$u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ si et seulement si $u(x) = v(x) + \underset{x\to x_0}{o}(v(x))$.

Démonstration

Propriété 11.11 (Traduction des croissances comparées)

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

- $\ln^\alpha(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$;
- $x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{\gamma x}\right)$;
- si $\alpha > \beta$, $x^\alpha = \underset{x\to0}{o}\left(x^\beta\right)$ et $x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\alpha\right)$;
- enfin, quel que soit le réel λ, $\lambda^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$.

Ex. 11.4 Montrer que pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}_-^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}_-^*$,

1) $\ln^\alpha(x) = \underset{x\to0^+}{o}\left(x^\beta\right)$;

2) $e^{\gamma x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$.

Cor. 11.4

Remarque

On retiendra notamment que la propriété 11.10 permet d'utiliser les « petit o » pour traiter les questions concernant les équivalents. ***Cette propriété doit absolument être connue***.
De plus, la propriété $\alpha > \beta \Rightarrow x^\alpha = \underset{x\to0}{o}\left(x^\beta\right)$ est elle aussi d'une importante primordiale pour la suite du chapitre. Notons $f(x) \underset{0}{\ll} g(x)$ le fait que $f(x) = \underset{x\to0}{o}(g(x))$: on a alors les négligeabilités suivantes

Au voisinage de 0 : $\quad \ldots \underset{0}{\ll} x^3 \underset{0}{\ll} x^2 \underset{0}{\ll} x \underset{0}{\ll} 1 \underset{0}{\ll} \frac{1}{x} \underset{0}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{0}{\ll} \ldots$

Au voisinage de $+\infty$: $\quad \ldots \underset{\infty}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{\infty}{\ll} \frac{1}{x} \underset{\infty}{\ll} 1 \underset{\infty}{\ll} x \underset{\infty}{\ll} x^2 \underset{\infty}{\ll} x^3 \underset{\infty}{\ll} \ldots$

L'idée générale des développements limités est fondée sur cette propriété : ***nous allons approximer des fonctions au voisinage de*** 0 par des ***polynômes de degré*** n en ***négligeant tous les termes de degré supérieur à*** n.
Pour une approximation ailleurs qu'en 0***, on fera un changement de variable.***

Ex. 11.5 Écrire, avec les mêmes notations que dans la remarque précédente, les relations de négligeabilité

1) au voisinage de -3 ;
2) au voisinage de x_0.

Cor. 11.5

II. Développements limités

II.1. Définitions

Définition 11.12

On dit que f admet un ***développement limité à l'ordre*** n ***au voisinage de*** x_0 et on note f ***admet un*** $\mathrm{DL}_n(x_0)$ si

$$\exists(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n)$$

Ou encore, au voisinage de 0, en utilisant $h = x - x_0$ et le signe $\sum$ à la place des pointillés :

$$f(x_0 + h) = \ldots\ldots\ldots + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$$

La somme .... est appelée ***partie principale*** du DL.

$\underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n)$ ou $\underset{h \to 0}{o}(h^n)$ est appelé ***reste du*** DL.

Remarque

Comme le changement de variable $h = x - x_0$ est toujours possible, on considèrera souvent par la suite des développements limités en 0, ou on s'y ramènera par changement de variable. En particulier en l'absence d'indications, les « petit o » sont supposés être donnés au voisinage de 0.

II.2. Premier exemple

Développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

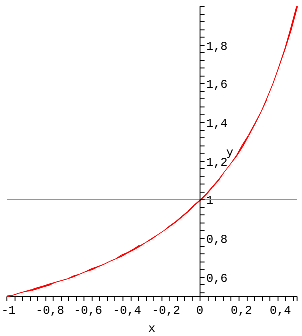
pour tout $x \in]-1; 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

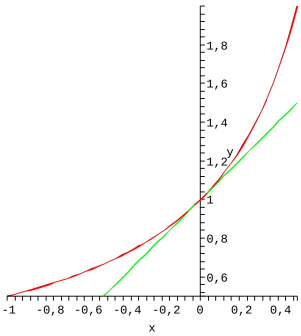
....

II.3. Interprétation géométrique

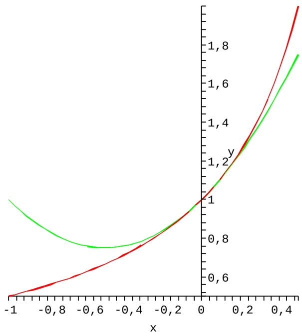
Plus l'ordre du DL est grand, plus la représentation graphique de sa partie principale se rapproche au voisinage de x_0 de $\mathcal{C}_f$.



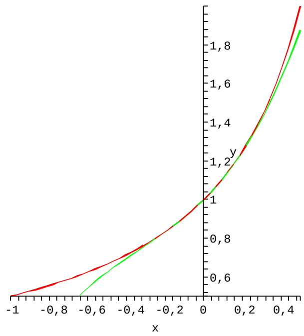
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto 1$



et $x \mapsto 1 + x$



et $x \mapsto 1 + x + x^2$



et $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$

II.4. DL, continuité, dérivabilité

Proposition 11.13

Soit x_0 ***un nombre réel***. Si f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$ alors :

- ou bien f est définie en x_0, auquel cas f est continue en x_0 ;
- ou bien f n'est pas définie en x_0, auquel cas f peut être prolongée en une fonction continue en x_0.

Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ alors f (ou son prolongement continu) est ***dérivable*** en x_0.
Ceci ne se généralise pas au cas $n \geq 2$, c'est-à-dire qu'il est possible qu'une fonction admette un $\mathrm{DL}_2(x_0)$ sans pour autant être deux fois dérivable en x_0.

Démonstration

II.5. Unicité

Proposition 11.14

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ alors il est unique.

Démonstration

Important !

En revanche, étant donné un $\mathrm{DL}_n(x_0)$, il existe une infinité de fonctions possédant ce développement limité :

II.6. Troncature et équivalent

Proposition 11.15

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$, alors $\forall k \in [\![0;n]\!]$, f admet un $\mathrm{DL}_k(x_0)$ dont la partie principale est la troncature de celle du $\mathrm{DL}_n(x_0)$.

Démonstration

Propriété 11.16 (Équivalent d'une fonction)

Étant donnés un réel $x_0 \in \mathbb{R}$, une fonction f définie sur un voisinage I de x_0 sauf éventuellement en x_0 et possédant sur I un développement limité, le premier terme non nul du développement limité de f au voisinage de x_0 est un équivalent de $f(x_0+h)$ au voisinage de $h \to 0$.

Démonstration

Ex. 11.6 Donner un équivalent de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - 1 - x - x^2$ au voisinage de 0.

II.7. Opérations sur les DL

Propriété 11.17

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de x_0 (sauf éventuellement en x_0) et possédant pour $n \in \mathbb{N}$ un développement limité à l'ordre n en x_0 de parties principales P et Q, alors :

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha f + \beta g$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0 de partie principale $\alpha P + \beta Q$;
- $f \times g$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0 dont partie principale est la troncature à l'ordre n de PQ ;
- si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0.

Démonstration

Théorème 11.18

Si f est dérivable sur I et si f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ obtenu en primitivant celui de f'.

Plus précisément, si $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $f(x) = f(0) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

Corollaire 11.19

Si f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ ***et si*** f' ***admet un*** $\mathrm{DL}_n(0)$ alors celui de f' est obtenu en dérivant celui de f.

Important !

La condition « f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ » est primordiale. Sans elle, on ne peut pas dériver.

Ex. 11.7 Soit n un entier positif. Obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ et $x \mapsto e^x$.

II.8. Formule de Taylor-Young

Définition 11.20 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^n(I)$)

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle réel I est ***de classe*** $\mathcal{C}^n$ ***sur*** I, si elle est n fois dérivable en tout point de I et si sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est continue.

Théorème 11.21 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \underset{x \to x_0}{o}((x-x_0)^n)$$

Démonstration

La démonstration sera effectuée dans le chapitre sur l'intégration.

Méthode : Utilisation de la formule de Taylor-Young

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors f admet pour $\mathrm{DL}_n(x_0)$ celui donné par la formule de Taylor-Young.
Cependant, il y a souvent plus simple pour obtenir ce développement limité.
La formule de Taylor-Young est de ce fait davantage un outil théorique qu'un outil pratique.

Important !

On rappelle (voir proposition 11.13) que f peut admettre un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ sans pour autant être $\mathcal{C}^n(x_0)$. Mais si $f \in \mathcal{C}^n(I)$, elle possède en tout point de I un unique développement limité à l'ordre n donné par la formule de Taylor-Young.

Ex. 11.8 Soit n un entier positif. Obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto e^x$, le $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$, enfin obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Remarques

Le développement limité de $(1+x)^\alpha$ incite à généraliser la définition des coefficients binomiaux :

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, on note $\begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

On a alors $(1+x)^\alpha =$ ....

Ex. 11.9 $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x \mapsto \tan x$.

Cor. 11.9

II.9. Résumé

Voici une liste des DL(0) à connaître et de la façon dont on les obtient :

Fonction	DL(0)	Démonstration
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$	Somme des termes d'une suite géométrique.
$x \mapsto \frac{1}{1+x}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$	$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$
$x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$	Formule de Taylor-Young.
$x \mapsto e^x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	Formule de Taylor-Young.
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$	Formule de Taylor-Young, partie paire de e^x.
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Formule de Taylor-Young, partie impaire de e^x.
$x \mapsto \cos x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$	Formule de Taylor-Young, $\mathcal{R}e\left(e^{ix}\right)$.
$x \mapsto \sin x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Formule de Taylor-Young, $\mathcal{I}m\left(e^{ix}\right)$.
$x \mapsto \tan x$	$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	Quotient de sin par cos, $\tan' = 1 + \tan^2$.
$x \mapsto \ln(1+x)$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right)$	Intégration de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
$x \mapsto \operatorname{Arctan} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Intégration de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Les développements limités en 0 de Arccos et Arcsin s'obtiennent par primitivation.
Ils ne sont pas à retenir. On les retrouve au besoin pour de petites valeurs de n.

III. Utilisations

III.1. Limite, continuité, dérivabilité, tangente

Les propriétés 11.9 et 11.10 permettent de démontrer immédiatement les résultats suivants :

Théorème 11.22 (Utilisation des développements limités)

Soit f une fonction définie sur un voisinage I du réel x_0, sauf éventuellement en x_0 lui-même.

- Si f possède un développement limité $f(x_0+h) = a_0 + \underset{h\to 0}{o}(1)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0$.
De plus, soit f est définie et continue en x_0, soit f est prolongeable par continuité par a_0 en x_0 (voir la proposition 11.13).
- Si f possède un développement limité $f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + a_p h^p + \underset{h\to 0}{o}(h^p)$ (avec $a_p \neq 0$) alors
  - ⋆ f est continue ou prolongeable par continuité par a_0 en x_0 ;
  - ⋆ f (ou son prolongement) est dérivable et $f'(x_0) = a_1$;
  - ⋆ l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 est $y = a_0 + a_1(x-x_0)$;
  - ⋆ on peut connaître les positions relatives de la courbe et de sa tangente en étudiant le signe de $a_p h^p$ au voisinage de $h \to 0$.
- Le premier terme non nul du développement limité de f en x_0 fournit un équivalent de f au voisinage de x_0 (voir la proposition 11.16).

Ex. 11.10 Soit $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\text{Arcsin}(x)}$ pour $x \neq 0$.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2) Montrer que f peut être prolongée par continuité en $x = 0$.
3) Tracer la représentation graphique de f sur son ensemble de définition.
Préciser notamment la position de la courbe par rapport à sa tangente en 0.

Cor. 11.10

Ex. 11.11 Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $u_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

1) Déterminer si u converge et si oui, donner sa limite.
2) Dans le cas où u converge vers $l \neq 0$, donner un équivalent (simple) de $u_n - l$.

III.2. Asymptotes et développements asymptotiques

Durant tout le chapitre, nous avons considéré des développements limités, c'est-à-dire des développements de la forme $f(x_0+h) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$. On peut généraliser cette notion en admettant tous les développements de la forme :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=-p}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

De tels développements sont appelés ***développements limités généralisés*** ou encore ***développements asymptotiques***.

Ex. 11.12 Donner les 4 premiers termes du développement asymptotique de $x \mapsto \frac{1}{x(1+x)}$ en 0.

Cor. 11.12

Méthode : Détermination d'asymptotes obliques

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est ***asymptote oblique*** à la représentation graphique d'une fonction f en $\pm\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.
Les développements ***asymptotiques*** peuvent être utilisés pour l'obtention d'***asymptotes obliques*** à la représentation graphique d'une fonction f en posant pour $x \to \pm\infty$, $h = \frac{1}{x} \to 0$ puis en développant $f\left(\frac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0 :
si $f\left(\frac{1}{h}\right) = \dfrac{a}{h} + b + \underset{h\to 0}{o}(1)$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la représentation graphique de f.

Ex. 11.13 Effectuer un développement asymptotique de $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ au voisinage de $\pm\infty$ et en déduire la position de C_f relativement à ses asymptotes.

Cor. 11.13

Ex. 11.14 Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de g ?
2) Montrer que la représentation graphique de g possède deux asymptotes obliques au voisinage de $\pm\infty$.
   On donnera une équation de chacune des asymptotes obliques.
3) Étudier les variations de g et construire sa représentation graphique.

Cor. 11.14

Maths - Chapitre 12

Espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit, $(\mathbb{K}, +, \times)$ désignera le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.

I. Structure d'espace vectoriel

I.1. Introduction et premiers exemples

- Tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut s'écrire comme ***une combinaison linéaire*** $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ de deux vecteurs non colinéaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$: $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est appelée ***base du plan vectoriel***, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ sont appelées ***coordonnées*** du vecteur $\vec{u}$ ***dans la base*** $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
- Toute solution y d'une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants peut s'écrire comme ***une combinaison linéaire*** $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ de deux solutions non colinéaires y_1 et y_2 de cette équation différentielle : $(y_1; y_2)$ est appelée ***base de l'espace des solutions***, $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ sont appelées ***coordonnées*** de la solution y ***dans la base*** $(y_1; y_2)$.
- Tout nombre complexe z peut s'écrire comme ***une combinaison linéaire*** $z = x \times 1 + y \times i$ des nombres 1 et i : ....
- Toute suite récurrente linéaire u d'ordre 2 peut s'écrire comme ....
....
....
....
- Tout couple $(c; d) \in \mathbb{K}^2$ peut s'écrire comme ....
....
....
....

Les exemples précédents illustrent le fait que les notions de ***combinaisons linéaires***, de ***bases*** ou encore de ***coordonnées*** se retrouvent dans des domaines très variés des mathématiques, dont certains n'ont à priori aucun rapport immédiat avec la géométrie.
Ce qui importe en fait, ***ce sont les opérations que l'on peut faire sur les objets concernés dans ces exemples*** : on peut les ajouter entre eux, ou les multiplier par un scalaire (c'est-à-dire un nombre réel ou complexe), ce sont des éléments de plusieurs ***espaces vectoriels***.

Par ailleurs, tous ces exemples concernent des espaces vectoriels ***de dimension 2*** : pour définir un vecteur dans ces espaces, il suffit de donner ***deux scalaires, appelés coordonnées de ce vecteur***. Cette notion de dimension est utilisée dans d'autres domaines que les mathématiques, parfois avec une autre terminologie : en SI par exemple, on parle plutôt de ***degrés de liberté***.
Il existe évidemment des espaces vectoriels de dimension 1, ou 3, ou plus, voire de dimension infinie !

I.2. Définition et premiers exemples

Définition 12.1

On dit que $(E,+,.)$ est un ***espace vectoriel sur*** $\mathbb{K}$ ou encore un $\mathbb{K}$-***espace vectoriel*** si :

- E est muni d'une loi ***interne*** notée additivement $(+)$ qui lui confère une structure de ***groupe commutatif*** : $\forall (x,y)\in E^2, x+y\in E$, la loi est ...., possède .... noté 0_E (ou plus simplement 0) et tout élément $x\in E$ possède .... noté $-x$.
- E est muni d'une loi externe $(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E\mapsto \lambda.x\in E$. Plus précisément, cette loi vérifie :
  - ⋆ $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall x\in E, (\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$;
  - ⋆ $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall(x,y)\in E^2, \lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$;
  - ⋆ $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}, \forall x\in E, (\lambda\times\mu).x=\lambda.(\mu.x)$;
  - ⋆ $\forall x\in E, 1_{\mathbb{K}}.x=x$.

Si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les éléments de E sont appelés ***vecteurs*** et ceux de $\mathbb{K}$ ***scalaires***.

Notation

Les éléments de $x\in E$ sont parfois surmontés d'une flèche $(\vec{x})$ pour les distinguer des scalaires, mais ce n'est pas une obligation. Cette notation est essentiellement utilisée pour les vecteurs du plan et de l'espace ordinaires.
Le signe . de la loi externe de E est souvent omis.

Ex. 12.1

- $(\mathbb{R},+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel où . est ....
- $(\mathbb{C},+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel où . est ....
  $\mathbb{C}$ s'identifie alors ....
- $(\mathbb{C},+,.)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel où . est ....
- $(\mathbb{R}^2,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en définissant sa loi interne par ....
  et sa loi externe par ....
  $\mathbb{R}^2$ s'identifie alors ....
- De même, $(\mathbb{R}^3,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en définissant sa loi interne par .... et sa loi externe par ....
  $\mathbb{R}^3$ s'identifie alors ....
- D'une manière générale, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en définissant sa loi interne par .... et sa loi externe par ....

Ex. 12.2

- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles muni des lois :
  - ⋆ $\forall(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=$ ....
  - ⋆ $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lambda.(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=$ ....

  est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
  De même, l'ensemble $\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}},+,.\right)$ des suites complexes est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.
- D'une manière générale, soit A un ensemble quelconque et $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{K}$. On munit $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})=\mathbb{K}^A$ des lois :

- ⋆ $\forall f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K}), \forall g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, on définit par $f + g$ l'application : $\begin{cases} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \dots\dots\dots\dots \end{cases}$
- ⋆ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, on définit par $\lambda.f$ l'application : $\begin{cases} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \dots\dots\dots\dots \end{cases}$

Muni de ces deux lois, $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En effet ....
....
....
....
....
De même, si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, $(\mathcal{F}(A, E), +, .)$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 12.2

Pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, .)$, $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$:

- $0.x = 0_E$: $0.x = (0+0).x = 0.x + 0.x \Rightarrow 0.x = 0_E$
- $\lambda.0_E = 0_E$: $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E \Rightarrow \lambda.0_E = 0_E$
- $\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ **ou** $\lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ **ou** $(\lambda^{-1}.\lambda).x = 1_{\mathbb{K}}.x = x = 0_E$

Ex. 12.3 Montrer que la commutativité de la loi + est une conséquence des autres axiomes de la structure d'espace vectoriel.

Cor. 12.3

Ex. 12.4 $E = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, xy = 0\}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Cor. 12.4

I.3. Combinaisons linéaires

Définition 12.3 (Combinaisons linéaires)

Étant donnés un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et une famille $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E, on dit que u est une ***combinaison linéaire des vecteurs de*** U ou une ***combinaison linéaire de*** U si

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u_i = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + ... + \lambda_n.u_n$$

II. Sous-espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit, $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

II.1. Définition

Définition 12.4

Soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ si :

- $0_E \in F$;
- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F^2, \lambda.x + \mu.y \in F$: F est dit ***stable par combinaisons linéaires***.

Remarque

$\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de $(E, +, .)$.

II.2. Théorème fondamental

Théorème 12.5

Si F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$, alors $(F, +, .)$ est un espace vectoriel.

Démonstration

Méthode

Pour prouver qu'un ensemble (muni de lois...) est un espace vectoriel, on montrera souvent qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Ex. 12.5

- Montrer que l'ensemble $F = \{(x; x), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:

  ....
  ....
  ....
- Montrer que pour une fonction $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

  ....
  ....
- Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (d'ordre quelconque) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$.

  ....
  ....
  ....
  ....
- Montrer que l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

  ....
  ....
  ....
  ....

II.3. Sous-espace vectoriel engendré

Proposition 12.6

Étant donnée une famille $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E, ***l'ensemble des combinaisons linéaires de*** U est un sous-espace vectoriel de E appelé ***sous-espace vectoriel engendré par*** U.
On le note $\mathrm{Vect}\, U$.

Démonstration

Méthode

Pour prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel, on peut tenter de l'écrire comme sous-espace vectoriel engendré par une famille.

Ex. 12.6

- L'ensemble $F = \{(x; x), x \in \mathbb{R}\} =$ .... est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par ....
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vect}\,((0; 0; 1); (0; 1; 0))$ est l'ensemble des vecteurs de la forme ....
- Pour une fonction a continue sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ engendré par ....
- Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.
  L'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ engendré par ....
  ....
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $\mathbb{K}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ engendré par ....
  ....

II.4. Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 12.7

L'intersection $F \cap G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Ex. 12.7 Existe-t-il des suites u vérifiant ***à la fois*** $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$?
Existe-t-il des suites v vérifiant ***à la fois*** $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$ et $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$?

Cor. 12.7

II.5. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 12.8

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle ***somme de*** F ***et de*** G l'ensemble $H = \{u + v, u \in F, v \in G\}$.

Notation

La somme H des sous-espaces vectoriels F et G est notée $H = F + G$.

Théorème 12.9

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Ex. 12.8 On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites géométriques de raison 2 et $\mathcal{V}$ l'ensemble des suites constantes.
Montrer que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$ et que $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ est l'ensemble des suites vérifiant $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Cor. 12.8

II.6. Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 12.10

Étant donnés deux sous-espaces vectoriels F et G de E, on dit que la somme $F + G$ est ***directe*** si

$$\forall z \in F + G, \exists! x \in F, \exists! y \in G, z = x + y$$

Notation

Si la somme $F + G$ est directe, on note $F \oplus G$ la somme des sous-espaces vectoriels F et G de E.

Proposition 12.11

La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration

II.7. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 12.12

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont ***supplémentaires dans*** E si $F \oplus G = E$, autrement dit si

$$\begin{cases} F+G & = & E \\ F \cap G & = & \{0_E\} \end{cases}$$

Ex. 12.9 Montrer que $\text{Vect}\left((1;1)\right)$ et $\text{Vect}\left((1;-1)\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
Montrer qu'il en est de même de $\text{Vect}\left((1;1)\right)$ et $\text{Vect}\left((-3;-2)\right)$.

Cor. 12.9

Remarque

Cet exemple montre qu'un sous-espace vectoriel F ***admet plusieurs sous-espaces supplémentaires*** G dans E. ***En conséquence, on ne peut jamais dire que*** G ***est ~~le supplémentaire de F~~, mais seulement qu'il est <u>un supplémentaire</u> de F !***

Remarque

D'après la définition de la somme directe, si F et G sont supplémentaires dans E, ***tout vecteur de*** E ***se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de*** F ***et d'un vecteur de*** G.

III. Applications linéaires

Étant donné un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ (pour nous $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on se donne $(E, +, .)$, $(F, +, .)$ et $(G, +, .)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

III.1. Définition

Définition 12.13

Soit f une application de E dans F. On dit que f est une ***application linéaire*** ou un ***morphisme d'espaces vectoriels*** si

$$\forall(\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\,(u;v) \in E^2, f\left(\lambda u + \mu v\right) = \lambda f\left(u\right) + \mu f\left(v\right)$$

Corollaire 12.14

$f\left(0_E\right) = 0_F$.

Démonstration

On prend $(\lambda;\mu) =$. . . . .*dans la définition précédente.*

Notation

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.

Définition 12.15

- Les applications de $\mathcal{L}(E)$ sont appelés ***endomorphismes*** de E.
- Les applications ***bijectives*** de $\mathcal{L}(E,F)$ sont appelées ***isomorphismes*** et les bijections de $\mathcal{L}(E)$ sont appelées ***automorphismes***.
- On appelle ***forme linéaire*** de E toute application de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

Notation

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$. Il s'agit de l'abréviation de ***Groupe Linéaire***.

Ex. 12.10 $\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+y;x-y) \end{array} \right.$. Montrer que ϕ est une application linéaire.

Cor. 12.10

III.2. Structure de $\mathcal{L}(E,F)$

Théorème 12.16

$\mathcal{L}(E,F)$ muni de l'addition d'applications et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

Démonstration

III.3. Composition

Proposition 12.17

La composée de deux applications linéaires est linéaire.

Démonstration

Remarque

Notamment, la composée de deux endomorphismes est un endomorphisme, la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme et la composée de deux automorphismes est un automorphisme.

III.4. Réciproque d'une application linéaire bijective

Proposition 12.18

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Démonstration

Remarque

Notamment, ***dans le cas de*** $\mathcal{GL}(E)$ la loi $\circ$ est une loi de composition interne qui confère à $(GL(E), \circ)$ une structure de groupe : la composée de deux automorphismes est un automorphisme, l'identité est l'élément neutre de la composition et tout automorphisme possède un symétrique pour la composition qui est sa bijection réciproque.

III.5. Noyau et image d'une application linéaire

Définition 12.19

Pour toute application $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit :

- le ***noyau*** de f noté $\operatorname{Ker} f$ comme l'ensemble $\operatorname{Ker} f = \{u \in E, f(u) = 0_F\}$;
- l'***image*** de f notée $\operatorname{Im} f$ comme l'ensemble $\operatorname{Im} f = \{v \in F, \exists u \in E, f(u) = v\} = \{f(u), u \in E\}$.

Autrement dit,
le noyau de f est l'image réciproque par f du vecteur nul de F (c'est-à-dire l'ensemble des antécédents de 0_F)
l'image de f est l'ensemble des ***vecteurs de*** F ***ayant un antécédent par*** f ***dans*** E c'est-à-dire l'image directe de E par f.

III.6. Propriétés de l'image et du noyau

Théorème 12.20

Étant donnés $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et V un sous-espace vectoriel de E, on a :

1) $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E et $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F ;
2) en particulier, $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F ;
3) f injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$;
4) f surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$.

Démonstration

Ex. 12.11 Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie dans le précédent exemple est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Cor. 12.11

IV. Applications linéaires particulières

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

IV.1. Rappel

Par définition (voir définition 12.10), tout vecteur de $E = F \oplus G$ se décompose ***de manière unique en la somme d'un vecteur de*** F ***et d'un vecteur de*** G.

IV.2. Les homothéties

Définition 12.21

On appelle homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ l'application $h_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array} \right.$

Propriété 12.22

- $\forall x \in E$, $h_1(x) = x$ (h_1 est l'identité) et $h_0(x) = 0$ (h_0 est l'application nulle) ;
- si $\lambda \neq 0$, $h_\lambda \in \mathcal{GL}(E)$ et $h_\lambda^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$.

IV.3. Les projections

Définition 12.23

On appelle projection sur F parallèlement à G l'application $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array} \right.$

Propriété 12.24

- $\forall x_1 \in F, p(x_1) = x_1$ et $\forall x_2 \in G, p(x_2) = 0$;
- $p \in \mathcal{L}(E)$, $p \circ p = p$, $\operatorname{Im} p = F = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - p)$ et $\operatorname{Ker} p = G$;

Démonstration

Proposition 12.25 (Caractérisation des projections)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
f est une projection si et seulement si $f \circ f = f$ (on note aussi $f^2 = f$).

Démonstration

Ex. 12.12 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & \left(\dfrac{x-2y}{3}; \dfrac{2y-x}{3} \right) \end{array} \right.$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que f est une projection.
3) Donner ses sous-espaces caractéristiques (c'est-à-dire les sous-espaces vectoriels F et G).

Cor. 12.12

IV.4. Les symétries

Définition 12.26

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application s : $\left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array} \right.$

Propriété 12.27

- Si p est la projection sur F parallèlement à G alors $s = 2p - \mathrm{Id}$ et $p = \frac{s+\mathrm{Id}}{2}$
- $s \in \mathcal{GL}(E)$, $s \circ s = \mathrm{Id}$, $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$

Démonstration

Proposition 12.28 (Caractérisation des symétries)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{Id}$ (on note aussi $f^2 = \mathrm{Id}$).

Démonstration

Ex. 12.13 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (2x+y; -3x-2y) \end{array} \right.$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que f est une symétrie.
3) Donner ses sous-espaces caractéristiques (c'est-à-dire les sous-espaces vectoriels F et G).

Cor. 12.13

V. Compléments/exemples

Écriture sous forme de sous-espace vectoriel engendré d'un sous-espace défini par une ou plusieurs équations

Ex. 12.14 Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1;-1;1);(2;1;0))$ et $G = \{(x;y;z) \in E, x+y+z=0\}$.

1) Écrire G comme espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs à préciser.
2) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E de deux manières différentes :
   a) en utilisant le résultat de la question précédente ;
   b) en écrivant G comme le noyau d'une application linéaire à préciser.
3) Décrire précisément les vecteurs de $F \cap G$.
4) Donner un vecteur de F qui n'appartient pas à G et un vecteur de G qui n'appartient pas à F.

Cor. 12.14

Obtention d'une équation ou d'un système d'équations caractérisant un sous-espace vectoriel engendré

Ex. 12.15 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de E.
Soit $F = \text{Vect}(A;B;C)$ et $G = \text{Vect}(A;C)$.
Donner un système d'équations caractérisant F.
Donner un système d'équations caractérisant G.

Cor. 12.15

Maths - Chapitre 13

Continuité

I. Limites de fonctions

I.1. Introduction

La notion de ***continuité d'une fonction réelle (ou complexe) de la variable réelle*** trouve une formalisation rigoureuse au XIX$^{\text{ème}}$ siècle bien qu'elle intervienne de façon souvent confuse beaucoup plus tôt dans l'histoire des mathématiques occidentales. En effet, deux caractéristiques de cette notion ont retardé sa formalisation :

- il s'agit en apparence d'une notion géométriquement très intuitive et fondamentale sur le plan logique ;
- pour cette raison, il semble difficile de la définir, c'est-à-dire de la subordonner à des notions plus fondamentales encore.

Elle ne voit le jour qu'à partir du moment où les notions de nombres réels et complexes sont bien comprises et permettent d'expliciter ce que l'intuition géométrique de continuité signifie au niveau logique.
À cause du lien logique entretenu par les notions de continuité et de nombres réels, les définitions générales sur les fonctions énoncées aux chapitres 2 et 5 ***doivent être révisées et connues***, notamment les propriétés du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ totalement ordonné par $\leqslant$ (propriété de la borne supérieure, etc...). Les fonctions usuelles du chapitre 7 sont aussi supposées connues et nous utiliserons fréquemment les développements limités pour calculer des limites en des points où elles sont indéterminées. On rappelle par exemple la définition suivante donnée au chapitre 11 :

Définition 13.1 (Voisinages d'un réel, voisinages de $\pm\infty$)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = -\infty$ ou $x_0 = +\infty$).
On dit que I est ***un voisinage de*** x_0 si :

- $x_0 = +\infty$ et I est un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- $x_0 = -\infty$ et I est un intervalle de la forme $]-\infty; A]$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- $x_0 \in \mathbb{R}$ et I est un intervalle de la forme $[x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon]$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Notation

On note $V(x_0)$ tout voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dans tout le chapitre, on notera D une partie de $\mathbb{R}$, f, g, h des applications de D dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Les applications de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ sont appelées ***fonctions réelles d'une variable réelle.*** La plupart des théorèmes de ce chapitre portant sur des fonctions définies sur ***un intervalle réel***, on cherchera souvent à décomposer D en une réunion finie d'intervalles.

Enfin, la notion de continuité ne prend tout son sens que lorsqu'il est possible de ***faire tendre la variable vers un point donné*** ce qui justifie l'introduction de la notion d'***intervalle réel non trivial***, c'est-à-dire comportant une infinité de points :

Définition 13.2 (Intervalle réel non trivial)

On dit qu'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est ***non trivial*** s'il est non vide et non réduit à un point. Autrement dit, si $a < b$ sont des réels, les intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ sont de la forme ....

Concernant les démonstrations de ce chapitre, beaucoup sont des redites de celles faites au chapitre 9 sur les suites réelles et, conformément au programme officiel, ne seront pas faites en cours.
Ce qu'il faut comprendre et retenir de ce chapitre :

1) connaître les définitions générales concernant les limites et la continuité et être capable de donner la définition formelle d'une limite ;
2) savoir calculer des limites, notamment consolider les techniques de calcul permettant de lever une indétermination, par exemple à l'aide d'un développement limité ;
3) connaître les théorèmes concernant les limites de fonction (théorème de la limite monotone par exemple) et savoir les utiliser ;
4) notamment connaître et savoir utiliser les différentes formes du ***théorème des valeurs intermédiaires*** et du théorème caractérisant l'image d'un segment par une fonction continue.

I.2. Droite numérique achevée

Définition 13.3 (Rappel : droite numérique achevée)

On appelle ***droite numérique achevée*** l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Notation

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Définition 13.4 (Fermeture d'un intervalle)

On appelle ***fermeture*** ou ***adhérence*** d'un intervalle $I \neq \emptyset$ l'ensemble obtenu en adjoignant à I ses bornes supérieures et inférieures si elles existent, $+\infty$ ou $-\infty$ si elles n'existent pas.

Notation

On note $\bar{I}$ la fermeture de I.

Ex. 13.1
$I = [3, 7[$ $\bar{I} =$............ $I =]-1, +\infty[$ $\bar{I} =$............ $I = \mathbb{R}$ $\bar{I} =$................

Dans cette partie I est un intervalle réel non trivial, $a \in \bar{I}$ et f, g, h sont des éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

I.3. Définition générale de la limite d'une fonction

Définition 13.5

On dit que $f(x)$ a pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \bar{I}$ si et seulement si ***pour tout voisinage*** $V(l)$ ***il existe un voisinage*** $V(a)$ ***tel que*** $f(V(a)) \subset V(l)$.

Notation

On le note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Ex. 13.2 Traduire la définition précédente en utilisant les quantificateurs dans les cas suivants

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers α en $+\infty$ si
  ....
- On dit que f tend vers α en $-\infty$ si
  ....
- On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si
  ....
- On dit que f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si
  ....
- On dit que f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si
  ....

  Soit $a \in I$ ou $a = \sup I$ ou $a = \inf I$ si elles existent.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers α en a si
  ....
- On dit que f tend vers $-\infty$ en a si
  ....

I.4. Limites à droite, limites à gauche en $a \in \mathbb{R}$

Définition 13.6

- On suppose que a appartient à la réunion de I et de sa borne inférieure si elle existe. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f ***tend vers*** α ***en*** a^+ (ou à droite de a ou quand x tend vers a par valeurs supérieures) si

  ....
- On suppose que a appartient à la réunion de I et de sa borne supérieure si elle existe. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f ***tend vers*** α ***en*** a^- (ou à gauche de a ou quand x tend vers a par valeurs inférieures) si

  ....

Définition 13.7

On dit qu'une fonction f définie sur $I \backslash \{a\}$ possède une limite en a si

- elle possède une limite ***à droite*** et une limite ***à gauche*** en a ;
- ces deux limites sont égales.

Notation

On note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\alpha$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\alpha$ la limite à droite et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\alpha$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\alpha$ la limite à gauche.
On note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)=\alpha$ ou plus simplement $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$ la limite en a d'une fonction définie sur un voisinage de a privé de a.

Ex. 13.3

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

....
....
....

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

....
....
....

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

....
....
....

I.5. Propriétés

Propriété 13.8

Si f admet une limite finie en $a\in\overline{I}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Propriété 13.9

La limite (finie ou infinie) d'une fonction est unique si elle existe.

De plus pour $a\in I$ et $\alpha\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\alpha\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\alpha\end{cases}$

Propriété 13.10

$\forall a\in I,\ \forall\alpha\in\overline{\mathbb{R}},\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=\alpha$

I.6. Limites et suites

Théorème 13.11

Soient $a\in\bar{I}$, $\alpha\in\overline{\mathbb{R}}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, u une suite d'éléments de I.

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n &= a\\ \lim\limits_{x\to a} f(x) &= \alpha\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=\alpha$$

I.7. Interprétation graphique

Proposition 13.12 (Asymptote verticale)

Pour $a \in \mathbb{R} \cap \bar{I}$, si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale au graphe de f.

Proposition 13.13 (Asymptote horizontale)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \alpha$ alors la droite d'équation $y = \alpha$ est asymptote horizontale au graphe de f.

Proposition 13.14 (Asymptote oblique)

S'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ux + v) = 0$ alors la droite d'équation $y = ux + v$ est asymptote oblique au graphe de f.
Le signe de $f(x) - (ux + v)$ permet alors de connaître la position de cette droite par rapport au graphe de f.

I.8. Opérations sur les limites

Proposition 13.15 (Somme de fonctions)

$a \in \bar{I}$

$\lim_{x \to a} f(x)$ \ $\lim_{x \to a} g(x)$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}$			
$+\infty$			
$-\infty$			

Proposition 13.16 (Produit de fonctions)

$a \in \bar{I}$

$\lim_{x \to a} f(x)$ \ $\lim_{x \to a} g(x)$	$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$	$\alpha \in \mathbb{R}_-^*$	$\alpha = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}_+^*$					
$\alpha' \in \mathbb{R}_-^*$					
$\alpha' = 0$					
$+\infty$					
$-\infty$					

Proposition 13.17 (Inverse d'une fonction)

$a \in \bar{I}$.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, alors il existe un voisinage $V(a)$ sur lequel f ne s'annule pas et $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\alpha}$.

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, alors il existe un voisinage $V(a)$ sur lequel f ne s'annule pas et $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $V(a)\setminus\{a\}$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) < 0$ sur $V(a)\setminus\{a\}$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposition 13.18 (Composition de limites)

f et g définies sur $\mathbb{R}$ et $(a,b,c) \in \overline{\mathbb{R}}^3$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$

Ex. 13.4

$x \in \mathbb{R}^* \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ possède-t-elle une limite en 0^+ ? en 0^- ? en 0 ?

Cor. 13.4

II. Limites et relation d'ordre

II.1. Passage à la limite dans une inégalité

Théorème 13.19

$a \in \bar{I}$, α et $\alpha' \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si pour tout } x \text{ au voisinage de } a \text{ on a } f(x) \leq g(x) \\ \text{et si } \lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \alpha' \end{array}\right. \quad \text{alors } \alpha \leq \alpha'.$$

II.2. Théorème(s) des gendarmes

Théorème 13.20 (Théorème des gendarmes)

$a \in \bar{I}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si pour tout } x \text{ au voisinage de } a \text{ on a } f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \text{et si } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \alpha \end{array}\right. \quad \text{alors } \lim_{x\to a} g(x) = \alpha.$$

Théorème 13.21

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si pour tout } x \text{ au voisinage de } a \text{ on a } |f(x)| \leq g(x) \\ \text{et si } \lim_{x\to a} g(x) = 0 \end{array}\right. \quad \text{alors } \lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Théorème 13.22

Si pour tout x au voisinage de a on a $f(x) \leq g(x)$ et

- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$;
- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

II.3. Limites aux bornes pour une application monotone

Théorème 13.23 (Théorème de la limite monotone)

$$(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2.$$

Si f est ***définie et croissante*** sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et vaut :

- si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$;
- si f est minorée, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf f$.

De même $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe et vaut :

- si f n'est pas majorée, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$;
- si f est majorée, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup f$.

Si f est ***définie et décroissante*** sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et vaut :

- si f .... ;
- si f ....

De même $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe et vaut :

- si f .... ;
- si f ....

III. Continuité en un point

III.1. Définition

Définition 13.24

On dit que f ***est continue en*** $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

En revenant à la définition de la limite en un point, on a donc :

f continue en a si $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon$.

Si f n'est pas continue en a, on dit que f est ***discontinue en*** a.

III.2. Continuité à droite et à gauche

Définition 13.25

Si a n'est pas l'extrémité gauche de I, on dit que f est ***continue à gauche en*** a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Si a n'est pas l'extrémité droite de I, on dit que f est ***continue à droite en*** a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Théorème 13.26

Si a n'est pas une extrémité de I,
f continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a.

III.3. Prolongement par continuité

Définition 13.27

Soit a une extrémité de l'intervalle I n'appartenant pas à I.
Autrement dit, on considère une fonction f définie sur un intervalle ***ouvert*** en son extrémité a.
Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et appartient à $\mathbb{R}$, on dit que f ***est prolongeable par continuité en*** a et on pose : $g : \begin{cases} I \cup \{a\} & \to \quad \mathbb{R} \\ x \in I & \mapsto \quad g(x) = f(x) \\ a & \mapsto \quad g(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \end{cases}$
g est appelée ***prolongement par continuité de*** f ***en*** a.

Ex. 13.5 Montrer que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ et $x \mapsto \frac{\cos x - 1}{\sin x}$ sont prolongeables par continuité en 0.

Cor. 13.5

III.4. Opérations sur les fonctions continues en un point

Proposition 13.28

Si f et g sont des fonctions continues en a et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

- $f + g$ est continue en a ;
- fg est continue en a ;
- αf est continue en a ;
- $|f|$ est continue en a ;
- $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues en a ;
- si $f(a) \neq 0$ alors il existe un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas et $\frac{1}{f}$ est continue en a.

Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ et si $g \circ f$ est définie sur un voisinage de a alors $g \circ f$ est continue en a.

III.5. Image d'une suite de limite a par une fonction continue en a

Théorème 13.29

Si f est continue en $a \in I$ alors l'image par f de toute suite de $I^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a est une suite convergeant vers $f(a)$.

IV. Continuité sur un intervalle

IV.1. Définition

Définition 13.30

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Notation

On note $\mathcal{C}^0(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont continues sur I.

IV.2. Propriétés

Proposition 13.31

Si f et g sont des fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

- ***Combinaison linéaire*** : $\alpha f + \beta g$ est continue sur I ;
- ***Produit*** : fg est continue sur I ;
- ***Quotient*** : si f ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I ;
- ***Valeur absolue*** : $|f|$ est continue sur I ;
- ***Max et min*** : $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont continues sur I.

Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$, $g \in \mathcal{C}^0(J)$ et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(I)$.

Exemples :

- Les applications constantes sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les applications polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les applications rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition ;
- les applications usuelles (ln,exp,sin,cos,$x \mapsto x^r$ avec $r \in \mathbb{R}$) sont continues sur leur ensemble de définition.

Remarque

Dans la pratique, pour démontrer la continuité d'une fonction, on utilise les théorèmes opératoires. Les cas où un retour à la définition de la continuité et de la limite sont nécessaires sont rares et sont considérés comme difficiles.

IV.3. Restrictions

Définition 13.32

Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $J \subset I$, on dit que f est continue sur J si la restriction de f à J est continue.

Ex. 13.6 Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto & \frac{x}{|x|} \\ x = 0 & \mapsto & 1 \end{cases}$ est continue sur $[0; +\infty[$ mais pas en 0.

Cor. 13.6

V. Théorèmes des valeurs intermédiaires

Théorème 13.33 (Théorème de Bolzano)

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors $\exists c \in [a; b], f(c) = 0$.

Démonstration

Remarque

Si l'on impose $f(a)f(b) < 0$, on peut conclure que $c \in]a; b[$ puisque $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$.

Méthode : Utilisation du TVI

Dans les exercices où on cherche à montrer qu'une fonction f ***continue*** vérifie une propriété de la forme

$$\exists c \in I, f(c) = cte$$

on introduira une fonction auxiliaire $g : x \mapsto f(x) - cte$ et on montrera que g s'annule.

Ex. 13.7 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.

1) Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$.
2) Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{3}\right) = f(c)$.
3) Montrer que quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\exists c \in [0; 1], f\left(c + \frac{1}{p}\right) = f(c)$.

Théorème 13.34 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction continue sur I, a et b deux éléments de I tels que $f(a) < f(b)$, alors $\forall y \in]f(a); f(b)[, \exists x \in]a; b[, f(x) = y$.

Démonstration

Théorème 13.35 (Image continue d'un intervalle)

Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$, alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration

Ex. 13.8 Soit $I =]0;2[$. Calculer $f(I)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$;
2) $f : x \mapsto \sin(\pi x)$;
3) $f : x \mapsto (x-1)^2$;
4) $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Que peut-on en conclure sur l'image par une fonction continue d'un intervalle de type ouvert/ouvert ?

VI. Fonctions continues sur un segment

Théorème 13.36 (Image continue d'un segment)

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ alors $f([a;b]) = [m;M]$ où $m, M \in \mathbb{R}$.

Démonstration hors programme

Corollaire 13.37

Toute application continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : étant donnée une fonction continue sur $[a;b]$

- $\exists x_0 \in [a;b], \forall x \in [a;b], f(x_0) = m \leq f(x)$
- $\exists x_1 \in [a;b], \forall x \in [a;b], f(x_1) = M \geq f(x)$

Théorème 13.38

Soit f une fonction continue sur I.
f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Démonstration

Théorème 13.39 (Théorème de la bijection continue)

Si f est injective et continue alors f induit une bijection de I sur $J = f(I)$ et sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J, strictement monotone, de même monotonie que f.

Démonstration

Remarque

Ce théorème a permis de construire les fonctions $\mathrm{Arcsin}, \mathrm{Arccos}$, etc...

Corollaire 13.40

Si f est une fonction continue strictement monotone sur $[a;b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists! c \in]a;b[, f(c) = 0$.

Maths - Chapitre 14

Polynômes

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

I.1. Définitions

Définition 14.1

On appelle ***polynôme à une indéterminée et à coefficients dans*** $\mathbb{K}$ une suite $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang $n \in \mathbb{N}$: $\forall p \geq n, a_p = 0$.
Les termes a_i de la suite sont appelés ***coefficients*** du polynôme.

Notation

On note $P = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Comme la suite des coefficients est nulle à partir d'un certain rang, un polynôme non nul peut aussi être noté $(a_0, a_1, ..., a_n)$ où a_n est le dernier terme non nul de la suite a.
Cependant, généralement, un polynôme est noté sous la forme :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{avec par convention } X^0 = 1$$

X est appelée ***indéterminée***.
L'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Remarques

- Il résulte de la définition que deux polynômes sont égaux ***si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux***.
- On appelle ***polynôme nul*** le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
- On appelle ***polynômes constants*** les polynômes dont seul le premier coefficient est (éventuellement) non nul.
- On appelle ***monôme*** tout polynôme qui n'a qu'un unique coefficient non nul ; c'est à dire de la forme $a_p X^p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $a_p \in \mathbb{K}$.
- Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ appartient aussi à $\mathbb{C}[X]$. On a donc $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$. La réciproque est fausse. En effet, $P = X - i$ est dans $\mathbb{C}[X]$ mais n'est pas dans $\mathbb{R}[X]$.
- Si on ne sait pas quel est le dernier coefficient non nul, et puisque l'on est sûr que cette somme comporte un nombre **fini** de termes, on peut parfois noter $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$.

Ex. 14.1 $P = (1, 0, 5, -2, 0, ..., 0, ...)$ est un polynôme que l'on notera $P =$ ....
$P = (0, 2, 5i, 1 + i, 0, ..., 0, ...)$ est un polynôme que l'on notera $P =$ ....
$P = (0, 1, 0, 0, ..., 0, ...)$ est un polynôme que l'on notera $P =$....................................
Attention X désigne un polynôme particulier et non une variable !

I.2. Structures de $\mathbb{K}[X]$

Définition 14.2

On munit $\mathbb{K}[X]$:

- d'une addition :
  $\forall P = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{K}[X],\ \forall Q = (b_0, b_1, ...) \in \mathbb{K}[X], \quad P + Q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ...)$;
- d'une multiplication par les scalaires de $\mathbb{K}$:
  $\forall P = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.P = (\lambda \times a_0, \lambda \times a_1, ...)$.

Proposition 14.3

$\big(\mathbb{K}[X], +, .\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

Définition 14.4

On munit également $\mathbb{K}[X]$ d'une multiplication :
$\forall P = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{K}[X],\ \forall Q = (b_0, b_1, ...) \in \mathbb{K}[X]$,

$$P \times Q = (c_0, c_1, ...) \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Remarques

- La définition du produit de polynômes est une simple traduction de la multiplication habituelle. Notamment elle vérifie $X^n \times X^p = X^{n+p}$ pour tous $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.
  Ceci justifie la convention adoptée $X^0 = 1$.
- Au vu de la définition, on peut conclure que la multiplication sur $\mathbb{K}[X]$ est commutative.

Ex. 14.2 $P = 1 + X + X^2$ et $Q = 2 - X + 3X^2$. Calculer $P \times Q$.
....

Définition 14.5

On munit également $\mathbb{K}[X]$ d'une composée :
Soient $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
On définit $A \circ P$ par : $\quad A \circ P = A(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k P^k$.

Remarque

Dans le cas particulier où $P = X$, le polynôme $A(P) = A(X)$ est égal au polynôme A, c'est pourquoi on utilise aussi bien A que $A(X)$ pour désigner ce dernier polynôme.

Ex. 14.3 La composition consiste simplement à remplacer l'indéterminée X par un polynôme.
On considère les polynômes $P = 1 + X + X^2$ et $Q = 1 + X$.
Calculer $P \circ Q$ puis $Q \circ P$. La composée est-elle commutative ?

Cor. 14.3

I.3. Fonctions polynomiales

Définition 14.6

Étant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on appelle ***fonction polynomiale*** associée à P la fonction $\tilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{cases}$

On notera souvent de la même façon un polynôme et sa fonction polynomiale associée.
Lorsqu'on passe d'un polynôme à sa fonction polynomiale associée, on dira que l'on ***substitue*** x à X dans P ou que l'on ***évalue*** P en x.

Remarques

- Les opérations définies précédemment sur l'ensemble des polynômes correspondent à celles définies sur l'ensemble des fonctions.
  En fait, les opérations sur l'ensemble des polynômes ***ont été définies de sorte à ce qu'elles coïncident avec les opérations sur l'ensemble des fonctions***.
- Il y a une ***différence de nature*** entre polynôme et fonction polynomiale. ***Cette distinction n'est pas un caprice de mathématicien*** !
  Par exemple, deux polynômes ne sont égaux que si tous leurs coefficients sont égaux. Or cela n'a rien d'évident ***à priori*** pour les fonctions polynomiales : existe-t-il deux fonctions polynomiales f et g correspondant à deux polynômes ***distincts*** et telles que, pour tout réel x, $f(x) = g(x)$?
  Nous répondrons à cette question en cours de chapitre. Pour le moment, il est important de retenir que égalité de polynômes et égalité de fonctions ont des sens différents :
  Deux polynômes sont égaux si et seulement si ....
  Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si ....
  ....

I.4. Degré et coefficient dominant

Définition 14.7

Soit $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul.
Le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ est appelé ***degré de*** P.
Par convention, on définit le degré du polynôme nul comme égal à $-\infty$.
a_n est appelé ***coefficient dominant de*** P et $a_n X^n$ est appelé ***terme dominant de*** P.
Si $a_n = 1$, on dit que P est un ***polynôme unitaire*** ou ***normalisé***.

Ex. 14.4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quel est le degré de $P = (\alpha+1)X^2 + 3$?

Cor. 14.4

Notation

On note $\deg(P)$ le degré de P.
Le coefficient dominant de P est parfois noté $\mathrm{cd}(P)$.

Remarques

- Si P n'est pas le polynôme nul, $\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$. Cette définition a un sens car $\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus grand élément.
- Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants **non nuls**.

Théorème 14.8 (Degré d'une somme, d'un produit)

$\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}^*$

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ avec égalité lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(\lambda.P) = \deg P$;
- $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.

Démonstration

Ex. 14.5 Trouver deux polynômes P et Q tels que : $\deg(P+Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$

Cor. 14.5

Ex. 14.6 Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, montrer que : $PQ = 0 \Leftrightarrow [\ P = 0 \text{ ou } Q = 0\ ]$.

Cor. 14.6

Remarque

Il faut bien faire la différence entre le fait qu'un polynôme s'annule (son évaluation en un scalaire est nulle) et le fait qu'un polynôme est nul (tous ses coefficients sont nuls).
Par exemple, si $(X-a)P=0$, alors $P=0$ bien que $X-a$ s'annule en a. Ce qui compte, c'est que $X-a$ n'est pas le polynôme nul.

I.5. $\mathbb{K}_n[X]$

Notation

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-ensemble de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes ***de degré inférieur ou égal à*** n.

Ex. 14.7 $\mathbb{R}_3[X] =$ ....

Ex. 14.8 Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$P = \alpha + \beta(1+X) + \gamma(1+X+X^2)$
Que peut-on en déduire concernant la famille $(1, 1+X, 1+X+X^2)$?

Cor. 14.8

II. Multiples, diviseurs et racines d'un polynôme

II.1. Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 14.9 (Divisibilité)

Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$. On dit que B ***divise*** A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
On dit aussi que B est un ***diviseur*** de A ou que A est un ***multiple*** de B.

Notation

On note $B|A$ l'assertion « B divise A ».

Ex. 14.9 Dans $\mathbb{R}[X]$, $(X+1) \mid (X^2-1)$ car ....

Théorème 14.10 (Division euclidienne)

$\forall (A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0$, $\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$.
On appelle A le ***dividende***, B le ***diviseur***, Q le ***quotient*** et R le ***reste***.

Démonstration

Ex. 14.10 Effectuer la division euclidienne de A par B lorsque :

- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{R}[X]$ avec $A = X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^2 + X - 1$.
- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{C}[X]$ avec $A = X^4 + iX + 1$ et $B = iX^2 + 1$.
- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{R}[X]$ avec $A = X + 2$ et $B = X^3 + 8X + 1$.

Cor. 14.10

Corollaire 14.11

Pour $B \in \mathbb{K}[X]$ non nul, le reste de la division euclidienne de A par B est nul si et seulement si B divise A.

II.2. Racines (ou zéros) d'un polynôme

Définition 14.12

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** (ou un **zéro**) de P (dans $\mathbb{K}$) si $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

Important !

La précision « dans $\mathbb{K}$ » peut avoir de l'importance : le polynôme $X^2 + 1$ admet des racines dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

Remarque

Un polynôme à coefficients réels de degré impair admet nécessairement une racine réelle d'après le théorème des valeurs intermédiaires (voir exercice 14.11 de la feuille d'exercices).

Théorème 14.13

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$ est le polynôme constant $\tilde{P}(\alpha)$.
En particulier : α est une racine de $P \Leftrightarrow (X - \alpha)|P$.

Démonstration

Ex. 14.11 Soit $Q = X^3 - 10X^2 + 29X - 20$. Trouver les racines de Q.

Cor. 14.11

Méthode : Calculer le reste d'une division euclidienne

Pour calculer le reste de la division euclidienne de A par B avec $B \neq 0$, on écrit $A = BQ + R$ avec $R = \sum_{k=0}^{deg(B)-1} a_k X^k$. On évalue ensuite en les racines de B (si on les connaît). En effet, si a est une racine de B, alors $A(a) = R(a)$. Ceci nous permet de déterminer les coefficients de R.

Ex. 14.12 Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{10} - X^5$ par $X^2 - 3X + 2$.

Cor. 14.12

Corollaire 14.14 (Très important !)

- Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$ possède au plus n racines deux à deux distinctes.
- Tout polynôme non nul possède un nombre fini de racines.
- Si deux fonctions polynomiales coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{K}$ alors les polynômes associés sont identiques.
  En particulier, ***deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si les polynômes associés sont égaux***.

Démonstration

Méthode : Prouver qu'un polynôme P est nul

Pour prouver qu'un polynôme P est nul, il suffit de prouver que P possède une infinité de racines ou que P possède $\deg(P) + 1$ racines.

Ex. 14.13 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X + 1) = P(X)$. Montrer que P est constant.

Cor. 14.13

III. Polynôme dérivé et racines multiples

III.1. Dérivées d'un polynôme

La notion de polynôme dérivé est purement formelle. Elle correspond simplement à la notion de dérivation des fonctions polynomiales que nous connaissons.

Définition 14.15

Étant donné $P \in \mathbb{K}[X]$, on appelle polynôme dérivé de P le polynôme associé à la dérivée de la fonction polynomiale de P.
Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

Notation

On note P' ou $P^{(1)}$ le polynôme dérivé de P et on définit de même les polynômes dérivés successifs $P'' = P^{(2)}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\quad P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$.

Proposition 14.16

Linéarité de la dérivation :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2\ ,\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}\ ,\quad \begin{cases} (P+Q)' & = & P'+Q' \\ & & \text{et} \\ (\lambda \cdot P)' & = & \lambda \cdot P' \end{cases}$$

Démonstration

Proposition 14.17

Dérivation d'un produit :
$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2\ ,\quad (PQ)' = P'Q + PQ'$

Proposition 14.18

Formule de Leibniz de dérivation d'un produit PQ de polynômes :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2\ ,\quad (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} Q^{(k)}$$

Proposition 14.19

Formule de Taylor : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$ un scalaire. Alors on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Démonstration

III.2. Multiplicité d'une racine

Définition 14.20

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle multiplicité de α dans P le plus grand entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(X-\alpha)^n | P$.
En particulier $(X-\alpha)^{n+1}$ ne divise pas P.

Remarque

Une racine de multiplicité 0 de P ***n'est pas une racine de*** P !

Proposition 14.21

De façon évidente, α est une racine de P si et seulement si sa multiplicité dans P est supérieure à 1.

Ex. 14.14 Quelles sont les racines réelles et leur multiplicité pour le polynôme

$$P = (X^2 - 1)(X^3 - 1)$$

Cor. 14.14

III.3. Caractérisation de la multiplicité d'une racine

Théorème 14.22

α est une racine de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ dans $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = ... = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Démonstration

Ex. 14.15 Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, 1 est racine de P avec $P = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$ et donner sa multiplicité.

Cor. 14.15

IV. Factorisation des polynômes

IV.1. Polynômes scindés sur $\mathbb{K}$

Définition 14.23

Un polynôme P non nul est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit comme produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur à 1.
Autrement dit, P est scindé sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$P = \lambda(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n).$$

Ici les racines de P notées $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ne sont pas nécessairement distinctes.

Important !

Un polynôme peut être scindé dans $\mathbb{C}[X]$ sans l'être dans $\mathbb{R}[X]$!
Exemple : $P = X^2 + 1 =$..

Remarque

Autrement dit, un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}^*$ est scindé sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il admet des racines dont la somme des ordres de multiplicité vaut n.

IV.2. Relation coefficients-racines d'un polynôme scindé.

Proposition 14.24

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ***scindé*** sur $\mathbb{K}$ et $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}$ ses racines.

- La somme des racines de P est donnée par : $\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$.
- Le produit des racines de P est donné par : $\prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Démonstration

Ex. 14.16 Déterminer P le polynôme unitaire de degré 3 dont la somme et le produit des racines valent 6, et dont la somme des coefficients est nulle.

Cor. 14.16

Remarques

- En particulier, si $P = aX^2 + bX + c$ alors :
  la somme des racines vaut : $S = -\frac{b}{a}$.
  le produit des racines vaut : $P = \frac{c}{a}$.
- Inversement, soient x_1 et x_2 deux réels avec S leur somme et P leur produit.
  Alors x_1 et x_2 sont solutions de $X^2 - SX + P = 0$.

Ex. 14.17 Trouver deux nombres dont la somme vaut $-\frac{17}{2}$ et le produit vaut 4.

Cor. 14.17

IV.3. Cas particulier des racines lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 14.25 (Théorème de d'Alembert-Gauss - Admis)

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration hors programme

Corollaire 14.26

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$: $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$.

On a : $\sum_{k=0}^{r} m_k = \deg(P)$.

Démonstration

Proposition 14.27

Soit P un polynôme **à coefficients réels** (donc $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$).
Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine complexe de P **alors** son conjugué $\bar{\alpha}$ est également racine de P.

Démonstration

Remarque

Attention, la proposition précédente est ***fausse*** pour $P \in \mathbb{C}[X]$!
Par exemple i est racine de $P = X - i \in \mathbb{C}[X]$ mais pas $\bar{i} = -i$.

Ex. 14.18 Soit $P = X^4 + X^3 - 10X^2 + 2X - 24$.
Vérifier que $\sqrt{2}i$ est racine de P, et en déduire toutes les racines de P.

Cor. 14.18

IV.4. Polynômes irréductibles et factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

Définition 14.28 (Polynômes irréductibles)

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible si $\deg P \geq 1$ et si les seuls diviseurs de P sont les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et les polynômes constants (non nuls).

Ex. 14.19 Déterminer tous les diviseurs de $P = X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Cor. 14.19

Remarque

Par définition, les polynômes de degré 1 sont tous irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Ex. 14.20

1) Factoriser $P = X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2) En déduire que P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Cor. 14.20

Proposition 14.29 (Classification des polynômes irréductibles)

- Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes du premier degré.
- Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes du premier degré et les polynômes du second degré à discriminant strictement négatif.

Démonstration

Factorisation des polynômes

- On a déjà vu que pour $P \in \mathbb{C}[X]$, la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est de la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \qquad \text{où}$$

  - ⋆ λ est le coefficient dominant de P (c'est à dire du terme de plus haut degré)
  - ⋆ $\forall k \in \{1, 2, ..., r\}$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ est racine d'ordre m_k de P.
  - ⋆ On a toujours : $\sum_{k=0}^{r} m_k = \deg(P)$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{p} (X^2 - p_j X + q_j)^{l_j} \qquad \text{où}$$

  - ⋆ λ est le coefficient dominant de P (c'est à dire du terme de plus haut degré).
  - ⋆ $\forall k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ est racine d'ordre m_k de P.
  - ⋆ $\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$ les discriminants ($\Delta = p_j^2 - 4q_j$) vérifient $\Delta < 0$.
  - ⋆ $\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $l_j \in \mathbb{N}^*$ est un exposant entier.

Ex. 14.21 Soit $P = X^3 + 3X^2 + 4X + 2$.

1) Factoriser P sous forme de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2) Factoriser P sous forme de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Cor. 14.21

Ex. 14.22 Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on note $P = X^n - 1$.

1) Décomposer P en produits d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
2) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Cor. 14.22

Maths - Chapitre 15

Dimension des espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit, $(\mathbb{K}, +, \times)$ désignera le corps des nombres réels ou des nombres complexes.

I. Rappels et compléments

I.1. Rappels

Ce chapitre poursuit et complète le chapitre 12 sur les espaces vectoriels. En conséquence, toutes les définitions et propriétés du chapitre sur les espaces vectoriels doivent être revues. Notamment, on révisera attentivement

- la caractérisation (théorème fondamental 12.5) des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $(E, +, .)$;
- les notions de somme et de somme directe de deux sous-espaces vectoriels ;
- la définition 12.13 d'une application linéaire ;
- la définition 12.19 du noyau d'une application linéaire et le théorème 12.20 énonçant les propriétés du noyau d'une application linéaire ou de l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire ;
- la définition et la caractérisation des projections et des symétries...

I.2. Rappel : combinaisons linéaires

Définition 15.1 (Combinaisons linéaires)

Étant donnés un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et une famille $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E, on dit que u est une ***combinaison linéaire des vecteurs de*** U ou une ***combinaison linéaire de*** U si

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u_i = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + ... + \lambda_n.u_n$$

Proposition 15.2

Étant donnée une famille $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E, ***l'ensemble des combinaisons linéaires de*** U est un sous-espace vectoriel de E appelé ***sous-espace vectoriel engendré par*** U.
On le note $\operatorname{Vect} U$.

I.3. Rappel : espaces vectoriels de référence

Pour montrer que $(F, +, .)$ est un espace vectoriel, on peut, par exemple, montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
Parmi les espaces vectoriels de référence, nous avons déjà vu :

- l'espace vectoriel des n-uplets $\mathbb{K}^n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque ;
- l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles ou complexes $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;
- l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles ou complexes $\mathbb{K}^A = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, où $A \subset \mathbb{R}$;
- l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{K}[X]$, ou celui des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ noté $\mathbb{K}_n[X]$;
- l'espace vectoriel des matrices à $n \in \mathbb{N}^*$ lignes et $p \in \mathbb{N}^*$ colonnes et à coefficients réels ou complexes $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;
- l'espace vectoriel des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$ entre deux espaces vectoriels E et F.

Mais il existe aussi d'autres méthodes pour montrer que $(F, +, .)$ est un espace vectoriel : on peut aussi ....
....
....

I.4. Complément : notion d'hyperplan

Définition 15.3 (Hyperplan)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que H est un ***hyperplan de*** E s'il existe une ***forme linéaire*** non identiquement nulle f définie sur E (c'est-à-dire une ....) telle que

$$H = \mathrm{Ker}(f)$$

Par exemple, $A = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - 3z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et
$B = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, u_0 = u_1\right\}$ est un hyperplan de l'espace vectoriel des suites complexes.

I.5. Équations linéaires

Théorème 15.4

Soient E et F deux espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit y un vecteur de F.
L'ensemble $\mathcal{S}$ des vecteurs x solution de l'équation $\phi(x) = y$ est :

- ou bien vide : $\mathcal{S} = \emptyset$;
- ou bien la somme d'une solution particulière et de l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre : $\mathcal{S} = x_0 + \mathrm{Ker}(\phi)$.

Démonstration

Remarque

Le théorème précédent est le cas général d'une situation que nous avons déjà rencontrée à plusieurs reprises :

- Soit $y' + a(x)y = b(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1, où a et b sont deux fonctions continues d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$: alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle et de la solution générale de l'équation homogène associée.
  En effet, d'une part $\phi : y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \mapsto y' + a(x)y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est une application linéaire, d'autre part, la méthode de variation de la constante nous garantit qu'il existe toujours une solution particulière à l'équation différentielle.
- Le résultat similaire concernant les équations différentielles $y''+ay'+by = f(x)$ linéaires à coefficients constants se déduit de même du théorème précédent.
- L'ensemble des suites vérifiant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ est somme de la suite constante vérifiant la même formule de récurrence (***solution particulière constante***!) et d'une suite géométrique de raison a (***solution générale de l'équation sans second membre***!) : ici l'application linéaire est $\phi : u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - au_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et l'équation linéaire est $\phi(u) = b$ où b doit être interprétée comme la suite constante égale à b...
  $\phi(u) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n$ ce qui donne bien les suites géométriques de raison a.
- Enfin, l'ensemble des solutions d'un système linéaire est soit vide, soit somme d'une solution particulière de ce système et de la solution générale du système sans second membre !

Ex. 15.1 Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n + 1 \end{cases}$

1) Montrer que $\psi : u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2) Trouver une suite particulière simple vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1$.
3) Déduire des deux question précédentes une formule explicite donnant u_n en fonction de n.

Cor. 15.1

Ex. 15.2 Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & \left(\dfrac{x+y}{3}; \dfrac{2x+2y}{3}\right) \end{cases}$

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2) Nature géométrique de ϕ ?
3) Résoudre les équations $\phi(x;y) = (-2;-4)$ et $\phi(x;y) = (0;1)$.

Cor. 15.2

II. Familles finies de vecteurs

II.1. Famille libre, famille liée

Définition 15.5

On dit qu'une famille de vecteurs est ***liée*** si l'un des vecteurs de la famille est une ***combinaison linéaire des autres vecteurs***.
Dans le cas contraire on dit que la famille est ***libre***.

Remarque

La notion de ***famille liée***, nous le verrons, généralise les notions de ***famille de 2 vecteurs colinéaires***, ou de ***famille de 3 vecteurs coplanaires***.
Dans le cas général, on parlera donc de ***famille liée***.

Proposition 15.6

Une famille de vecteurs est libre si et seulement si il existe une unique combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette famille.

Démonstration

Méthode

En pratique, pour démontrer qu'une famille $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est libre on écrira donc
« ***Supposons que*** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ ***et montrons que*** $\forall i \in [\![1; n]\!], \lambda_i = 0$. »
et pour démontrer qu'une famille $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est liée on écrira
« ***Montrons qu'il existe des solutions*** $(\lambda_1; ...; \lambda_n)$ ***non toutes nulles à l'équation*** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ »
Dans les deux cas, on résout un système : s'il existe une unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, la famille est libre, sinon la famille est liée.

Ex. 15.3 • La famille $((2; -1); (1; 2))$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle libre ?

. . . .
. . . .

• La famille $(X^2 + 3X + 1; X^2 - 3X + 1; X^2 + X + 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle libre ?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Propriété 15.7

- Toute famille finie contenant le vecteur nul est liée.
- Toute famille composée d'un unique vecteur non nul est libre.

- Toute famille libre A à laquelle on adjoint un vecteur $v \notin \operatorname{Vect} A$ est libre.

Démonstration

Définition 15.8

On dit que deux vecteurs u et v sont colinéaires ou que trois vecteurs u, v et w sont coplanaires si et seulement si ils forment une famille liée.

Ex. 15.4 Montrer que $(\cos;\sin)$ est une famille libre de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,.\right)$.
Étant donnés $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ***distincts***, montrer que $(x \mapsto e^{c_1 x}; x \mapsto e^{c_2 x})$ est une famille libre.
Même question pour $(x \mapsto e^{c_1 x}; x \mapsto xe^{c_1 x})$.

Cor. 15.4

II.2. Famille génératrice

Définition 15.9

On dit qu'une famille A de vecteurs de E est ***génératrice*** si $\operatorname{Vect} A = E$.

Méthode

Pour démontrer qu'une famille $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est génératrice on écrira donc
« ***Soit*** v ***un vecteur de*** E***, montrons qu'il existe*** $(\lambda_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ ***tels que*** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = v$***.*** »
et il s'agira encore de résoudre un système d'équations linéaires.

Ex. 15.5 • La famille $((2;-1);(1;2))$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle génératrice ?
....
....

- La famille $(X^2+3X+1; X^2-3X+1; X^2+X+1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle génératrice ?

....
....
....
....

Propriété 15.10

- Si $(u_1; u_2; ...; u_n)$ est génératrice alors $\forall v \in E$, $(u_1; u_2; ...; u_n; v)$ est génératrice.
- Si $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est ***génératrice et liée*** alors on peut trouver une sous-famille génératrice de $n-1$ vecteurs de A.

Démonstration

II.3. Base

Définition 15.11

On dit qu'une famille A de vecteurs est ***une base*** de E si elle est ***libre et génératrice***.

Ex. 15.6 • La famille $((2;-1);(1;2))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

. . . .

. . . .

• La famille $(X^2+3X+1;X^2-3X+1;X^2+X+1)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

. . . .

Théorème 15.12 (Unicité de la décomposition dans une base)

Si $A=(u_1;u_2;...;u_n)$ est une base de E alors $\forall v\in E, \exists!\,(\lambda_1;...;\lambda_n)\in\mathbb{K}^n, v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i$.

Démonstration

Définition 15.13

Si $A=(u_1;u_2;...;u_n)$ est une base de E, pour tout vecteur $v\in E$, les scalaires $(\lambda_1;...;\lambda_n)$ tels que $v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i$ sont appelés ***coordonnées de*** v ***dans*** A.

Important !

Les coordonnées d'un vecteur sont ***valables dans une base*** ! Si on change un seul vecteur de la base, il ***est possible que toutes les coordonnées changent*** !

Ex. 15.7 Quelles sont les coordonnées du vecteur $v=(3;2)$ dans la base $((1;0);(1;2))$ de $\mathbb{R}^2$?

. . . .

Ex. 15.8 Donner une base $\mathcal{B}$ de l'ensemble des solutions à valeurs réelles de $(E): y''+2y'+2y=0$.
Montrer que $f: x\in\mathbb{R}\mapsto e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ est une solution de (E).
Quelles sont les coordonnées de f dans $\mathcal{B}$?

Cor. 15.8

II.4. Famille de polynômes échelonnée en degrés

Définition 15.14

On dit qu'une famille $(P_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est ***échelonnée en degrés*** si

$$\forall i\in[\![1;p-1]\!], \deg P_i < \deg P_{i+1}$$

Propriété 15.15

Toute famille de polynômes échelonnée en degrés ne contenant pas le polynôme nul est libre.

Démonstration

II.5. Bases et sommes directes

Définition 15.16 (Base adaptée à une somme directe)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels ***supplémentaires*** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, .)$ et $\mathcal{B} = (e_1; e_2; ...; e_n)$ une base de E.
F et G étant supplémentaires dans E, on a donc $E = F \oplus G$.
On dit de $\mathcal{B}$ qu'elle est ***adaptée à cette somme directe*** si il existe $k \in [\![1; n]\!]$ tel que
$\mathcal{B}_1 = (e_1; ...; e_k)$ soit une base de F,
$\mathcal{B}_2 = (e_{k+1}; ...; e_n)$ soit une base de G.

Remarque

Il existe des bases de $F \oplus G$ qui ne sont pas adaptées à cette somme directe. Par exemple, dans $(\mathbb{R}^2, +, .)$, $F = \mathrm{Vect}((1; -1))$ et $G = \mathrm{Vect}((1; 1))$ sont supplémentaires mais la base canonique de $\mathbb{R}^2$ n'est pas adaptée à $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

Ex. 15.9 Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G de la remarque précédente sont effectivement supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Cor. 15.9

Proposition 15.17 (Propriété de génération de la somme)

Soient k, n deux entiers naturels tels que $1 \leqslant k < n$.
Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{F} = (e_1; ...; e_k; e_{k+1}; ...; e_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

- $\mathrm{Vect}\,(e_1; ...; e_k; e_{k+1}; ...; e_n) = \mathrm{Vect}\,(e_1; ...; e_k) + \mathrm{Vect}\,(e_{k+1}; ...; e_n)$
- Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathrm{Vect}\big(\mathcal{F}\big) = \mathrm{Vect}\,(e_1; ...; e_k) \oplus \mathrm{Vect}\,(e_{k+1}; ...; e_n)$.

Démonstration

Méthode : Somme de sous-espaces vectoriels engendrés

La première égalité du théorème précédent s'utilise dans les deux sens :

- De droite à gauche : on utilisera cette propriété pour « simplifier » certaines sommes de sous-espaces vectoriels.
  Notamment, lorsqu'on a affaire à la somme de deux sous-espaces vectoriels, il ***peut être très utile d'exprimer ces sous-espaces vectoriels comme des sous-espaces***

engendrés par une famille.

- De gauche à droite : on utilisera cette propriété pour montrer qu'une base est adaptée à une somme directe ou pour décomposer un vecteur sur deux sous-espaces vectoriels. Notamment, en poursuivant la décomposition jusqu'au bout, $\mathrm{Vect}\,(e_1; ...; e_n) = \mathrm{Vect}(e_1) + ... + \mathrm{Vect}(e_n)$.

Ex. 15.10 Soient $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel, $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((0; 0; 1)\big)$.

1) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, puis montrer qu'ils sont supplémentaires.
2) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

Cor. 15.10

III. Espaces vectoriels de dimension finie

III.1. Dimension finie

Définition 15.18

On dit qu'un espace vectoriel est de ***dimension infinie*** s'il n'admet aucune famille génératrice finie.

Au contraire, s'il admet une famille génératrice finie, alors l'espace vectoriel est dit de ***dimension finie***.

Ex. 15.11 Montrer que l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Cor. 15.11

Dans tout ce qui suit $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

III.2. Obtention d'une base à partir d'une famille génératrice

Théorème 15.19 (Théorème de la base extraite)

De toute famille génératrice finie $\mathcal{F}$ d'un espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E.

Démonstration

Corollaire 15.20

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base.

III.3. Obtention d'une base à partir d'une famille libre

Théorème 15.21 (Théorème de la base incomplète)

Toute famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être complétée en une base.

Démonstration

Remarque

La démonstration que nous venons de faire garantit un résultat légèrement plus fort que celui de l'énoncé puisque nous avons démontré :

1) que toute famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être complétée en une base ;
2) que les vecteurs utilisés pour compléter la famille libre peuvent être choisis dans une famille génératrice arbitraire de E.

Méthode : Obtention d'une base à partir d'une famille libre/génératrice

Pour compléter une famille libre $\mathcal{F}$ en une base d'un espace vectoriel E de dimension finie :

- on se donne une famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E (qui en possède une puisqu'il est ... .) ;
- pour chaque vecteur v de $\mathcal{G}$, on complète la famille $\mathcal{F}$ par v et on vérifie si la nouvelle famille ainsi formée est libre ou liée. Si elle est libre, on recommence avec la nouvelle famille obtenue. Si elle est liée, on rejette le vecteur v.

Pour extraire une base d'une famille génératrice $\mathcal{G}$:

- on part de la famille vide $\mathcal{F}$;
- pour chaque vecteur v de $\mathcal{G}$, on complète $\mathcal{F}$ avec ce vecteur et on vérifie si la nouvelle famille est libre ou liée. Si elle est libre, on recommence avec la nouvelle famille obtenue. Si elle est liée, on rejette le vecteur v.

Ex. 15.12 Extraire de la famille $\mathcal{G} = ((1;2;3);(-1;0;1);(1;1;1);(2;1;0);(1;0;0))$ une base de $\mathbb{R}^3$.

Cor. 15.12

III.4. Lemmes

Lemme 15.22

Soient v un vecteur, $n \in \mathbb{N}$ et $(u_1;...;u_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs. On a l'équivalence

$$v \in \mathrm{Vect}(u_1;...;u_{n+1}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, v - \lambda u_{n+1} \in \mathrm{Vect}(u_1;...;u_n)$$

Démonstration

Lemme 15.23 (Lemme fondamental)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille de $n+1$ vecteurs de E s'écrivant comme combinaisons linéaires de n vecteurs de E est liée.

Démonstration

III.5. Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 15.24 (Théorème de la dimension)

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$.

1) Il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ de E.
2) Si $\mathcal{B}' = \left(e'_i\right)_{i \in [\![1;n']\!]}$ est une autre base de E, alors $n = n'$.

Démonstration

Corollaire 15.25

Toutes les bases d'un espace vectoriel non nul (de dimension finie) ont le même nombre de vecteurs.

Définition 15.26 (Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle ***dimension de*** E

- l'entier 0 si $E = \{0_E\}$;
- le nombre de vecteurs d'une base quelconque de E sinon.

Notation

On note $\dim E$ la dimension d'un espace vectoriel.

Ex. 15.13 Quelle est la dimension des espaces vectoriels suivants :

1) le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, .)$?
2) le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, .)$?
3) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, .)$?
4) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, +, .)$?

Cor. 15.13

Définition 15.27

On appelle ***espace vectoriel trivial*** tout espace vectoriel de dimension 0.

On appelle ***droite vectorielle*** tout espace vectoriel de dimension 1.

On appelle ***plan vectoriel*** tout espace vectoriel de dimension 2.

III.6. Propriétés

Propriété 15.28

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

- toute famille génératrice possède au moins n vecteurs ;
- toute famille libre possède au plus n vecteurs.

Démonstration

Propriété 15.29

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteur(s) de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{F}$ est une base de E ;
2) $\mathcal{F}$ est une famille libre ;
3) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice.

Démonstration

Ex. 15.14 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{F} = \big((X-1)(X-2); (X-1)(X+1); (X+1)(X-2)\big)$.

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E.
2) Soit $P = a + bX + cX^2$ un polynôme (quelconque) de E.
   Donner ses coordonnées dans la base canonique.
   Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$.

Cor. 15.14

Ex. 15.15 On considère l'équation différentielle $(E) : x^3y' - 2y = 0$.

1) Donner l'ensemble des solutions de (E) à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Donner une base de l'ensemble des solutions définies (et dérivables) sur $\mathbb{R}$.

Cor. 15.15

III.7. Bases canoniques

Définition 15.30 (Base canonique de $\mathbb{K}^n$)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle ***base canonique de*** $\mathbb{K}^n$ la base formée des n-uplets de la forme

$$e_i = \left(\underbrace{0; \ldots; 0}_{(i-1) \text{ zéros}} ; 1 ; \underbrace{0; \ldots; 0}_{(n-i) \text{ zéros}} \right).$$

La base canonique de $\mathbb{K}^n$ comporte donc n vecteur(s).

Remarque

La base canonique définie ci-dessus est une base !

- ***C'est une famille génératrice*** :

  ....

- ***C'est une famille libre*** :

  ....

En conséquence, $\mathbb{K}^n$ est de dimension ..

Définition 15.31 (Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$)

On appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ la famille $(1, X, X^2, ..., X^n)$.
Il s'agit bien d'une base car :

- ....
  ....
- ....

En conséquence, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension ....

Définition 15.32 (Rappel : base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

On appelle base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la famille $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ où pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et tout $j \in [\![1;p]\!]$, E_{ij} est défini par

$$E_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Il s'agit bien d'une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car :

- ....

$$M = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}^{n} m_{i,j}E_{ij} ;$$

- ....

En conséquence, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension ....

III.8. Rang d'une famille finie

Définition 15.33

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de ***dimension quelconque*** (finie ou infinie) et $\mathcal{F}$ une famille ***finie*** de vecteurs de E.
On appelle ***rang*** de la famille $\mathcal{F}$ la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$.

Notation

On note $\operatorname{rg} \mathcal{F}$ le rang de la famille $\mathcal{F}$.

Théorème 15.34

Une famille finie de vecteurs est libre si et seulement si son rang est égal au nombre de vecteurs qui la composent.

Démonstration

Méthode

Pour déterminer le rang d'une famille finie de vecteurs on peut utiliser l'algorithme suivant :

- ***Initialisation*** : on élimine de la famille $\mathcal{F}$ tous les vecteurs nuls et on constitue une sous-famille $\mathcal{F}'$ formée du premier vecteur restant ;
- ***Hérédité*** : pour chaque vecteur v de $\mathcal{F}$ qui n'est pas dans $\mathcal{F}'$, on vérifie si v n'appartient pas à $\operatorname{Vect} \mathcal{F}'$. Si c'est le cas, on adjoint v à $\mathcal{F}'$.
- ***Terminaison*** : on s'arrête quand tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ ont été traités.

Ex. 15.16 Dans $\mathbb{R}^4$, soient

$$\vec{a} = (1, 2, 3, 4), \vec{b} = (1, 1, 1, 3), \vec{c} = (2, 1, 0, 5), \vec{d} = (1, 3, 1, -1), \vec{e} = (2, 3, 0, 1)$$

et $U = \operatorname{Vect}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ et $V = \operatorname{Vect}\left(\vec{d}, \vec{e}\right)$.
Quelles sont les dimensions de U, V, $U \cap V$ et $U + V$?

Cor. 15.16

IV. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

IV.1. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 15.35

Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$.

Démonstration

Ex. 15.17 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on pose $\mathcal{F} = (u, v, w)$ avec

$$u = (1, -1, 1), v = (0, -1, 2), w = (1, -2, 3)$$

1) La famille $\mathcal{F}$ est-elle liée ? Déterminer une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.
2) Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$. Donner une base de G. Montrer que $G = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

IV.2. Supplémentaire d'un espace vectoriel

Proposition 15.36

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

1) Il existe un supplémentaire G de F dans E, autrement dit, il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $F \oplus G = E$.
2) Si F est non trivial (c'est-à-dire $F \neq E$ et $F \neq \{0_E\}$), alors la réunion de toute base de F avec toute base d'un supplémentaire G de F dans E est une base de E adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
3) $\dim E = \dim F + \dim G$.

Démonstration

Proposition 15.37

F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension finie si et seulement si $\begin{cases} F \cap G &= \{0_E\} \\ \dim F + \dim G &= \dim E \end{cases}$

Démonstration

IV.3. Formule de Grassmann

Proposition 15.38

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Démonstration

V. Applications linéaires en dimension finie

Dans tout ce paragraphe, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

V.1. Définition à l'aide d'une base de l'espace de départ

Théorème 15.39

Étant donnée $\mathcal{B} = (u_1; u_2; ...; u_n)$ une base E et $\mathcal{F} = (v_1; v_2; ...; v_n)$ ***une famille quelconque de vecteurs de*** F, il existe ***une unique application linéaire*** ϕ telle que
$\forall k \in [\![1; n]\!], \phi(u_k) = v_k$.

Démonstration

Remarque

Le théorème précédent signifie qu'***en dimension finie, il suffit de donner les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ pour définir entièrement une application linéaire***.

Ex. 15.18 (Cor.)
Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $\phi(1;0) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\phi(0;1) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
Quelle est l'image par ϕ du vecteur $(-1;2)$?...
Quelle est l'image par ϕ du vecteur $(x;y)$?...

Corollaire 15.40

Si $E = E_1 \oplus E_2$, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et à E_2.

V.2. Image d'une famille par une application linéaire

Définition 15.41 (Image d'une famille par une application linéaire)

Étant données une famille $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de vecteurs de E et une application linéaire $f : E \to F$, on appelle ***image de la famille*** $\mathcal{E}$ ***par*** f la famille des images par f des vecteurs de $\mathcal{E}$.

Autrement dit, l'image de la famille $\mathcal{E}$ est la famille de vecteurs de F définie par

$$(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) = (f(e_i))_{i \in [\![1;n]\!]}$$

Notation

On note $f(\mathcal{E})$ l'image de la famille $\mathcal{E}$ par f.

Proposition 15.42 (Image d'une famille génératrice par une application linéaire)

Étant donnée une application linéaire $f : E \to F$, si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est ***une famille génératrice de*** E, alors $f(\mathcal{E})$ est ***une famille génératrice de*** $\operatorname{Im} f$.

Démonstration

Corollaire 15.43

Étant donnée $\mathcal{B} = (u_1; u_2; ...; u_n)$ une base E et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\operatorname{Im} \phi$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par $(\phi(u_1); \phi(u_2); ...; \phi(u_n))$:

$$\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Vect}(\phi(u_1); \phi(u_2); ...; \phi(u_n))$$

Corollaire 15.44

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim \operatorname{Im} \phi \leqslant \min(\dim E, \dim F)$$

Démonstration

Proposition 15.45 (Image d'une famille libre par une injection linéaire)

Étant donnée une application linéaire ***injective*** $f : E \to F$, si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est ***une famille libre de*** E, alors $f(\mathcal{E})$ est ***une famille libre de*** F.

Démonstration

Proposition 15.46 (Image d'une base par un isomorphisme)

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ ***une base de*** E et $f : E \to F$ une application linéaire.
f est un ***bijective*** si et seulement si $f(\mathcal{E})$ est ***une base de*** F.

Démonstration

Corollaire 15.47

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- il existe un isomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$;
- $\dim E = \dim F$.

E et F sont alors dits isomorphes.

Démonstration

V.3. Rang d'une application linéaire

Définition 15.48

On appelle ***rang d'une application linéaire*** entre deux espaces vectoriels de dimension finie ***la dimension de son image***.

Notation

On note : $\operatorname{rg} \phi = \dim \operatorname{Im} \phi$.

Remarque

Le rang d'une application linéaire ϕ est d'après le corollaire 15.43 le rang de la famille des images par ϕ des vecteurs d'une base de son espace de départ.

Propriété 15.49

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

Démonstration

Propriété 15.50

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

Si u est bijective, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.

Si v est bijective, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Démonstration

Théorème 15.51 (Formule du rang)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et

$\phi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} \phi + \dim \operatorname{Im} \phi = \dim \operatorname{Ker} \phi + \operatorname{rg} \phi$$

Démonstration

Corollaire 15.52 (Dimension d'un hyperplan)

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E. Alors

$$\dim H = \dim E - 1$$

V.4. Caractérisation des isomorphismes

Théorème 15.53

Soient E et F des espaces vectoriels de ***même*** dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

$$\phi \text{ injective} \Leftrightarrow \phi \text{ surjective} \Leftrightarrow \phi \text{ bijective}$$

Démonstration

Ex. 15.19 (Cor.) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_X^{X+1} P(t)\mathrm{d}t \end{cases}$.

1) Montrer que ϕ est linéaire.
2) Montrer que $\deg \phi(P) = \deg P$.
3) Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4) On note B_i l'image réciproque par ϕ de X^i.
   Calculer B_0, B_1, B_2, B_3.
5) Montrer que pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, $B_i(X+1) - B_i(X) = iX^{i-1}$.
6) Déduire des questions précédentes une expression simplifiée pour $p \in \mathbb{N}$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2$.

V.5. Exemple : suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Nous allons démontrer le théorème 9.32 dans le cas complexe. La démonstration est similaire dans le cas des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à valeurs réelles.

Proposition 15.54

On obtient une formule explicite pour le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ en résolvant l'équation caractéristique puis

- si $\Delta \neq 0$ en écrivant $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$ où z_1, z_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ doivent être calculées de sorte à ce que $u_0 = \lambda z_1^0 + \mu z_2^0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$;

- si $\Delta = 0$ en écrivant $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ vérifient $u_0 = (\lambda \times 0 + \mu)z_0^0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu)z_0 = (\lambda + u_0)z_0$.

Démonstration

VI. Correction des exercices

Cor. 15.18 :

$\phi(-1;2) = -\phi(1;0) + 2\phi(0;1) = -\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-1-2\sqrt{3}}{2};\frac{-\sqrt{3}+2}{2}\right)$

$\phi(x;y) = x\phi(1;0) + y\phi(0;1) = x\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x-y\sqrt{3}}{2};\frac{x\sqrt{3}+y}{2}\right)$

Cor. 15.19 :

1) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et P et Q deux polynômes de E.
Soient λ, μ deux constantes.
$\phi(\lambda P + \mu Q) = \displaystyle\int_X^{X+1} \lambda P(t) + \mu Q(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_X^{X+1} P(t)\mathrm{d}t + \mu \int_X^{X+1} Q(t)\mathrm{d}t.$
Donc $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$.

2) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de E, avec $p = \deg(P)$.
Par linéarité, $\phi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k\phi(X^k)$. Il suffit donc de démontrer que $\deg(\phi(X^k)) = k$.
En effet, en supposant ce dernier résultat vérifié, on a alors :
$\deg\phi(P) = \deg\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k\phi(X^k)\right) = p$ car le degré d'une somme est égal au maximum des degrés dans le cas où les termes de la somme sont de degrés distincts.
Montrons donc que $\forall k \in [\![0;n]\!], \deg(\phi(X^k)) = k$:
$\phi(X^k) = \displaystyle\int_X^{X+1} t^k\mathrm{d}t = \frac{(X+1)^{k+1} - X^{k+1}}{k+1}.$
D'où, en utilisant la formule du binôme, $\phi(X^k) = \frac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}X^i$ qui est de degré k.

3) ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ puisque elle est linéaire et que l'image d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
Pour montrer qu'elle est bijective, il suffit donc de montrer qu'elle est injective (propriété 15.52 du cours sur la caractérisation des isomorphismes en dimension finie).
Calculons $\operatorname{Ker}\phi$: soit P un polynôme tel que $\phi(P) = 0$. On a alors $\deg\phi(P) = -\infty = \deg(P)$ donc $P = 0$.
Donc $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$, ϕ est un endomorphisme injectif, donc bijectif : c'est un automorphisme.

4) On cherche B_0 tel que $\phi(B_0) = 1$. Notamment, B_0 est de degré 0 (d'après la question 2).
$\phi(a) = aX + a - aX = a$ donc $B_0 = 1$.
On utilise le même raisonnement pour calculer les autres polynômes :
$\phi(aX + b) = a\dfrac{X^2 + 2X + 1 - X^2}{2} + b = aX + \dfrac{a + 2b}{2} = X.$

Donc $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$.
$\phi(aX^2+bX+c) = a\dfrac{X^3+3X^2+3X+1-X^3}{3} + bX + \dfrac{b+2c}{2}$
$\phi(aX^2+bX+c) = aX^2 + (a+b)X + \dfrac{2a+3b+6c}{6} = X^2$.
Donc $B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$.
Enfin,
$\phi(aX^3+bX^2+cX+d) = a\dfrac{X^4+4X^3+6X^2+4X+1-X^4}{4} + bX^2 + (b+c)X + \dfrac{2b+3c+6d}{6}$
$\phi(aX^3+bX^2+cX+d) = aX^3 + \dfrac{3a+2b}{2}X^2 + (a+b+c)X + \dfrac{3a+4b+6c+12d}{12} = X^3$.
Donc $B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$ après calcul.

5) C'est probablement la question la plus difficile : soit $i \in [\![0;n]\!]$ et Q_i un polynôme primitif de B_i, autrement dit Q_i tel que $Q_i' = B_i$.
On sait que $\phi(B_i) = X^i$ par définition des polynômes B_i.
Or $\phi(B_i) = Q_i(X+1) - Q_i(X)$ par définition de ϕ.
Donc, $Q_i(X+1) - Q_i(X) = X^i$ et en dérivant, $B_i(X+1) - B_i(X) = iX^{i-1}$.

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{p} 3k^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{p} B_3(k+1) - B_3(k) = \frac{B_3(p+1) - B_3(1)}{3}$ par télescopage.
Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p^3 - \frac{3}{2}p^2 + \frac{1}{2}p - 0}{3} = \frac{p\,(2p^2 - 3p + 1)}{6} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

Maths - Chapitre 16

Dérivabilité

I. Dérivabilité en un point

I.1. Introduction

Ce chapitre a de multiples objectifs :

- faire une synthèse sur la construction de la notion de dérivée et l'obtention de ses propriétés opératoires notamment : nous démontrerons les différentes formules (somme, produit, composée, etc.) pour calculer une dérivée en un point puis nous en tirerons les conséquences concernant les fonctions dérivables sur un intervalle ;
- établir un lien entre la notion de dérivée qui est à priori locale (valable au voisinage d'un point) et d'autres notions (croissance d'une fonction, etc...) qui sont des notions globales (valables sur un intervalle) : c'est par exemple le cas du théorème donnant le sens de variation d'une fonction lorsque sa dérivée est de signe constant sur un intervalle ;
- faire une synthèse des différents outils du programme de classes préparatoires permettant l'étude des ***suites récurrentes*** : nous verrons en effet qu'on peut déduire de la continuité et/ou dérivabilité d'une fonction f des conséquences concernant le comportement d'une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$.

Par commodité, on utilisera la notation suivante.

Définition 16.1 (Intérieur d'un intervalle)

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$. ***L'intérieur*** de I est l'intervalle obtenu en privant I de ses bornes. On note $\mathring{I}$ l'intérieur de I. Un point est dit ***intérieur à*** I si c'est un point de $\mathring{I}$.

Ex. 16.1 Soit a et b deux réels avec $a < b$. Pour $I = [a, b]$ ou $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$ ou encore $I =]a, b[$, on a toujours .... Pour $I = [a, +\infty[$ on a ....

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes. On désigne par I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, c'est-à-dire contenant une infinité de points.
De plus on notera $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

I.2. Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition 16.2

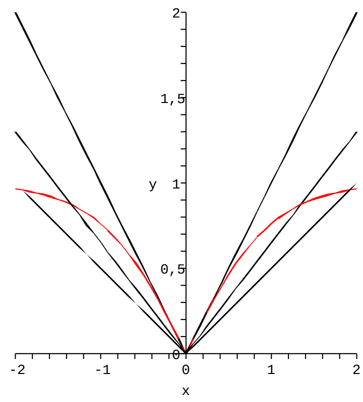
On appelle ***taux d'accroissement*** ou ***taux de variation*** de f en $a \in I$ la fonction

$$\tau_a : \begin{cases} I \backslash \{a\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

Géométriquement, le taux d'accroissement représente la pente de la droite passant par les points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$.

Définition 16.3 (Nombre dérivé)

On dit que f est dérivable en a si τ_a possède une limite finie lorsque x tend vers a. La limite est alors appelée ***nombre dérivé*** de f en a.
On dit que f est dérivable à gauche en a si τ possède une limite finie lorsque x tend vers a, $x < a$. La limite est alors appelée ***nombre dérivé à gauche*** de f en a.
On dit que f est dérivable à droite en a si τ possède une limite finie lorsque x tend vers a, $x > a$. La limite est alors appelée ***nombre dérivé à droite*** de f en a.



Notation

On note $f'(a)$ le nombre dérivé, $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ les nombres dérivés à gauche et à droite.

Proposition 16.4

$$f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \end{cases} \textbf{ et } f'_g(a) = f'_d(a)$$

I.3. Nombre dérivé, développement limité et tangente

Théorème 16.5

f est dérivable en a si et seulement si ***au voisinage de*** $x \to a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$$

Démonstration

Ce théorème a été démontré au chapitre 11 proposition 11.13.

Corollaire 16.6

Soit f une fonction continue en a.

- Si f est dérivable en a, alors $\mathcal{C}_f$ possède une tangente au point d'abscisse a, qui a pour équation
$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$
- Si f ***n'est pas dérivable en*** a mais que le taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$ en a,

alors $\mathcal{C}_f$ possède une tangente au point d'abscisse a, qui a pour équation

$$x = a$$

Remarque

Interprétation cinématique

Dans le cas où la variable représente le temps, le taux d'accroissement représente une ***vitesse moyenne***. La dérivée s'interprète alors comme une ***vitesse instantanée***.

Théorème 16.7 (Dérivable implique continue)

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration

Important ! Continue n'implique pas dérivable

La réciproque est fausse. La valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Si $x < 0$, le taux d'accroissement entre 0 et x vaut $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$. Si $x > 0$, le taux d'accroissement entre 0 et x vaut 1. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$. Ces limites étant différentes, la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Ex. 16.2 Soit $a \in \mathring{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et dérivable en a. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}$.

Cor. 16.2

I.4. Théorèmes opératoires

Proposition 16.8 (Opérations pour la dérivée en un point)

Soit f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dérivables en un point a de I.

- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$
- Le produit fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- Si g ne s'annule pas en a, l'inverse $\dfrac{1}{g}$ est défini sur un voisinage de a et est dérivable en a avec $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g^2(a)}$.
- Si g ne s'annule pas en a, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Démonstration

Proposition 16.9 (Composition de fonctions dérivables en un point)

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$ deux applications et a un point de I. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

Démonstration

Remarque

La démonstration qui consisterait à écrire que pour $x \neq a$,

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)\left(\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{f(x) - f(a)}\right)$$

puis à dire que la première parenthèse tend vers $f'(a)$ et la deuxième vers $g'(f(a))$ est naturelle, mais fausse. Il est possible que $f(x) - f(a)$ s'annule sur tout voisinage de a pour des valeurs différentes de a. Par exemple, $f : x \to x^2 \sin \frac{1}{x}$ s'annule une infinité de fois sur tout voisinage de 0. La fonction auxiliaire ψ évite ce problème.

Théorème 16.10 (Dérivée de la bijection réciproque en un point)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et continue, b un point de J et $a = f^{-1}(b)$. On suppose f dérivable en a. Alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Démonstration

I.5. Sens de variation et dérivée

Proposition 16.11 (Croissante implique dérivée positive)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et a un point de I.

- Si f est dérivable à gauche en a, on a $f'_g(a) \geqslant 0$.
- Si f est dérivable à droite en a, on a $f'_d(a) \geqslant 0$.
- Si f est dérivable en a, on a $f'(a) \geqslant 0$.

Démonstration

Définition 16.12 (Point anguleux)

Si f est ***continue en*** a, ***dérivable à gauche et à droite*** en a avec $f'_g(a) \neq f'_d(a)$, le point $A(a, f(a))$ s'appelle un ***point anguleux***.

Remarque

En un point anguleux $A(a, f(a))$, on définit
une demi-tangente à gauche d'équation $y = f(a) + f'_g(a) \times (x - a)$ et
une demi-tangente à droite d'équation $y = f(a) + f'_d(a) \times (x - a)$.

II. Dérivabilité sur un intervalle

Dans tout ce qui suit I et J sont des intervalles réels.

II.1. Définitions

Définition 16.13 (Fonction dérivée)

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
La fonction $\left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}\right.$ est alors appelée ***fonction dérivée*** ou plus simplement ***dérivée*** de f.

Notation

Elle est noté f' (notation de Newton) ou encore $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (notation de Leibniz).

Ex. 16.3

- Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^n$ a pour dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.

- Par définition (voir chapitre sur les fonctions usuelles) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{\mathrm{d}\,(\ln|x|)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$
- Nous avons aussi démontré dans le chapitre sur les fonctions usuelles
  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x), \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$
  $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{\mathrm{d}\,(a^x)}{\mathrm{d}x} =$ .... et $\forall r \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{\mathrm{d}\,(x^r)}{\mathrm{d}x} =$ ....
  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x), \cos'(x) = -\sin(x)$ et
  $\forall x \neq \frac{\pi}{2}[\pi], \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- Dérivées des bijections réciproques des fonctions trigonométriques :
  ....
  ....
  ....

Définition 16.14

Si f est une fonction dérivable sur I ***et que*** f' ***est continue sur*** I on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Définition 16.15

Si f est dérivable, et si sa dérivée est elle aussi ***dérivable de dérivée continue sur*** I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^2(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ la dérivée de f'.

Définition 16.16

De même, si f est $n \in \mathbb{N}$ fois dérivable sur I ***de dérivée*** n***-ième continue sur*** I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ la dérivée n-ième de f. On retrouve notamment pour $n = 0$ les fonctions $\mathcal{C}^0$ sur I c'est-à-dire continue sur I.

Définition 16.17

Enfin, si f est indéfiniment dérivable sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Ex. 16.4 Si f est dérivable et si elle est paire ou impaire, sa dérivée f' a-t-elle une parité ? Si oui, laquelle ?

Cor. 16.4

Ex. 16.5 Si f est dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est-elle aussi bornée ? Justifier.

Cor. 16.5

II.2. Théorèmes opératoires

Proposition 16.18 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I.

- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et
$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$
- Le produit fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas sur I, l'inverse $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.
- Si g ne s'annule pas sur I, le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Proposition 16.19 (Composition)

Si $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{K}$ sont deux fonctions dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f'.(g' \circ f)$.

Théorème 16.20 (Bijection réciproque)

Soit $f : I \to J$ une application bijective et dérivable. L'application f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I ; de plus $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Remarque

On peut retrouver cette formule en écrivant $f \circ f^{-1} = Id_J$ puis en dérivant comme une composée. On obtient en effet $(f^{-1})' \cdot (f' \circ f^{-1}) = 1$.
Une autre façon de retenir cette formule sans effort est d'utiliser la notation de Leibniz : on pose $y = f(x)$ donc $x = f^{-1}(y)$ et on a
$$(f^{-1})'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(y) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Ex. 16.6 Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont n fonctions dérivables sur I avec $n \geqslant 1$, que vaut la dérivée du produit $\prod_{i=1}^{n} u_i = u_1 u_2 \dots u_n$?

Cor. 16.6

Ex. 16.7 Calculer la dérivée, sur un ensemble à préciser, de $f : x \mapsto x^x$.

Cor. 16.7

Ex. 16.8 Existe-t-il des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Cor. 16.8

II.3. Théorèmes opératoires pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n(I)$

Proposition 16.21 (Combinaison linéaire)

Soit n un entier naturel. Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Pour tous α et β éléments de $\mathbb{K}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$.

Proposition 16.22 (Produit, formule de Leibniz)

Soit n un entier naturel. Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. La fonction fg est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{(formule de Leibniz)}$$

Démonstration

Proposition 16.23 (Composition)

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$ deux fonctions. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et g une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur J, alors $g \circ f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Proposition 16.24 (Quotient)

Soit n un entier naturel. Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec g qui ne s'annule pas sur I. Alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Théorème 16.25 (Bijection réciproque)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \to J$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. L'application f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

Les démonstrations de la proposition 16.23 et du théorème 16.25 sont hors-programme. La démonstration du théorème 16.24 repose sur le fait que $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g} = f \times h \circ g$ où h est la fonction inverse. Cette écriture permet de voir le théorème 16.24 comme une conséquence immédiate de la formule de Leibniz et du théorème de composition 16.23.

Remarque

- Il est immédiat que ces théorèmes se généralisent aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Les fonctions de référence vues au chapitre 7 sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité. ***Attention cependant*** : leur ensemble de dérivabilité n'est pas toujours leur ensemble de définition. Par exemple, ...
....
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin^{(k)}(x) =$ .... et $\cos^{(k)}(x) =$ ....
Ces deux dernières formules se démontrent aisément en écrivant :

$$\frac{\mathrm{d}^k e^{ix}}{\mathrm{d}x^k} = \cos^{(k)}(x) + i\sin^{(k)}(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ex. 16.9 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x^2 - x + 1)e^{-x} \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(n)}$.

Cor. 16.9

III. Éléments de calcul différentiel pour les fonctions à valeurs réelles

Dans cette section, on note $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, c'est-à-dire avec $a < b$ et les fonctions envisagées sont ***à valeurs réelles***. Le but de cette section est de démontrer des propriétés énoncées (sans démonstration) au chapitre 5 et d'énoncer en les démontrant des théorèmes généraux valables pour les fonctions définies sur I, dérivables sur $\overset{o}{I}$ et ***à valeurs réelles***. Nous verrons ultérieurement comment ces résultats peuvent être (ou non) étendus aux fonctions à valeurs complexes.

III.1. Extremums

Définition 16.26 (Extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I.

- On dit que f admet un ***minimum local*** m en a s'il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que m soit le minimum de f restreinte à $I \cap V(a)$.
- On dit que f admet un ***maximum local*** M en a s'il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que M soit le maximum de f restreinte à $I \cap V(a)$.

Proposition 16.27 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en un point a intérieur à I. Si $f(a)$ est un extremum local de f, alors $f'(a) = 0$ (la réciproque est fausse).

Démonstration

Remarque

- Si a est une borne de I, on peut avoir un extremum pour f en a et $f'(a) \neq 0$. Par exemple, $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ admet $f(1) = 1$ comme maximum et pourtant $f'(1) = 2$.
- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ est dérivable, $f'(0) = 0$, mais $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local.

III.2. Théorème de Rolle

Théorème 16.28 (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

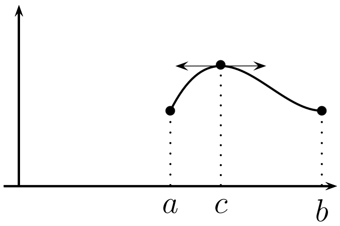


FIGURE 16.1 – Théorème de Rolle

Remarque

- Le théorème de Rolle, comme le théorème des valeurs intermédiaires, est un théorème d'existence. Il précise que sous certaines conditions la dérivée d'une fonction s'annule au moins une fois. Mais il ne donne ni la valeur du (ou des) points où cette dérivée s'annule, ni leur nombre exact.
- On notera bien qu'il n'est pas nécessaire pour f d'être dérivable en a et en b.
- La conclusion du théorème de Rolle est en défaut, si l'on supprime une seule des trois hypothèses.
  - ⋆ La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ si $0 \leqslant x < 1$ et $f(1) = 0$ est dérivable sur $]0,1[$ et $f(0) = f(1) = 0$. Mais f n'est pas continue en 1 et la dérivée de f sur $]0,1[$ qui est constante à 1 ne s'annule pas.
  - ⋆ La fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ est continue sur $[-1,1]$ et $f(-1) = f(1) = 1$. Mais f n'est pas dérivable en 0 et f', lorsqu'elle existe, ne prend que les valeurs -1 et 1, donc ne s'annule pas.
  - ⋆ La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. Mais $f(0) \neq f(1)$ et $f' = 1$ ne s'annule pas sur $]0,1[$.

Ex. 16.10 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-3)(x-1)x(x+2)(x+4)$. Montrer que f' possède quatre racines distinctes.

Cor. 16.10

III.3. Théorème des accroissements finis

Théorème 16.29 (Théorème des accroissements finis)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Démonstration

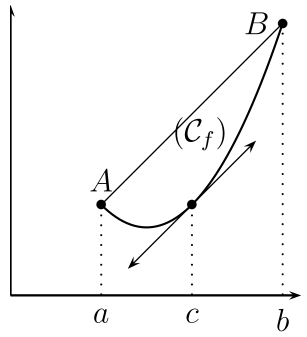


FIGURE 16.2 – Théorème des accroissements finis

Remarque

L'égalité $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ s'écrit aussi $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Le théorème des accroissements finis relie une notion globale (le taux d'accroissement entre deux points éloignés) et une notion locale (la dérivée en un point). Géométriquement, ce théorème affirme qu'il existe un point $C(c, f(c))$ de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la corde joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Ex. 16.11 Établir que pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.

Cor. 16.11

Corollaire 16.30 (Inégalité des accroissements finis : version réelle)

Si l'application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in]a, b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

Démonstration

III.4. Variation, extremums et dérivabilité

Proposition 16.31 (Fonction constante)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. La fonction f est constante sur I ***si et seulement si*** sa dérivée f' est nulle sur $\mathring{I}$.

Démonstration

Ex. 16.12 Soit $g : x \mapsto \text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x)$.

1) Ensemble de définition et continuité de g.
2) Ensemble de dérivabilité de g.
3) Calcul de g'.
4) Simplifier, pour $x \in [-1;1]$, l'expression de $g(x)$.

Proposition 16.32 (Variation et dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

- Si $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est croissante sur I.
- Si $f' \leqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est décroissante sur I.

Démonstration

Voici un corollaire qui complète la proposition 16.27.

Proposition 16.33 (Condition suffisante d'existence pour un extremum local)

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point intérieur à I et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Si la dérivée de f s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local.

Démonstration

Ex. 16.13 Trouver tous les réels a strictement positifs tels que $\forall x > 0, a^x \geqslant x^a$.
En déduire lequel des deux nombres e^π et π^e est le plus grand.

Cor. 16.13

Proposition 16.34 (Condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ avec f' de signe constant sur $\overset{\circ}{I}$. Alors f est strictement monotone si et seulement si f' n'est nulle sur aucun intervalle ouvert non vide.

Démonstration

Ex. 16.14 Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Cor. 16.14

Ex. 16.15 Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \text{ch}\, x + \cos x$.

Cor. 16.15

III.5. Limite de la dérivée

Proposition 16.35 (Limite de la dérivée)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est une fonction continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et si $f'(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$$

En particulier, si $l \in \mathbb{R}$, f est alors dérivable en a et $f'(a) = l$.

Démonstration

Remarque

Le théorème précédent permet d'éviter de vérifier « à la main » qu'une fonction est dérivable en un point où elle a été prolongée par continuité ***lorsque sa dérivée possède une limite en ce point***. L'exemple suivant permettra de mieux comprendre sa portée.

Ex. 16.16 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array} \right.$.

1) Montrer que la fonction est prolongeable par continuité en 0.
2) Montrer que ce prolongement $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Cor. 16.16

IV. Convexité

IV.1. Définition

Définition 16.36 (Fonction convexe)

On dit que f est convexe sur I si

$$\forall (x; y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Ex. 16.17 Étudier, pour $x < y$ réels donnés, la fonction $V : \lambda \in [0; 1] \mapsto (1-\lambda)x + \lambda y$.

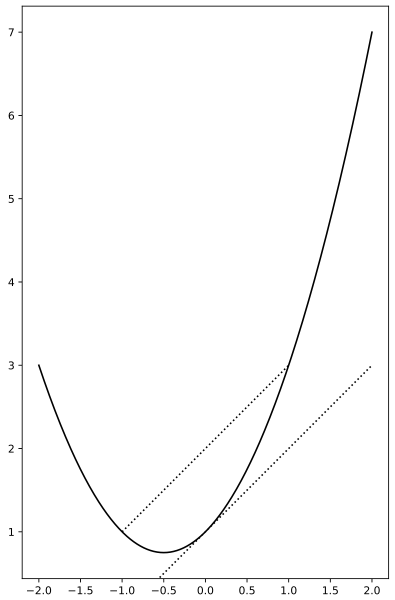
Remarque

Une fonction pour laquelle

$$\forall (x;y) \in I^2, \forall \lambda \in [0;1], f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \geqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

est dite ***concave*** sur I.
D'une manière générale, f est convexe sur I ***si et seulement si*** $-f$ est concave sur I.

IV.2. Interprétation géométrique



La définition précédente signifie, géométriquement, que la représentation graphique d'une fonction convexe se situe ***sous*** les segments reliant deux points de cette représentation graphique (on parle de ***cordes*** pour ces segments).
Au contraire, le théorème 16.38 affirme que la représentation graphique d'une fonction convexe se situe ***au-dessus*** de chacune de ses tangentes.

Lemme 16.37 (Lemme des trois pentes)

Soit I un intervalle non trivial, f une fonction convexe sur I et $a \in I$, $b \in I$ tels que $a < b$.
Alors

$$\forall x \in]a;b[, \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

Proposition 16.38 (Position par rapport aux tangentes)

Si f est une fonction ***convexe dérivable*** sur I, alors

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I, f'(x_0)(x-x_0) \leqslant f(x) - f(x_0)$$

Démonstration

Soit $a < x_0 < b$ dans I. Dans la définition d'une fonction convexe, on pose $x = a$, $y = b$ et λ de sorte à ce que $x_0 = (1-\lambda)a + \lambda b$.
On a donc $\lambda = \dfrac{x_0 - a}{b-a}$.

La définition de f convexe se réécrit $(b-a)f(x_0) \leqslant (b-x_0)f(a) + (x_0-a)f(b)$.
Ceci conduit à

$$(1) : \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$(2) : \frac{f(x_0)-f(b)}{x_0-b} \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

En faisant, pour f dérivable, la limite $a \to x_0$ dans (1), on obtient donc $f'(x_0) \leqslant \dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$.
De même, en faisant la limite $b \to x_0$ dans (2), on obtient donc $f'(x_0) \geqslant \dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$.
Ceci étant vrai pour tout $a < x_0 < b$, on obtient finalement le théorème énoncé en posant $x=a$ ou $x=b$ suivant la position relative de x vis-à-vis de x_0.

IV.3. Caractérisation des fonctions convexes

Théorème 16.39 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)

Soit I un intervalle non trivial, f une fonction dérivable sur I.
Alors f est convexe sur I ***si et seulement si*** f' est croissante sur I.

Démonstration

Théorème 16.40 (Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.
f est convexe ***si et seulement si*** $\forall x \in I, f''(x) \geqslant 0$.

Démonstration

Ex. 16.18 Soit a un réel, et $f_a : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^a$.
Pour quelle(s) valeur(s) de a f_a est-elle convexe ? concave ?

IV.4. Utilité de la notion de convexité

Méthode

La notion de convexité permet de démontrer de façon simple certaines inégalités.
Notamment, le théorème précédent est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction est convexe, puis la définition de la convexité permet alors de parvenir à des inégalités de façon parfois très efficace.

Ex. 16.19 Montrer que $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, 1 + \sqrt{xy} \leqslant \sqrt{(1+x)(1+y)}$$

Ex. 16.20 Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$$

En déduire que (pour des nombres strictement positifs)

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$$

V. Suites récurrentes

V.1. Rappels

Étude des suites récurrentes

Soit $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ une suite définie par récurrence associée à une fonction f réelle de la variable réelle.

Nous avons vu dans le chapitre 9 sur les suites, le chapitre 13 sur la continuité et le TD 3 sur les suites récurrentes les résultats suivants :

- Pour que l'existence de la suite u soit garantie il faut montrer que u_0 appartient à un ***intervalle I stable par f*** c'est-à-dire tel que $\forall x \in I, f(x) \in I$.
  On considère donc dans ce qui suit que $f : I \to I$.
- Si f est ***croissante*** sur I alors u est ***monotone***. Plus précisément :
  - ⋆ si $u_1 \geqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, et si f est ***croissante*** alors u ***est croissante*** ;
  - ⋆ si $u_1 \leqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, et si f est ***croissante*** alors u ***est décroissante***.

On peut conclure à la stricte monotonie de u si f est strictement croissante et si $g(u_0) \neq 0$.

- Si f est ***décroissante*** sur I alors u ***n'est en général pas monotone*** (la seule exception venant de la possibilité que u soit constante).
  Cependant $f \circ f$ est alors croissante et on étudie séparément la monotonie des termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite en utilisant le point précédent.
- Si f n'est ni croissante ni décroissante sur I, le comportement de la suite peut être très difficile à prévoir, voire chaotique... Ce type de suite est à priori beaucoup trop éloigné du programme pour faire l'objet d'exercices.
- Si f ***est continue sur*** I et ***si la suite*** u ***converge vers*** l alors l est ***un point fixe de*** f c'est-à-dire vérifie $f(l) = l$.

Ces résultats associés au théorème 9.50 de convergence monotone (ou au théorème de divergence monotone) et au théorème 13.36 (image continue d'un segment) conduisent aux méthodes ci-dessous.

Méthode : Obtention d'intervalles stables, existence de la suite

On étudie la fonction f de sorte à trouver un ou plusieurs intervalles stables par f. Plusieurs cas particuliers peuvent faciliter l'obtention de tels intervalles et l'étude de la suite :

- Si f est définie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est un intervalle stable par f !
- Si f est croissante, tout segment de la forme $[a;b]$ où a ***et*** b ***sont deux points fixes de*** f ***tels que*** $a<b$ est stable par f.
  En effet, $\forall x \in [a;b], a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \Rightarrow a \leqslant f(x) \leqslant b$.
- Si f est décroissante, on peut tenter d'appliquer le point précédent à $f \circ f$.
- ***Dans tous les cas, un tableau de variations bien construit et une représentation graphique correcte peuvent aider à déterminer un ou plusieurs intervalles stables par*** f.

Méthode : Monotonie *de la suite*

L'étude de f a permis de connaître ses variations.

- Si f est croissante on étudie le signe de $g = f - \mathrm{id}$:
  - ⋆ si g est ***positive sur l'intervalle stable par*** f ***considéré***, la suite est croissante ;
  - ⋆ si g est ***négative sur l'intervalle stable par*** f ***considéré***, la suite est décroissante.
- Si f est décroissante, on étudie les termes de rangs pairs et impairs de la suite en utilisant le point précédent.

Méthode : Convergence de la suite

L'étude de f et du signe de g a souvent permis à ce stade d'obtenir le ou les points fixes de f (les points où g s'annule sont les points fixes de f). Sinon, on peut penser à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g pour montrer qu'elle s'annule.
Les points fixes de f ***sont des candidats possibles pour la limite de la suite si elle converge !***
Pour montrer que la suite converge, le théorème de convergence monotone (appliqué à u ou aux suites extraites de rangs pairs et impairs) est souvent utile.
De même, pour montrer qu'elle diverge, on doit avoir à l'esprit le théorème de divergence monotone.

V.2. Vitesse de convergence

L'inégalité des accroissements finis (voir corollaire 16.30) permet de compléter l'étude d'une suite récurrente convergente pour préciser « la vitesse à laquelle elle converge vers sa limite ».
Aucune capacité particulière sur ce point n'est exigée par le programme. Nous l'illustrerons par un exemple.
Ex. 16.21 Nous avons déjà étudié (exercice 13.22) la suite récurrente définie pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ par $u_0 = 1, u_{n+1} = \dfrac{u_n + \frac{r}{u_n}}{2}$ et nous avons montré que

- u est décroissante à partir du rang 1 ;
- u converge vers $\sqrt{r}$.

Montrer que pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{r} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{r}}\left(u_n - \sqrt{r}\right)^2$.

En déduire que pour $r > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, si u_n est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-k} près alors u_{n+1} est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-2k} près.

Cor. 16.21

V.3. Fonctions lipschitziennes

Définition 16.41 (Fonction lipschitzienne)

Soient I un intervalle réel, $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est k-lipschitzienne sur I si

$$\forall (x; y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Proposition 16.42

Si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est majorée par $M \in \mathbb{R}_+$ alors f est M-lipschitzienne sur I.

Démonstration

Proposition 16.43

Si $I = [a; b]$ est un segment et si $f : I \to I$ est continue et k-lipschitzienne avec $k < 1$ alors f possède un unique point fixe.

Démonstration

Méthode : Utilisation pour les suites récurrentes

Pour une fonction f dérivable sur un segment I stable par f et k-lipschitzienne avec $k < 1$, toute suite récurrente u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ converge vers l'unique point fixe de f.

Ensembles, applications et dénombrement

I. Ensembles et applications

I.1. Rappels

Cardinal d'un ensemble fini

Nous avons déjà défini (voir paragraphe I.8. du chapitre 1) les notions suivantes.
Le nombre d'élément(s) d'un ensemble E fini est appelé ***cardinal de*** E.
C'est l'unique entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe des bijections $e : E \to [\![1; n]\!]$.
Chacune de ces bijections représente ***un ordre possible*** pour le dénombrement des éléments de E : c'est une ***numérotation de ces éléments***.
Le cardinal de E est noté $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$ ou encore $\#E$.
On a $\operatorname{Card} \emptyset = 0$.

Ex. 17.1 Soit E_n l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ et dont les coefficients valent 0 ou 1.
Calculer $\operatorname{Card} E_n$.

Cor. 17.1

Coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}, k \in [\![0; n]\!]$ ont été introduits en terminale comme le nombre de manières de choisir k objets parmi n objets.
Nous les avons définis (voir paragraphe III. du chapitre 1) d'une façon complètement différente en début d'année, notamment afin de donner et de démontrer la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!], \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Nous avons étendu leur définition dans le chapitre 11 sur les développements limités - au moment où nous avons obtenu le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ - en posant (coefficient binomial généralisé) pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(\alpha - k)}{p!} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)}{1 \times 2 \times ... \times p}$$

L'un des objectifs de ce chapitre est de montrer que les deux points de vue - celui de terminale où les coefficients binomiaux sont vus comme un outil de ***dénombrement***, et celui de PCSI où ils sont vus comme un outil de calcul littéral et d'analyse - correspondent bien aux mêmes nombres.

I.2. Ensemble des parties d'un ensemble

Notation

Étant donné un ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Autrement dit $\mathcal{P}(E) = \{K, K \subset E\}$.
Notamment $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ***possède un élément***
et $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset; \{a\}\}$ ***possède deux éléments***.

Remarque

Pour écrire que A est une partie d'un ensemble E on peut écrire
$A \subset E$: A **est inclus dans** E
ou
$A \in \mathcal{P}(E)$: A **appartient aux parties de** E

Ex. 17.2 Soit $E = \{a; b; c\}$. Que vaut $\mathcal{P}(E)$?

Cor. 17.2

I.3. Image directe, image réciproque d'une partie

Soient E et F deux ensembles et $u : E \to F$ une application.

Définition 17.1 (Image directe)

Pour une partie A de E, on appelle **image directe de** A **par** u le sous-ensemble de F défini par $\{u(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A, u(x) = y\}$
Autrement dit, c'est **l'ensemble des images par** u **des éléments de** A.

Notation

On note $u(A)$ l'image directe de A par u.

Remarque

Avec les notations précédentes :

- $u(\emptyset) = \emptyset$
- Si $A = E$, on obtient $u(E) = \operatorname{Im} u$ l'ensemble image de u.

Important !

Ne pas confondre l'ensemble image $u(E) = \operatorname{Im} u$ et l'ensemble d'arrivée F d'une application.
En effet $u(E) = F \Leftrightarrow$ ....

Ex. 17.3 Soient $E = \{a; b; c\}$, $F = \{r; s; t\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = r$, $f(b) = t$ et $f(c) = t$.
Que valent $f(\{b, c\})$ et $f(E)$?

Cor. 17.3

Définition 17.2 (Image réciproque)

Si B est une partie de F, on appelle **image réciproque de** B **par** u le sous-ensemble de E défini par $\{x \in E, u(x) \in B\}$
Autrement dit, c'est **l'ensemble de tous les antécédents des éléments de** B.

Notation

On note $u^{-1}(B)$ l'image réciproque de B par u.

Important !

Cette notation prête à confusion puisque $u^{-1}(B)$ est toujours défini tandis que u^{-1}, bijection réciproque de u, n'est définie que si ....

Remarque

Avec les notations précédentes :

- $u^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- $u^{-1}(F) = E$

Pour une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$, par définition, $\operatorname{Ker} u =$ ....

Ex. 17.4 Soient $E = \{a; b; c\}$, $F = \{r; s; t\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = r$, $f(b) = t$ et $f(c) = t$.
Que valent $f^{-1}(\{r\})$, $f^{-1}(\{s\})$ et $f^{-1}(\{t\})$.

Cor. 17.4

I.4. Fonction indicatrice

Définition 17.3 (Fonction indicatrice d'une partie)

Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle ***fonction indicatrice de la partie*** A ***de*** E l'application

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} E & \to & \{0; 1\} \\ x \in A & \mapsto & \mathbb{1}_A(x) = 1 \\ x \notin A & \mapsto & \mathbb{1}_A(x) = 0 \end{cases}$$

Propriété 17.4

Étant donné un ensemble E et deux parties A et B de E, on a

1) $\mathbb{1}_E$ est l'application constante égale à 1.
2) $\mathbb{1}_\emptyset$ est l'application constante égale à 0.
3) $\forall x \in E, 0 \leqslant \mathbb{1}_A(x) \leqslant 1$.
4) $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$
5) $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
6) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
7) $\mathbb{1}_{A\cup B} + \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$
8) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
9) L'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E,\{0;1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{cases}$ est bijective.

Démonstration

- *Les trois premiers points sont évidents.*
- *Montrons que $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$.*
  Sens direct *: supposons $A \subset B$. Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$ donc $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.*
  Si $x \in A$, alors $x \in B$ donc $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$ et $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.
  Réciproque *: supposons $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$.*
  Soit $x \in A$. $\mathbb{1}_A(x) = 1 \leqslant \mathbb{1}_B(x)$ donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$ et $x \in B$. Donc $A \subset B$.
- *$A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ se montre en utilisant deux fois la propriété précédente pour $A \subset B$ et $B \subset A$.*
- *Montrons que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.*
  Si $x \in A \cap B$, alors $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$. De plus $x \in A$ et $x \in B$ donc $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.
  Sinon, soit $x \notin A$, soit $x \notin B$, donc $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.
  Finalement $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
- *Les deux points suivants se montrent de façon similaire.*
- *Montrons que $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E,\{0;1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{cases}$ est bijective.*
  Soit $u \in \mathcal{F}(E,\{0;1\})$ et $A = u^{-1}(\{1\})$.
  Si $x \in A$ alors $u(x) = 1$, sinon $u(x) \neq 1$ donc $u(x) = 0$.
  Donc $u = \mathbb{1}_A$ donc Φ est surjective.
  De plus Φ est injective (car $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$) et par suite bijective.

II. Cardinal d'une partie d'un ensemble

II.1. Cardinal et fonction indicatrice d'une partie

Lemme 17.5

Soit E un ensemble fini et A une partie de E.

$$\operatorname{Card} A = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Conformément au programme officiel, cette propriété, très intuitive, est admise sans démonstration.

II.2. Cardinal d'une partie

Proposition 17.6

Si E est un ensemble fini et $A \subset E$ alors

$$\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} E \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E \Leftrightarrow A = E$$

Démonstration

- $\operatorname{Card} A = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) \leqslant \sum_{x \in E} 1 = \operatorname{Card} E$.
- *Si* $A = E$, $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E$.
  Sinon, il existe $x_0 \in E, x_0 \notin A$ *d'où* $\mathbb{1}_A(x_0) = 0 < 1$.
  Donc $\operatorname{Card} A = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) < \sum_{x \in E} 1 = \operatorname{Card} E$.
  Donc $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E \Leftrightarrow A = E$.

II.3. Opérations sur les cardinaux

Proposition 17.7

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$$

En particulier,
$\operatorname{Card}(A \cup B) \leqslant \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$
$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
et $\operatorname{Card} \overline{A} = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} A$.

Démonstration

$\operatorname{Card}(A \cup B) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) + \sum_{x \in E} \mathbb{1}_B(x) - \sum_{x \in E} \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$ *donc*
$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$.

Proposition 17.8

Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et $\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F$.

Démonstration

Soient n *le cardinal de* E *et* $b : E \to [\![1; n]\!]$ *une bijection associée.*
$E \times F = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{b^{-1}(i)\} \right) \times F = \bigcup_{i=1}^{n} \big(\{b^{-1}(i)\} \times F \big)$ *est une partition de* $E \times F$ *donc*
$\operatorname{Card} E \times F = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}\Big(\{b^{-1}(i)\} \times F \Big)$ *d'après la proposition précédente, d'où*

$\text{Card}\, E \times F = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}\, F = n\, \text{Card}\, F = \text{Card}\, E \times \text{Card}\, F.$

Une façon plus simple de se représenter ce résultat consiste à se représenter les éléments de $E \times F$, c'est-à-dire ***les couples formés d'un élément de E et d'un élément de F*** *comme les cases d'un tableau où chaque ligne correspond à un élément de E et chaque colonne à un élément de F :*

	f_1	f_2	$\dots$	f_p
e_1	$(e_1; f_1)$	$(e_1; f_2)$	$\dots$	$(e_1; f_p)$
e_2	$(e_2; f_1)$	$(e_2; f_2)$	$\dots$	$(e_2; f_p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
e_n	$(e_n; f_1)$	$(e_n; f_2)$	$\dots$	$(e_n; f_p)$

Le nombre d'éléments de $E \times F$ est le nombre de cases du tableau, c'est-à-dire $n \times p = \text{Card}\, E \times \text{Card}\, F$.

Corollaire 17.9

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\text{Card}\,(E^p) = (\text{Card}\, E)^p$.

II.4. Principe additif, principe multiplicatif

Méthode

Le ***principe additif*** de dénombrement est l'utilisation de la formule 17.7 aux problèmes de dénombrement. Il s'utilise lorsque l'on cherche à dénombrer des ensembles vérifiant ***une ou plusieurs propriétés données*** : choisir les éléments vérifiant une première propriété **ou** une seconde propriété **ou**...

Graphiquement, on représente ces problèmes par des ***diagrammes de Venn*** (cf. chapitre 2 section II.7.).

Le ***principe multiplicatif*** de dénombrement est l'utilisation de la propriété 17.8 et de son corollaire aux problèmes de dénombrement. Il s'utilise lorsque l'on cherche à dénombrer des ensembles résultant ***de choix successifs*** : on choisit un premier élément PUIS un deuxième élément PUIS...

Graphiquement, on représente ces problèmes par des ***arbres de choix***.

Ex. 17.5 Combien y a-t-il de mots possibles formés avec 2 lettres de l'alphabet ?
Combien y a-t-il de mots de 2 lettres commençant par la lettre `a` ou se terminant par la lettre `z`.
Combien y a-t-il de mots de 2 lettres distinctes ?

Cor. 17.5

III. Cardinal et applications entre ensembles finis

III.1. Applications entre ensembles finis

Théorème 17.10 (Cardinal et applications)

Soient E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

- $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} f(E)$ et $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \Leftrightarrow f$ est injective.
- Si f est surjective, alors $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est injective, alors $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est bijective, alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Démonstration

- *Par définition de $f(E)$, chaque élément de $f(E)$ possède au moins un antécédent dans E. La propriété $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} f(E)$ s'en déduit immédiatement avec égalité si et seulement si $\forall y \in f(E), \operatorname{Card} f^{-1}(\{y\}) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si f injective.*
- *Si f est surjective alors $F = f(E)$ donc $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$ d'après le point précédent.*
- *Supposons f injective. Comme $f(E) \subset E$, on déduit du premier point que $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \leqslant \operatorname{Card} F$ d'après la proposition 17.6.*
- *Si f est bijective, elle est injective et surjective, donc $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$ donc $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.*

Théorème 17.11 (Applications entre ensembles de même cardinal)

Soient E et F deux ensembles ***finis***, $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ alors
$(f \text{ injective}) \Leftrightarrow (f \text{ surjective}) \Leftrightarrow (f \text{ bijective})$.

Démonstration

- *Si f est bijective, elle est par définition injective et surjective. Il suffit donc de démontrer que si f est surjective alors elle est injective et réciproquement.*
- *Supposons f injective. Alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} F$ donc $f(E) = F$ d'après la proposition 17.6. Donc f est surjective.*
- *Supposons f surjective. Alors $\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$ donc f est injective d'après le théorème précédent.*

Important !

Ce théorème est faux si E et F n'ont pas le même cardinal ou s'ils sont infinis.

Méthode

Le théorème 17.10 s'utilise de la façon suivante : pour dénombrer un ensemble fini, on peut montrer qu'il existe une ***bijection*** entre cet ensemble et un ensemble dont on connaît le nombre d'éléments.
En pratique, on ne justifie pas qu'il s'agit effectivement d'une bijection et on rédige simplement par
« ***Il y a autant de...*** »

Ex. 17.6 Combien un n-gone (c'est-à-dire un polygone à n côtés) convexe (c'est-à-dire sans angle « rentrant ») possède-t-il de diagonales ?

Cor. 17.6

III.2. Corollaire : principe des tiroirs ou principe de Dirichlet

Méthode

On appelle ***principe des tiroirs ou principe de Dirichlet*** le principe selon lequel
« Si on range n objets dans p tiroirs avec $n > p$, alors il y a au moins un tiroir contenant deux objets ou plus. »
Ce principe est la contraposée du théorème 17.10 :
E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, si $\operatorname{Card} E > \operatorname{Card} F$ alors f n'est pas injective.
En pratique, dans des exercices aux énoncés similaires, on démontrera la contraposée de l'énoncé.

Ex. 17.7 Montrer que dans un groupe de 25 personnes, il en existe au moins 3 qui sont nées le même mois.

Cor. 17.7

III.3. Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Théorème 17.12

Si E et F sont deux ensembles finis non vides, alors $\mathcal{F}(E, F)$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{Card} \mathcal{F}(E, F) = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}$$

Démonstration

Remarque

En notant $n = \operatorname{Card} E$, ***il y a donc autant*** d'applications dans $\mathcal{F}(E, F)$ que de n-uplets dans F^n.
C'est la raison pour laquelle $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi noté F^E.

III.4. Cardinal de l'ensemble des parties

Théorème 17.13

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et son cardinal vaut

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^n$$

Démonstration

IV. Listes

IV.1. p-listes d'éléments distincts d'un ensemble

Définition 17.14

Soit E un ensemble et p un entier.
p-liste d'éléments de E, ***p-uplet d'éléments de*** E et ***famille de*** p ***éléments de*** E sont des synonymes.
On appelle ***p-liste d'éléments distincts*** de E tout p-uplet $(x_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ de E vérifiant $\forall (i; j) \in [\![1; n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.
Plus simplement, ce sont les listes ***de*** p ***éléments de*** E***, sans répétition possible d'un même élément***.

Théorème 17.15

Le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n vaut

$$A_n^p = 0 \text{ si } p > n \qquad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leq n$$

Démonstration

IV.2. Nombre d'injections entre deux ensembles finis

Théorème 17.16

Soient E et F deux ensembles finis non vides. On note $n = \operatorname{Card} E > 0$ et $p = \operatorname{Card} F > 0$.
Alors le nombre d'injections de $F \to E$ est A_n^p.

Démonstration

IV.3. Nombre de bijections entre deux ensembles finis

Théorème 17.17

Soient E et F deux ensembles non vides finis de même cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre de bijections de E dans F vaut $A_n^n = n!$

Démonstration

Définition 17.18

Dans le cas particulier où $E = F$, les bijections sont appelées ***permutations*** de E. Le nombre de permutations d'une ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est donc $n!$.

Notation

L'ensemble des permutations d'un ensemble fini E est noté $\mathfrak{S}(E)$.
L'ensemble des permutations de $[\![1; n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est noté $\mathfrak{S}_n$.
Les permutations d'un ensemble fini se notent de la façon suivante : on écrit sur une ligne les éléments de E, et sous chaque élément, son image.

Ex. 17.8 Soient l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ et la permutation $\phi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.
Calculer $\phi \circ \phi(a)$, $\phi \circ \phi(b)$, $\phi \circ \phi(c)$. Que vaut $\phi \circ \phi$?

Cor. 17.8

V. Combinaisons

V.1. Définition

Définition 17.19

Sous-ensemble, partie, combinaison sont des synonymes. Plus précisément :
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.
On appelle ***combinaison*** de E tout sous-ensemble de E.
De même, on appelle ***combinaison de*** p ***éléments*** de E tout sous-ensemble de E de cardinal p.

V.2. Expression du nombre de combinaisons

Proposition 17.20

Pour $\operatorname{Card} E = n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0; n]\!]$, il y a

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

combinaisons de p éléments de E.

Démonstration

Propriété 17.21

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![1; n]\!], \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}$: démonstration combinatoire.

Démonstration

Corollaire 17.22

$\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$: démonstration combinatoire.

Démonstration

Ex. 17.9 On appelle ***partition d'un entier*** n ***strictement positif*** toute écriture de n comme somme d'entiers strictement positifs.
Par exemple, il y a quatre partitions de 3 qui sont : $3 = 2+1 = 1+2 = 1+1+1$.
Ou encore, il y a huit partitions de 4 qui sont : $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+3 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$.
Montrer qu'il y a 2^{n-1} partitions de $n \in \mathbb{N}^*$.

Cor. 17.9

V.3. Utilisation : calcul du nombre d'anagrammes d'un mot

Méthode

De nombreux problèmes de dénombrement peuvent être modélisés par le calcul du nombre d'anagrammes d'un mot donné.

Les méthodes suivantes peuvent être utilisées pour ces calculs :

- lorsque toutes les lettres du mot sont distinctes, le nombre d'anagrammes ***est le nombre de permutations des lettres du mot***;
- lorsque plusieurs lettres sont identiques, dénombrer les anagrammes ***revient à choisir***

d'abord la position des lettres identiques parmi les positions possibles, puis à obtenir le nombre de permutations des lettres restantes.

Ex. 17.10

1) Combien y a-t-il de mots formés des 26 lettres de l'alphabet, utilisées chacune une seule fois ?
2) Combien y a-t-il de mots de 26 lettres (choisies dans l'alphabet, sans autre contrainte) ?
3) Combien y a-t-il de mots de 26 lettres ne contenant que des A et des B ?
4) Combien y a-t-il de mots de 26 lettres contenant exactement 13 lettres A et 13 lettres B ?
5) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot $ABAISSER$?

Maths - Chapitre 18

Matrices

Le but de ce chapitre est de faire le lien entre le calcul matriciel d'une part et les espaces vectoriels et applications linéaires d'autre part. Ce lien sera assuré en particulier par le théorème 15.39. Les chapitres 12, 15 et 10 sont à réviser. Notamment, dans le chapitre 10, le paragraphe II.1. sur le produit matriciel, le paragraphe I.7. sur les propriétés du produit matriciel et le suivant sur les règles qui ne sont plus valables pour ce produit doivent être connus, ainsi que les méthodes sur le calcul de l'inverse d'une matrice inversible par exemple.
De même, les paragraphes II., III. et V. du chapitre 15 doivent être parfaitement connus.
Dans tout ce qui suit, n et p sont deux entiers naturels non nuls, E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p et $(\mathbb{K}, +, .)$ désigne un corps - pour nous $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Rappels et compléments

I.1. Matrices diagonales

Définition 18.1 (Centre (hors-programme))

On appelle ***centre*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices M qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non vide puisqu'il contient la matrice identité.

Théorème 18.2

Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\text{Vect}(I_n)$.

Démonstration hors programme

Soit M une matrice du centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Puisqu'elle commute avec toute les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elle commute notamment avec les matrices d'opérations élémentaires.
En écrivant cela pour les matrices de dilatation, on montre que M est une matrice diagonale.
Puis en l'écrivant pour les matrices de transvection, on montre que tous les coefficients diagonaux de M sont égaux, donc qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.
Réciproquement, une matrice de cette forme commute avec toute matrice donc appartient au centre.

Remarque

En particulier les matrices diagonales ne commutent pas avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex. 18.1 Calculer AB et BA pour :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Cor. 18.1

Propriété 18.3

Multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ***à gauche*** par une matrice diagonale D revient à multiplier ***chaque ligne*** de A par le coefficient diagonal de D de même indice de ligne.
Multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ***à droite*** par une matrice diagonale D revient à multiplier ***chaque colonne*** de A par le coefficient diagonal de D de même indice de colonne.

I.2. Applications linéaires : rappels

Théorème 15.39 : définition d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de l'espace vectoriel E (qui est donc de dimension ....) et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille de n vecteurs de l'espace vectoriel F, supposé ici de dimension quelconque, finie ou infinie.
Alors ....

Ex. 18.2 Soit f l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ où $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $(i; j; k)$ vérifiant

$$\begin{array}{lclclcl} f(i) & = & 2i & - & 3j & & \\ f(j) & = & 3i & + & j & - & 4k \\ f(k) & = & & & 11j & - & 8k \end{array}$$

Calculer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Cor. 18.2

Théorème 15.53 : caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Soient E et F des espaces vectoriels de ***même*** dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors ....

I.3. Sous-espaces vectoriels et notion de dimension : synthèse

Il faut connaître tous les espaces vectoriels de référence dont un résumé se trouve dans le chapitre 15, section I.3.

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

- On peut montrer que
  - ⋆ $F \subset E$;

  * $0_E \in F$;
  * F est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire

$$\forall(u;v) \in F^2, \forall(\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in F$$

- On peut montrer que $F = G \cap H$ où G et H sont deux sous-espaces vectoriels connus de E.
- On peut montrer que $F = G + H$ où G et H sont deux sous-espaces vectoriels connus de E.
- On peut montrer que $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E.
- On peut montrer que $F = \mathrm{Ker}\, u$ où $u \in \mathcal{L}(E, E')$.
- On peut montrer que $F = v(A)$ où $v \in \mathcal{L}(E'', E)$ et A est un sous-espace vectoriel de E''.

Notion de dimension

- On dit que E est un espace vectoriel de dimension finie ***s'il existe une famille finie génératrice de*** E.

  Dans ce cas, le théorème d'extraction de base garantit que l'on peut extraire de cette famille une sous-famille ***à la fois génératrice et libre*** : E possède donc une .....
- Le lemme fondamental permet alors de montrer que ***toutes les bases d'un même espace vectoriel ont même nombre de vecteurs*** : ce nombre est caractéristique de l'espace vectoriel et s'appelle ....
- Si F est un sous-espace vectoriel de E et s'ils sont tous les deux de dimension finie alors

$$\dim F \leqslant \dim E$$

  De plus, si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.
- ***Formule de Grassmann*** : F et G étant deux sous-espaces vectoriels de E (de dimension finie),

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

- Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
  * Par définition, $\mathrm{Im}\, u$ est un sous-espace vectoriel de F.

    Donc $\mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u \leqslant \dim F$.
  * L'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$.

    Donc $\mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u \leqslant \dim E$.
  * u est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, u = F$.

    Dans ce cas, on a donc $\mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u = \dim F \leqslant \dim E$.
  * ***Théorème du rang*** : $\dim \mathrm{Im}\, u + \dim \mathrm{Ker}\, u = \dim E$.
  * u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$.

    Dans ce cas, on a donc $\mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u = \dim E \leqslant \dim F$.
  * Une application linéaire bijective est appelée ***isomorphisme*** lorsque $E \neq F$, ou ***automorphisme*** lorsque $E = F$.

Deux espaces vectoriels sont dits ***isomorphes s'il existe un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels.***

- ⋆ Si E et F sont isomorphes, alors il existe une application linéaire bijective de E dans F : d'après ce qui précède, on a donc $\dim E \leqslant \dim F \leqslant \dim E$ c'est-à-dire $\dim E = \dim F$.
- ⋆ u est bijective si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F.

Ex. 18.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\phi : P \in E \mapsto P(X+1) \in E$.

1) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$?
2) Montrer que ϕ est linéaire.
3) Calculer l'image par ϕ de la base canonique de E.
4) Montrer que ϕ est un automorphisme.
5) Calculer $\phi(Q)$ où $Q = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$. En déduire des propriétés des coefficients binomiaux.

Cor. 18.3

II. Les *diverses* interprétations vectorielles des matrices

II.1. Matrice d'un vecteur dans une base

Définition 18.4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et u un vecteur de E.
On appelle ***matrice de*** u ***dans*** $\mathcal{B}$ la matrice

$$(x_i)_{i \leq n} \quad \text{où} \quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est la matrice colonne composée des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$.

Notation

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Ex. 18.4 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $u = (7; 3; -2)$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$

Cor. 18.4

Ex. 18.5 Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\mathcal{C}$ la base canonique et $P = (X+1)^n$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(P) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{i \in [\![1;n+1]\!]}.$$

Cor. 18.5

II.2. Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 18.5

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{S} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteur(s) de E.
On appelle ***matrice de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}$*** la matrice

$$(u_{i,j})_{\substack{i \leq n \\ j \leq p}} \qquad \text{avec } \forall j \in [\![1;p]\!]\,, u_j = \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} e_i$$

Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$ est la matrice $(U_1|U_2|...|U_p)$ des colonnes U_j composées des coordonnées des u_j dans $\mathcal{B}$.

Notation

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$ la matrice de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}$.
Lorsque la famille $\mathcal{S}$ ne contient qu'un seul vecteur u, la matrice de la famille est celle du vecteur.

Ex. 18.6 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{S} = ((1;0;3);(-1;-1;2))$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Cor. 18.6

Ex. 18.7 Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\mathcal{C}$ la base canonique et $\mathcal{F} = \left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{k \in [\![0;n]\!]}$.

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{\substack{i \in [\![1;n+1]\!] \\ j \in [\![1;n+1]\!]}}.$$

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$. En déduire une propriété vérifiée par les colonnes de M.

Cor. 18.7

Important !

La matrice d'une famille $\mathcal{S}$ ***dépend de la base*** $\mathcal{B}$ ***dans laquelle on décompose les vecteurs de*** $\mathcal{S}$. Pour cette raison, il ne faut pas oublier de préciser dans quelle base s'effectue la décomposition : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$.

II.3. Matrice d'une application linéaire

Définition 18.6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies avec $p = \dim E \in \mathbb{N}^*$ et $n = \dim F \in \mathbb{N}^*$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ des bases respectives de E et F.

D'après le théorème 15.39, ***il existe une unique application linéaire*** ϕ telle que

$$\forall j \in [\![1;p]\!], \phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

On appelle ***matrice de*** ϕ ***relativement à*** $\mathcal{B}$ ***et*** $\mathcal{B}'$ la matrice $(a_{i,j})_{\substack{i \leq n \\ j \leq p}}$.

Notation

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ la matrice de ϕ relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi(e_1), \phi(e_2), ..., \phi(e_p)) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phi(e_1) & \phi(e_2) & \cdots & \phi(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Ex. 18.8

Quelle est la matrice associée à $\psi : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y; -2x + 3y) \in \mathbb{R}^2$ relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$?

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\psi) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Quelle est l'application linéaire $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ donnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

$\chi : (x; y; z) \mapsto$

Cor. 18.8

Ex. 18.9 On reprend l'application $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1)$ de l'exercice 18.3.
Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Cor. 18.9

II.4. Cas particuliers

Notation

Lorsque ϕ est un ***endomorphisme de*** E rapporté à une base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire lorsque $\phi : ... \to ...$, on note plus simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$.

Important !

Il est cependant possible de rapporter un même espace vectoriel E à deux bases différentes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et d'écrire la matrice d'un endomorphisme ϕ de E rapporté à $\mathcal{B}$ pour les vecteurs de départ et à $\mathcal{B}'$ pour leurs images : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ pour $\phi \in \mathcal{L}(E)$. ***Nous verrons même plus loin que cette possibilité offre une excellente interprétation géométrique aux matrices carrées inversibles !***

Définition 18.7

On appelle ***application linéaire canoniquement associée*** à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'application $\phi \in \mathcal{L}(..., ...)$ dont la matrice relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}$ de ... et $\mathcal{B}'$ de ... est A.

Ex. 18.10 Quelle est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$? Est-elle injective ? Quel est son rang ?

Cor. 18.10

II.5. Remarques

1) Si on change les bases des ensembles de départ ou d'arrivée d'une application linéaire, la ***matrice associée à l'application linéaire est complètement modifiée !***
2) La matrice de l'application nulle est la matrice nulle quelles que soient les bases des espaces de départ et d'arrivée.
3) ***MAIS***, la matrice de l'application identité $E \to E$ ***n'est la matrice identité que si*** E ***est rapporté à la même base au départ et à l'arrivée !***
   $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$ pour $\dim E = n$.

Ex. 18.11 Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ et les bases $\mathcal{B} = (1; X; X^2)$ et $\mathcal{B}' = (X(X-1); X(X+1); (X-1)(X+1))$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi)$.

Cor. 18.11

II.6. Théorème d'isomorphisme

Théorème 18.8 (Admis)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
L'application $\Theta : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \phi & \mapsto & \Theta(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Corollaire 18.9

Pour E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p = \dim E \times \dim F$.

II.7. Image d'un vecteur par une application linéaire

Proposition 18.10

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ associée à la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $u \in E$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$.
Alors les coordonnées de $\phi(u) \in F$ dans $\mathcal{B}'$ sont les coefficients de MX.

Démonstration

Ex. 18.12 Quelle est l'image du vecteur $(-2; 1)$ par l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$?

Cor. 18.12

II.8. Deuxième interprétation du produit matriciel

Proposition 18.11

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ associée à la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$.
Soit par ailleurs $\mathcal{S} = (u_1, u_2, ..., u_q)$ une famille de $q \in \mathbb{N}^*$ vecteur(s) de E associée à la matrice $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$.
Alors

$$MS = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi(u_1), \phi(u_2), ..., \phi(u_q)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(\phi(\mathcal{S})\big)$$

Démonstration

II.9. Troisième interprétation du produit matriciel

Proposition 18.12

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives q, p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_q)$, $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_p)$ et $\mathcal{B}'' = (g_1, g_2, ..., g_n)$.
Soient $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(\psi \circ \phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\psi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$$

Démonstration

Ex. 18.13 On reprend l'application $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1)$ de l'exercice 18.3.
On définit de plus $\psi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X-1)$.
Que peut-on dire de $\phi \circ \psi$? de $\psi \circ \phi$?
Donner la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi)$ puis calculer AB et BA.

Cor. 18.13

II.10. Cas particuliers

1) Si ϕ et ψ sont des endomorphismes de E rapporté à $\mathcal{B}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi\circ\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi \circ \psi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$: le produit matriciel n'est pas commutatif car ....
....
2) Si ϕ est une forme linéaire de E rapporté à $\mathcal{B}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},(1)}(\phi) = (............................)$: une matrice-ligne s'interprète naturellement comme ....

III. Isomorphismes et changements de bases

III.1. Caractérisation des isomorphismes par leur matrice

Théorème 18.13

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$.
$\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
On a de plus dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\phi^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)^{-1}$$

Démonstration

III.2. Caractérisation des matrices inversibles

Proposition 18.14

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$.

Démonstration

III.3. Matrices de passage

Définition 18.15

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ deux bases de E.
On appelle ***matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$*** la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
Autrement dit, ***la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ exprimée dans la base $\mathcal{B}$***.

Notation

On la note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Remarque

On a aussi $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.
Notamment, toutes les matrices de passage sont ....
En effet, ...

III.4. Propriétés des matrices de passage

Propriété 18.16 (Inverse d'une matrice de passage)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ deux bases de E. Alors :

$$\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

Démonstration

Propriété 18.17 (Produit de deux matrices de passage)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E. Alors :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$$

Démonstration

Ex. 18.14 • Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = ((1;1);(2;3))$.

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ car

• Dans $\mathbb{R}_2[X]$, avec $\mathcal{B}$ la base canonique, $\mathcal{B}' = (X(X+1); X(X+2); (X+1)(X+2))$ et $\mathcal{B}'' = (1; X; 2X^2 - 1)$.

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ car

Calculer les autres matrices de passage entre les différentes bases données.

Cor. 18.14

III.5. Formules de changement de bases

Proposition 18.18 (Formule de changement de bases pour un vecteur)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

$$\forall u \in E, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

Démonstration

Ex. 18.15 Exprimer les coordonnées du polynôme $P = 3X^2 + 5X - 4$ dans les trois bases de l'exemple précédent.

Cor. 18.15

Proposition 18.19 (Formule de changement de bases pour une application linéaire)

Soient E de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et F de bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n.

On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$.

$$\forall \phi \in \mathcal{L}\left(E, F\right), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\phi) = P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = Q^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) P$$

Démonstration

Proposition 18.20 (Formule de changement de bases pour les formes linéaires)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

$$\forall \phi \in \mathcal{L}\left(E, \mathbb{K}\right), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) P$$

Proposition 18.21 (Formule de changement de bases pour les endomorphismes)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

$$\forall \phi \in \mathcal{L}\left(E\right), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P^{-1} A P$$

III.6. Matrices inversibles : résumé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$;
3) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$;
4) l'application linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A est bijective ;
5) A est une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{K}^n$;
6) $\forall W \in \mathbb{K}^n, AV = W$ admet une unique solution $V \in \mathbb{K}^n$;
7) $AV = 0_{\mathbb{K}^n}$ admet une unique solution $0_{\mathbb{K}^n} \in \mathbb{K}^n$.

Méthode

En pratique, pour déterminer l'inverse d'une matrice A, on utilise l'avant-dernière propriété qui revient à résoudre un système de n équations à n inconnues : ou bien $(A|I_n) \underset{L}{\sim} (I_n|B)$ et A est alors inversible et $A^{-1} = B$, ou bien le système est de rang strictement inférieur à n et A n'est pas inversible.
Une autre méthode fructueuse est l'interprétation de la matrice A comme matrice d'une application linéaire ou comme matrice de passage.

Méthode

Pour montrer qu'une famille de n vecteurs est une base d'un espace vectoriel de dimension n, il suffit de montrer que la ***matrice des coordonnées de cette famille*** dans une base donnée est une ***matrice inversible***.

Ex. 18.16

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 5y & + & z & = & u \\ -2x & + & y & - & z & = & v \\ 4x & - & y & + & 2z & = & w \end{array}\right.$ et en déduire l'inverse de $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cor. 18.16

IV. Noyau, image et rang d'une matrice

IV.1. Noyau et image d'une matrice

Définition 18.22

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\phi : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A.
On appelle ***noyau de la matrice*** A le noyau de ϕ.
On appelle ***image de la matrice*** A l'image de ϕ.

Notation

On note, comme pour les applications linéaires, $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de A et $\mathrm{Im}(A)$ l'image de A.

Remarque

Avec les notations de la définition, $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de … et $\mathrm{Im}(A)$ un sous-espace vectoriel de … .

IV.2. Conservation de la dimension du noyau et de l'image par multiplication par des matrices inversibles

Proposition 18.23

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $N \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles. Alors

$$\dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathrm{Ker}(MA) = \dim \mathrm{Ker}(AN)$$

et

$$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim \mathrm{Im}(MA) = \dim \mathrm{Im}(AN)$$

Démonstration

IV.3. Rang d'une matrice

Définition 18.24

On appelle ***rang*** d'une matrice A la dimension de son image : $\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Remarque

Le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc aussi le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$.

IV.4. Théorème du rang : version matricielle

Théorème 18.25 (Théorème du rang)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a

$$\mathrm{rg}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = p$$

IV.5. Caractérisations des matrices inversibles

Théorème 18.26

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\mathrm{rg}(A) = n$;
3) $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$.

Démonstration

En remarquant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont égales pour l'application linéaire canoniquement associée à A, il s'agit d'une conséquence directe du théorème 15.53 énonçant des équivalences similaires pour les applications linéaires.

IV.6. Rang et transposition

Propriété 18.27

Quelle que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^{\mathrm{T}}$;
- $\mathrm{rg}\, A \leq \min(n, p)$.

Démonstration

Remarque

Ce théorème permet d'affirmer que le rang d'une matrice est aussi bien égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes que de celle de ses vecteurs colonnes. Plus généralement, il autorise à faire aussi bien des opérations sur les lignes que sur les colonnes pour obtenir de façon algorithmique le rang d'une matrice.

Ex. 18.17 $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =$

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 1 & -3 \\ 6 & -9 & -6 & 0 \end{pmatrix} =$

Cor. 18.17

Maths - Chapitre 19

Probabilités

La théorie des probabilités naît dans un premier temps d'une réponse que **Galilée**[1] donne à une question du Prince de Toscane : « Lorsqu'on lance 3 dés et qu'on additionne les résultats, il y a 6 manières d'obtenir 9 et 6 manières d'obtenir 10. Pourquoi alors leur somme est plus souvent égale à 10 qu'à 9 ? »

FIGURE 19.1 – Décompositions de 9 et 10 en sommes de 3 dés.

$$9 = \begin{cases} 1+2+6 \\ 1+3+5 \\ 1+4+4 \\ 2+2+5 \\ 2+3+4 \\ 3+3+3 \end{cases} \qquad 10 = \begin{cases} 1+3+6 \\ 1+4+5 \\ 2+2+6 \\ 2+3+5 \\ 2+4+4 \\ 3+3+4 \end{cases}$$

On considère cependant que le véritable point de départ de la théorie des probabilités est la correspondance entre **Blaise Pascal** (voir note 1 page 15) et **Pierre de Fermat**[2]au XVIIème siècle. Elle se développe ensuite progressivement autour des travaux de **Christian Huyghens**[3], **Pierre-Siméon de Laplace**[4], etc...

Mais ce n'est qu'au début du XXème siècle que la théorie des probabilités prend sa forme moderne grâce au livre *Fondements de la théorie des probabilités* d'**Andreï Kolmogorov**[5].

Ce chapitre a pour but d'introduire le vocabulaire de base de l'axiomatique de Kolmogorov et de l'utiliser pour la modélisation et la résolution de problèmes simples issus d'***expériences aléatoires*** qui n'ont qu'un nombre ***fini d'issues possibles***. Les notions et résultats du chapitre 17 doivent être ***révisés et maîtrisés***.

---

1. **Galilée**(1564 ;1662), italien, est considéré comme le fondateur de la physique moderne. Il invente la lunette astronomique et, en étudiant le mouvement des planètes du système solaire, en vient à soutenir la thèse de Copernic que la Terre tourne autour du Soleil. Il découvre le ***principe de Galilée*** et à ce titre est l'un des précurseurs qui permettront à **Newton** (voir note 2 page 16) de jeter les bases de la mécanique des solides et des lois de la gravitation. Il a aussi contribué au progrès des mathématiques, notamment en géométrie.
2. **Pierre de Fermat**(∼1600 ;1665), mathématicien et physicien français ayant notamment contribuer avec Pascal à la fondation du calcul des probabilités. Il s'intéressa aussi à l'optique et surtout à l'arithmétique, domaine dans lequel il excellait.
3. **Christian Huyghens**(1629 ;1695), mathématicien et physicien néerlandais. Il découvre notamment le principe de conservation de l'énergie cinétique, la nature ondulatoire de la lumière et publie en mathématiques le premier traité consacré à la théorie des probabilités.
4. **Pierre-Siméon de Laplace**(1749 ;1827), mathématicien et physicien français. On lui doit notamment un traité *Essai philosophique sur les probabilités* qui fera référence pendant un siècle, des travaux sur les polynômes et les équations polynomiales, et plusieurs contributions majeures pour la résolution d'équations différentielles
5. **Andreï Kolmogorov**(1903 ;1987), mathématicien russe dont l'œuvre est considérable. En dehors des probabilités dont il développe l'axiomatisation moderne, il apporte notamment des contributions majeures à l'étude des ***systèmes dynamiques***, c'est-à-dire - en simplifiant un peu - à l'étude des suites récurrentes de nombres complexes.

Enfin, concernant les notions d'expérience aléatoire et de probabilité que nous étudierons et manipulerons tout au long du chapitre, elles seront essentiellement fondées sur notre seule intuition. Précisons simplement que :

- il revient au même de dire que « ***j'ai* 1 *chance sur* 19 068 840 *de gagner au loto*** » ou de dire « ***ma probabilité de gagner au loto est de*** $\dfrac{1}{19\ 068\ 840}$ » ;
- par conséquent, la probabilité d'un événement est un nombre (réel) compris entre 0 et 1, et dans le cas fini le calcul d'une probabilité revient souvent à dénombrer deux ensembles ;
- si la probabilité d'un événement est ***très proche de*** 0, cet événement a une ***très faible chance de se produire*** lors d'une unique expérience aléatoire ;
- si la probabilité d'un événement est ***très proche de*** 1, cet événement a une ***très forte chance de se produire*** lors d'une unique expérience aléatoire.

I. Univers et événements

I.1. Univers

Définition 19.1 (Univers)

Étant donnée une expérience aléatoire on appelle :

- ***issues*** ou ***réalisations*** les ***résultats possibles*** de cette expérience aléatoire ;
- ***univers*** ou ***univers des possibles*** l'ensemble des tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire.

Notation

Généralement, on note Ω l'univers.

Ex. 19.1 (Cor.)

1) On lance une pièce de monnaie et on observe sur quelle face elle tombe.
   Quel est l'univers associé à cette expérience aléatoire ?
2) Même question lorsqu'on lance un dé à 6 faces.
3) Même question lorsqu'on lance simultanément deux dés à 6 faces.

Remarque

On se limitera dans ce chapitre au cas où Ω est un ensemble fini conformément au programme. On peut cependant facilement imaginer des expériences aléatoires pour lesquelles l'univers est infini. Par exemple, dans une chaine de production d'écrous, on tire aléatoirement un écrou pour vérifier si son diamètre et son pas de vis sont bien conformes aux spécifications imposées. L'univers est ici l'ensemble des diamètres possibles pour l'écrou, et il s'agit à priori d'une partie infinie de $\mathbb{R}_+^*$.

Dans tout ce qui suit, on se donne une expérience aléatoire avec un univers Ω fini.

I.2. Événement

Définition 19.2 (Événement)

On appelle ***événement*** toute partie de Ω.
On appelle ***événement élémentaire*** ou ***singleton*** tout événement ***avec un unique élément***.
Lorsqu'on effectue l'expérience aléatoire, on dit qu'un événement A ***se produit*** si l'issue de l'expérience aléatoire ***appartient à*** A.

Remarque

Un événement est par définition une partie de Ω donc un ***élément*** de ......

Ex. 19.2 (Cor.) On lance un dé à 6 faces. Expliciter les événements suivants et dire s'ils sont élémentaires ou non :

1) A :« le résultat du lancer est pair ».
2) B :« le résultat du lancer est inférieur ou égal à 2 ».
3) $C = A \cap B$.

Définition 19.3 (Événement contraire)

Étant donné un événement A, on appelle ***événement contraire de*** A le complémentaire de A dans Ω.
Autrement dit, l'événement contraire de A est ***celui qui se produit si et seulement si*** A ***ne se produit pas***.

Notation

On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

Ex. 19.3 Quels sont les événements contraires des événements A, B et C de l'exercice précédent ?

Cor. 19.3

I.3. Conjonction, disjonction d'événements

Définition 19.4 (Conjonction d'événements)

Étant donnés deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle ***événement*** A **et** B ou encore ***conjonction des événements*** A, B l'événement $A \cap B$.
Autrement dit, l'événement A **et** B est ***celui qui se produit si et seulement si*** A ***et*** B ***se produisent*** (en même temps).

Définition 19.5 (Disjonction d'événements)

Étant donnés deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle ***événement*** A **ou** B ou encore ***disjonction des événements*** A, B l'événement $A \cup B$.
Autrement dit, l'événement A **ou** B est ***celui qui se produit si et seulement si l'un ou l'autre des deux événements*** A, B ***se produit***.

Ex. 19.4 Que vaut l'événement A **et** B de l'exercice 19.2 ?

Cor. 19.4

I.4. Événement impossible, événements incompatible

Définition 19.6 (Événement impossible)

On dit qu'un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est ***impossible*** si $A = \emptyset$.

Définition 19.7 (Événements incompatibles)

On dit que deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont ***incompatibles*** si A **et** B est impossible.
Autrement dit, deux événements A, B sont incompatibles si ....

Ex. 19.5 On lance deux dés à 6 faces et on note Ω l'ensemble des issues possibles. Expliciter les événements suivants (pour les quatre premiers, on les donnera en extension) :

1) A : « la somme des deux dés est paire ».
2) B : « chacun des dés est pair ».
3) C : « chacun des dés est impair ».
4) $D = \overline{A}$: ....
5) $E = A \cap B$.
6) $F = D \cap \overline{C}$.
7) $G = \overline{B} \cap \overline{C}$.
8) $H = G \cap A$.

Cor. 19.5

I.5. Système complet d'événements

Définition 19.8

On dit qu'une famille $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ de $n \in \mathbb{N}^*$ événements forme un ***système complet d'événements*** si c'est une ***partition*** de Ω.
Autrement dit, une famille $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'événements si $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

- et si les événements de la famille sont ***deux à deux*** incompatibles.

Ex. 19.6 Montrer que la famille (B, C, G) de l'exercice 19.5 forme un système complet d'événements.

Cor. 19.6

II. Espaces probabilisés

II.1. Probabilité

Définition 19.9 (Probabilité)

On appelle ***probabilité sur un univers*** Ω toute ***application*** $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ vérifiant les propriétés :

1) $P(\Omega) = 1$;
2) pour tout couple $(A;B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ d'événements ***incompatibles***,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Autrement dit, la seconde propriété s'écrit

$$\forall (A;B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Définition 19.10 (Espace probabilisé)

On appelle ***espace probabilisé*** (Ω, P) la donnée d'un univers et d'une probabilité définie sur cet univers.

Définition 19.11 (Probabilité d'un événement)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On appelle ***probabilité d'un événement*** $A \subset \Omega$ le réel $P(A) \in [0;1]$.

Propriété 19.12

Soient (Ω, P) un espace probabilisé, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille d'événements ***deux à deux incompatibles*** de $\mathcal{P}(\Omega)$. Alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} P(A_i).$$

Démonstration

Propriété 19.13

Étant donné un univers ***fini*** $\Omega = \{\omega_1; ...; \omega_n\}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de donner les images de $n-1$ événements élémentaires de Ω pour définir une probabilité sur Ω.

Démonstration

Ex. 19.7 On jette un dé truqué tel que $\forall i \in [\![1;5]\!]$, $P\big(\{i\}\big) = \dfrac{1}{7}$.

1) Calculer $P\big(\{6\}\big)$.
2) Calculer $P\big($« l'issue est paire »$\big)$.

Cor. 19.7

II.2. Hypothèse d'équiprobabilité

Définition 19.14

Soit Ω un univers fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que l'on fait ***l'hypothèse d'équiprobabilité*** lorsqu'on munit Ω de la probabilité P telle que pour tout événement élémentaire $\{\omega\}$, $P\left(\{\omega\}\right) = \dfrac{1}{n}$.
La probabilité P est alors bien définie puisque les probabilités des événements élémentaires sont données et que $P(\Omega) = n \times \dfrac{1}{n} = 1$.
La probabilité P ainsi définie est appelée ***probabilité uniforme*** sur Ω et (Ω, P) ***espace probabilisé uniforme***.

Ex. 19.8 On jette simultanément deux dés non truqués (c'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse d'équiprobabilité).
Pour chaque entier $i \in [\![2;12]\!]$, calculer la probabilité que la somme des deux dés soit égale à i.

Cor. 19.8

Propriété 19.15

Soit A un événement. ***Sous l'hypothèse d'équiprobabilité***, on a

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total de cas possibles}}$$

Démonstration

II.3. Propriétés d'une probabilité

Lemme 19.16

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Quels que soient les événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \backslash B$ et $A \cap B$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est A et

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Démonstration

Propriété 19.17 (Probabilité de A ou B)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration

Remarque

La démonstration précédente fait apparaître comme résultat intermédiaire que pour toutes parties A, B de Ω, $P(A \cup B) = P(A) + P(B \backslash A)$.
Bien que ce résultat ne soit pas explicitement au programme, il est souvent utile.

Propriété 19.18 (Probabilité de l'événement contraire)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

Démonstration

Propriété 19.19 (Croissance d'une probabilité)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors quel que soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P\left(A \cup B\right) \geqslant P(A)$$

Démonstration

Ex. 19.9 ***Problème du prince de Toscane***
On jette simultanément trois dés non truqués.
Calculer la probabilité que la somme des trois dés soit égale à 9 puis la probabilité que la somme des trois dés soit égale à 10.
Comparer les probabilités.
Indications : on pourra se référer au début de chapitre pour les décompositions de 9 et 10 en somme de trois dés et utiliser au besoin les résultats de l'exercice 19.8.

Cor. 19.9

III. Probabilités conditionnelles

Dans tout ce qui suit, (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

III.1. Définition

Définition 19.20 (Probabilité de A sachant B)

Soit A, B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(B) > 0$.
On appelle ***probabilité conditionnelle de*** A ***sachant*** B ou plus simplement ***probabilité de*** A ***sachant*** B le quotient

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \in [0; 1]$$

Notation

On note $P(A|B)$ ou $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

Remarques

- ***L'hypothèse*** $P(B) > 0$ est absolument nécessaire sans quoi le quotient $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ n'est pas défini.
- Une probabilité étant croissante et $A \cap B$ étant inclus dans B, on a bien comme l'affirme la définition $P_B(A) \leqslant 1$. Il est par ailleurs évident que ce quotient de deux nombres positifs est positif.

Remarques

- Une probabilité conditionnelle s'interprète comme suit : si l'on sait que l'événement B s'est produit, l'univers est réduit à cet événement, notamment $P_B(B) = 1$. Par ailleurs, les issues de A n'appartenant pas à B sont impossibles, donc l'événement A est réduit à $A \cap B$.
  Pour calculer la probabilité d'un événement A sachant que B s'est produit il faut donc :
  - ⋆ se restreindre à l'événement $A \cap B$, les autres issues de A étant impossibles ;
  - ⋆ ramener la probabilité de l'événement ainsi obtenu à la probabilité d'obtenir B, c'est-à-dire effectuer le quotient $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, l'interprétation est encore plus simple : le nombre d'issues favorables est $\mathrm{Card}(A \cap B)$, le nombre total de cas possibles est $\mathrm{Card}\, B$ donc

$$P_B(A) = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}\, B} = \frac{\frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{n}}{\frac{\mathrm{Card}(B)}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ex. 19.10 On jette deux dés non truqués.
Pour chaque entier $i \in [\![6;8]\!]$, calculer la probabilité que la somme des deux dés soit égale à i sachant que l'un des deux dés au moins a donné un résultat pair.

Cor. 19.10

Propriété 19.21

Étant donné un événement B de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) > 0$, l'application $P_B : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ est une probabilité sur Ω.

Démonstration

Remarque

P_B étant une probabilité sur Ω, elle possède notamment toutes les propriétés de la section II.3.

III.2. Formule des probabilités totales

Théorème 19.22 (Formule des probabilités totales)

Étant donné un système complet d'événements $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ tel que pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $P(A_i) > 0$, on a pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$

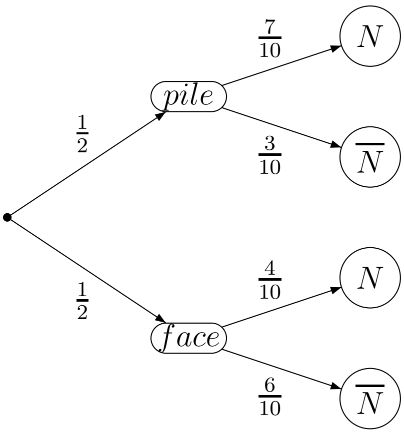
$$P(B) = \sum_{i=1}^{p} P(A_i)P(B|A_i)$$

Démonstration

Méthode

La formule des probabilités totales est utile lorsque plusieurs expériences aléatoires successives sont effectuées.
Imaginons la situation suivante : deux sacs numérotés contiennent pour le premier 7 boules noires et 3 boules rouges, pour le second 4 boules noires et 6 boules rouges. On tire à pile ou face, si la pièce tombe sur Pile, on tire une boule dans le premier sac, sinon on tire une boule dans le second sac.
Le schéma ci-contre représente l'enchaînement de ces deux expériences aléatoires.
On cherche à calculer la probabilité de tirer une boule noire et on note N l'événement correspondant. La formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} P(N) &= P(pile)P(N|pile) + P(face)P(N|face) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$



Ex. 19.11 Dans un lycée comptant 51% de filles, 12% des filles et 15% des garçons sont en classes préparatoires.
Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard soit en classes préparatoires ?

Cor. 19.11

Ex. 19.12 On place dans un sac 3 boules noires et 7 boules rouges. On effectue trois tirages aléatoires successifs d'une boule dans le sac.

1) Calculer la probabilité de tirer trois boules noires en supposant que l'***on remet la boule tirée dans le sac*** après chacun des tirages (***tirage avec remise***).
2) Même question en supposant que l'***on ne remet pas la boule tirée dans le sac*** après chacun des tirages (***tirage sans remise***).

Cor. 19.12

III.3. Formule des probabilités composées

Théorème 19.23 (Formule des probabilités composées)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille d'événements telle que $\forall i \in [\![1; n-1]\!]\,, P\left(\bigcap_{k=1}^{i} A_k\right) > 0$.

On a alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration

Remarque

Pour que la formule soit valide, on pose que l'intersection d'une famille vide est Ω. Ceci est cohérent avec les conventions identiques prises pour la somme d'une famille vide ou le produit d'une famille vide.

En effet, dans tous les cas, la convention est de choisir comme résultat d'une opération appliquée à une famille vide .... de l'opération concernée :

$$\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0 \qquad \prod_{i\in\emptyset} a_i = 1 \qquad \bigcap_{i\in\emptyset} A_i = \Omega \qquad \bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \ldots.$$

Notamment on rappelle que $0! = 1$.

Méthode

La formule des probabilités composées permet une généralisation de la formule obtenue dans l'exercice 19.12 pour les tirages sans remise dans le cas où l'on effectue un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque d'expériences aléatoires successives.

Ex. 19.13 Dans un sac, on place $n \in \mathbb{N}^*$ boules noires et une boule blanche. On effectue n tirages sans remise. Quelle est la probabilité qu'une boule noire reste dans le sac à la fin des tirages ?

Cor. 19.13

IV. Formules de Bayes

IV.1. Formule de Bayes simple

Théorème 19.24 (1re formule de Bayes)

Pour tous événements A, B de probabilité non nulle,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Démonstration

Méthode

Lorsqu'une probabilité conditionnelle $P(A|B)$ doit être calculée, ***avant tout calcul***, se demander si $P(B|A)$ n'est pas déjà connue. Dans ce cas, la formule de Bayes simple devrait conduire rapidement au résultat.

Ex. 19.14 Avec les mêmes hypothèses que dans l'exercice 19.11, calculer la probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille sachant qu'il est en classes préparatoires.

Cor. 19.14

IV.2. Formule de Bayes généralisée

Théorème 19.25 (Seconde formule de Bayes)

Si $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$, est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle alors

$$\forall i \in [\![1;n]\!], P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Démonstration

Ex. 19.15 Un nouveau test de dépistage d'une maladie rare est trouvé par une équipe médicale.
Pour un individu malade, le test donne un résultat positif avec une probabilité a.
Pour un individu sain il donne un résultat positif avec une probabilité b.
On estime à 1% la probabilité qu'un individu soit atteint par cette maladie.
On dit que le test est ***acceptable*** si 99% des individus testés positifs sont effectivement malades.
Donner une condition sur a, b pour que le test soit acceptable.

Cor. 19.15

V. Événements indépendants

V.1. Définition

Définition 19.26 (Couple d'événements indépendants)

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P) et deux événements A et B, on dit qu'ils sont ***indépendants*** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarques

- Si $P(B) > 0$, les événements A et B sont indépendants si et seulement si
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$
Autrement dit, pour un événement B possible, l'indépendance des événements A et B signifie ***que la connaissance de B ne renseigne en rien sur la probabilité de A***.
- Si $P(B) = 0$, quel que soit l'événement A, les événements A et B sont indépendants.

V.2. Famille finie d'événements mutuellement indépendants

Définition 19.27 (Indépendance mutuelle)

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P) et une famille finie $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ d'événements, on dit que la famille est composée d'***événements mutuellement indépendants*** lorsque

$$\forall J \subset [\![1;n]\!], P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

Définition 19.28 (Indépendance deux à deux)

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P) et une famille finie $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ d'événements, on dit que la famille est composée d'***événements indépendants deux à deux*** lorsque

$$\forall i, j \subset [\![1;n]\!], i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Ex. 19.16 Donner un exemple d'espace probabilisé et trois événements A, B, C tels que les événements A, B, C sont indépendants deux à deux mais non mutuellement indépendants.

Cor. 19.16

Propriété 19.29

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P), si A et B sont deux événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.
Ceci se généralise à une famille finie d'événements mutuellement indépendants.

Démonstration

Correction des exercices

Cor. 19.1 :

1) $\Omega = \{Pile; Face\}$.

2) $\Omega = [\![1;6]\!] = \{1;2;3;4;5;6\}$.

3) $\Omega = [\![1;6]\!] \times [\![1;6]\!]$ c'est-à-dire

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6); \\ (2;1);(2;2);(2;3);(2;4);(2;5);(2;6); \\ \ldots \\ (6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6) \end{array} \right\}$$

Cor. 19.2 :

1) $A = \{2;4;6\}$ n'est pas un événement élémentaire.

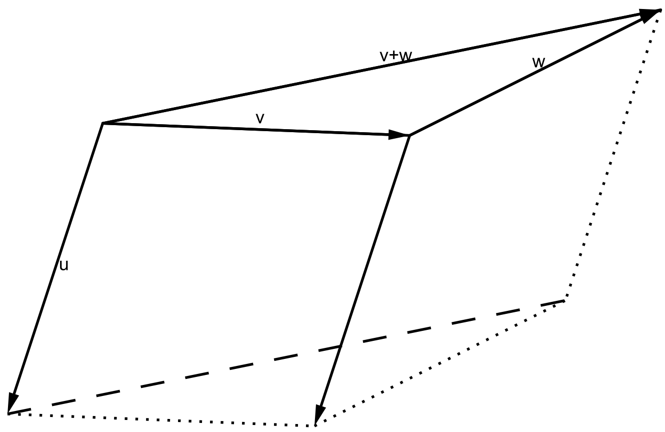
2) $B = \{1;2\}$ n'est pas un événement élémentaire.

3) $C = \{2\}$ est un événement élémentaire.

Déterminant

Ex. 20.1 Soit $ABCD$ un parallélogramme d'aire $\mathcal{A}_1$ et $BCEF$ un parallélogramme d'aire $\mathcal{A}_2$. Quelles sont les valeurs possibles de l'aire du parallélogramme $AFED$?

La notion de déterminant est une généralisation des notions d'aire et de volume. Comme dans les précédents chapitres d'algèbre, nous allons le définir ***par ses propriétés opératoires***. Il est cependant important de comprendre que ces propriétés résultent de l'origine géométrique de cette notion. Pour comprendre cela, intéressons-nous à la notion d'aire.
Considérons le plan $E = \mathbb{R}^2$ et u, v deux vecteurs de E. Notons $\mathcal{A}(u, v)$ l'aire ***algébrique*** (c'est-à-dire que cette aire peut-être positive ou négative) du parallélogramme formé par les vecteurs u et v.



- ***L'aire est bilinéaire***
  $\mathcal{A}(u, v + w) = \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(u, w)$: ....
  ....
  ....
  $\mathcal{A}(u, \lambda v) = \lambda\mathcal{A}(u, v)$: ....
- ***L'aire d'un parallélogramme aplati est nulle*** : $\mathcal{A}(u, u) =$.
- ***Ceci a pour conséquence que l'aire est antisymétrique*** :
  $\mathcal{A}(u + v, u + v) =$ .. d'une part et
  $\mathcal{A}(u + v, u + v) =$ .... d'autre part,
  d'où l'on déduit que
  ....

Le but de ce chapitre est de montrer que cette notion, si on l'envisage comme nous venons de le faire au travers de ses propriétés opératoires, se généralise non seulement aux calculs de

volumes de l'espace $\mathbb{R}^3$ mais aussi aux ***espaces de dimensions supérieures*** : c'est la notion de déterminant d'une matrice carrée.
Nous verrons ensuite les propriétés opératoires de cette notion, conduisant notamment à un certain nombre de méthodes de calcul pour le déterminant d'une matrice carrée. Enfin, nous verrons que cette notion se généralise davantage encore en définissant le déterminant des endomorphismes en dimension finie.
Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

I.1. Théorème-définition

Théorème 20.1

Il existe une ***unique*** application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- f est linéaire par rapport à ***chaque colonne de sa variable*** :
$f\left(C_1|..|\lambda C_i + \mu C_i'|...|C_n\right) = \lambda f\left(C_1|..|C_i|...|C_n\right) + \mu f\left(C_1|..|C_i'|...|C_n\right)$
- f est antisymétrique (ou encore alterné) par rapport aux ***colonnes de sa variable*** :
$f\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right) = -f\left(C_1|..|C_j|...|C_i|...|C_n\right)$
- $f(I_n) = 1$

Démonstration hors programme

Notation

Cette application est notée det.

Remarque

La dernière condition revient en fait à se donner ....
....

I.2. Propriétés

Propriété 20.2

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Démonstration

Corollaire 20.3

Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle est nul.

Démonstration

Propriété 20.4

Quels que soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Démonstration

Propriété 20.5

Ajouter à une colonne d'une matrice ***une combinaison linéaire des autres colonnes*** ne change pas la valeur de son déterminant.

Démonstration

Ex. 20.2 Calculer les déterminants suivants :

$A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad C = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Cor. 20.2

Corollaire 20.6

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux.

Démonstration

Ex. 20.3

1) Vrai ou faux : soit A une matrice carré d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont on note $C_1, C_2, ..., C_n$ les colonnes. Alors

$$\det A = \det(C_1 - C_2 | C_2 - C_3 | ... | C_{n-1} - C_n | C_n - C_1)$$

2) Calculer $\det\begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$.

3) Calculer $\det\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

Cor. 20.3

I.3. Matrices inversibles : résumé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$;
3) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$;
4) l'application linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A est bijective ;
5) A est une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{K}^n$;
6) $\forall W \in \mathbb{K}^n, AV = W$ admet une unique solution $V \in \mathbb{K}^n$;
7) $AV = 0_{\mathbb{K}^n}$ admet une unique solution $0_{\mathbb{K}^n} \in \mathbb{K}^n$;
8) $\mathrm{rg}(A) = n$;
9) $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$.

I.4. Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 20.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Démonstration

Ex. 20.4

1) Calculer $\det \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$.
2) Donner les valeurs de x pour lesquelles $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
3) Dans les cas où A_x n'est pas inversible, calculer $\mathrm{Ker}(A_x)$ et $\mathrm{rg}(A_x)$.

Cor. 20.4

I.5. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 20.8

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle ***déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$*** et on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ le déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$.
Autrement dit,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$$

Théorème 20.9 (Caractérisation des bases)

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Démonstration

I.6. Déterminant d'un produit de matrices

Propriété 20.10

Quelles que soient les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration

Corollaire 20.11

Quelle que soit la matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration

I.7. Déterminant de la transposée

Propriété 20.12

Quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det\left(A^{\mathrm{T}}\right) = \det(A)$$

Démonstration

Corollaire 20.13

Les théorèmes et propriétés du déterminant énoncées sur les colonnes de sa variable sont aussi valables pour les lignes de sa variable.

I.8. Développement suivant une ligne ou une colonne

Notation

Soit $n \geqslant 3$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice extraite de A en ôtant à A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.
Autrement dit, $A_{i,j} = (a_{k,l})_{\substack{(k,l)\in[\![1;n]\!]^2 \\ k\neq i, l\neq j}}$.

Propriété 20.14 (Développement suivant une ligne ou une colonne)

Quel que soit $i \in [\![1;n]\!]$ et quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

De même, quel que soit $j \in [\![1;n]\!]$ et quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

Démonstration hors programme

Ex. 20.5 Calculer le déterminant de la matrice $M_n(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$.

Cor. 20.5

Donnons à titre d'exemple l'application de cette formule au calcul des matrices d'ordre 3 :

Méthode : Techniques de calcul du déterminant

1) Développement par rapport à la première colonne :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2) Développement par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3) Développement par rapport à la troisième colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4) Développement par rapport aux lignes :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5) En pratique on mémorise le développement suivant une ligne ou une colonne en retenant le schéma

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \\ - & + & - & \ddots & \\ + & - & + & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & - \\ & & & - & + \end{vmatrix}$$

Méthode : Calcul pratique du déterminant

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n quelconque, les propriétés précédentes sont ***généralement*** utilisées selon l'une des deux méthodes suivantes :

1) on effectue des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes pour se ramener, à l'aide de la propriété précédente, au calcul du déterminant d'une matrice d'ordre inférieur (souvent $n-1$) et on fait une récurrence :

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \lambda \det(A_{n-1})$$

2) on effectue des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes pour se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire qui est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Une des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes que l'on rencontre souvent est d'effectuer la somme des lignes (ou des colonnes) dans l'une des lignes (respectivement colonne) de la matrice de départ :

$$\det\left(C_1|C_2|...|C_{n-1}|C_n\right) = \det\left(C_1|C_2|...|C_{n-1}|\sum_{j=1}^{n} C_j\right)$$

Ex. 20.6 Soit $A(X) = \begin{pmatrix} 1+X^2 & X & 0 & \cdots & 0 \\ X & 1+X^2 & X & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & X & 1+X^2 & X \\ 0 & \cdots & 0 & X & 1+X^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $D(X) = \det A(X)$ est un polynôme, donner son degré.
Calculer $D(X)$.

Cor. 20.6

II. Déterminant d'un endomorphisme

II.1. Définition

Théorème 20.15 (Indépendance vis-à-vis de la base choisie)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, ..., c_n)$ deux bases de E, f un endomorphisme de E.
Alors

$$\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\big)$$

Démonstration

Définition 20.16 (Déterminant d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel de dimension fini. On appelle ***déterminant d'un endomorphisme*** le déterminant de sa matrice ***dans une base quelconque de*** E (on choisit la même base au départ et à l'arrivée).

Notation

On note $\det f$ le déterminant de l'endomorphisme f.

II.2. Propriétés

Propriété 20.17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.
On a les propriétés suivantes :

- $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ est un automorphisme de E ;
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$;
- $\det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(f)}$;
- soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E :

$$\det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{F})\big) = \det(f)\det_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{F}\big)$$

Démonstration

Ex. 20.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\psi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & M^{\mathrm{T}} \end{array} \right.$.
Calculer $\det \psi$.

Cor. 20.7

Corrections

Maths - Chapitre 21

Variables aléatoires

Lors d'une expérience aléatoire, il est fréquent que l'on souhaite étudier une ***variable dont la valeur dépend de l'issue de l'expérience aléatoire***. De telles variables sont appelées ***variables aléatoires***. L'objet de ce chapitre est d'en décrire leurs principales utilisations et propriétés. Il va de soi que le chapitre 19 sur les probabilités est un pré-requis au présent chapitre, ainsi que le chapitre 17 sur le dénombrement.

Les variables aléatoires peuvent prendre des valeurs diverses, notamment des valeurs non numériques. Par exemple, on peut imaginer un dé ***bien équilibré*** à 6 faces dont une des faces est rouge, deux autres bleues et les trois dernières jaunes. ***L'hypothèse d'équiprobabilité*** (dé bien équilibré) s'écrit - en supposant qu'on a attribué un numéro à chaque face - sur l'univers $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ des résultats possibles pour chaque événement élémentaire :

$$\forall i \in [\![1;6]\!], \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$$

La notion de variable aléatoire permet alors de définir de façon simple et efficace ***les événements que l'on cherche à étudier***. Sur l'exemple précédent, on peut par exemple définir la variable aléatoire C donnant la couleur obtenue lors du jet de dé de la façon suivante :

> La variable aléatoire C est la ***fonction*** qui à chaque événement élémentaire associe la couleur de la face obtenue :
>
> $$C : \begin{cases} \Omega = [\![1;6]\!] & \to & \{rouge; bleu; jaune\} \\ \omega = 1 & \mapsto & rouge \\ \omega \in \{2;3\} & \mapsto & bleu \\ \omega \geqslant 4 & \mapsto & jaune \end{cases}$$

Une autre numérotation des faces du dé conduirait ***à une autre variable aléatoire modélisant la même expérience***.

Les ***événements sont***, on le rappelle, ***des parties de l'univers*** Ω. L'événement « la face est jaune » est par exemple la partie $E = \{4;5;6\} \subset \Omega$. Autrement dit, $E = C^{-1}(jaune)$: les événements correspondant à des valeurs données d'une variable aléatoire ***sont les images réciproques de ces valeurs par la variable aléatoire***.

Une première partie du chapitre consistera à définir de la façon la plus générale possible les notions que nous venons d'entrevoir. Nous y étudierons notamment certaines situations conduisant à des variables aléatoires dont les propriétés sont fréquemment observées.

Dans une seconde partie, nous étudierons le cas particulier de situations conduisant à la définition de deux variables aléatoires distinctes (ou plus).

Enfin, nous préciserons le cas particulier et cependant très important des ***variables aléatoires à valeurs réelles***, c'est-à-dire celles dont les valeurs sont des nombres réels.

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini. On rappelle qu'un événement E est ***une partie de*** Ω, c'est-à-dire $E \subset \Omega$ ou encore $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ et que $\mathbb{P}$ est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans

$[0;1]$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et, pour deux événements ***incompatibles*** A et B - c'est-à-dire tels que $A \cap B = \emptyset$ -, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

I. Variables aléatoires

I.1. Définitions

Définition 21.1

Soit U un ensemble. On appelle ***variable aléatoire à valeurs dans*** U toute application de Ω dans U.
Lorsque U est une partie de $\mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite ***réelle***.

Notation

Soit $X : \Omega \to U$ une variable aléatoire. Soit V une partie de U et u un élément de U.
On note $(X \in V)$ l'événement $X^{-1}(V)$ et $(X = u)$ l'événement $X^{-1}(\{u\})$.
Ici $X^{-1}(V)$ et $X^{-1}(\{u\})$ désignent ....
Lorsque X est une variable aléatoire réelle, on note $(X \leqslant u)$ l'événement $X^{-1}(\{x \in U, x \leqslant u\})$.

Exemple : dans l'exemple donné en introduction, $(C = rouge)$ désigne l'événement $\{1\}$.
$(C = jaune)$ désigne l'événement ....

Remarque

L'ensemble d'arrivée est rarement précisé. Généralement, on le notera simplement $X(\Omega)$.
Comme Ω est un ensemble fini, $X(\Omega)$ est aussi un ensemble fini dont le cardinal est ....
....
Notamment, on peut numéroter les éléments de $X(\Omega)$ de sorte à ce que $\Omega = \{\omega_i, i \in [\![1;n]\!]\}$, $X(\Omega) = \{x_k, k \in [\![1;p]\!]\}$ avec .....

I.2. Loi d'une variable aléatoire

Définition 21.2

Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathbb{P})$ dans $X(\Omega)$.
On appelle ***loi de la variable aléatoire*** X que l'on note généralement $\mathbb{P}_X$, l'application

$$\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{lcl} X(\Omega) & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \end{array} \right.$$

On a donc : $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{x\})\right) = \displaystyle\sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \mathbb{P}(\omega)$

Exemple : donner la loi de la variable aléatoire C définie en introduction.

Propriété 21.3

$\big(X(\Omega), \mathbb{P}_X\big)$ est un espace probabilisé. Notamment $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Démonstration

Remarque

IMPORTANT : plusieurs expériences aléatoires, pour lesquelles on définit plusieurs variables aléatoires, peuvent conduire ***aux mêmes espaces probabilisés*** $\big(X(\Omega), \mathbb{P}_X\big)$.
Par exemple, on jette une pièce de monnaie et on note X_1 la variable aléatoire qui vaut 0 si la pièce tombe sur *face* et 1 si elle tombe sur *pile*. Ou encore, on lance un dé et on note X_2 la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat est inférieur ou égal à 3 et qui vaut 1 si le résultat est supérieur ou égal à 4.
Dans les deux cas, sous l'hypothèse d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. Les deux expériences aléatoires et les deux variables aléatoires ont beau être différentes, ***les lois sont identiques***.
Pour cette raison, les lois des variables aléatoires seront souvent étudiées indépendamment de toute expérience aléatoire concrète.

Ex. 21.1 On lance un dé, bien équilibré, n fois d'affilée. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus lors de ces n lancers.

1) Préciser l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2) Le dé étant bien équilibré, on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité.
   Expliquer comment elle se traduit pour les événements élémentaires de Ω.
3) Préciser l'ensemble image $X(\Omega)$.
4) Donner la loi de X, c'est-à-dire, pour tout $x \in X(\Omega)$, la valeur de $\mathbb{P}(X = x)$.

Ex. 21.2 Soit n un entier strictement positif, soit S une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ telle que

- $S(\Omega) = [\![1; 2n]\!]$;
- $\forall s \in [\![1; 2n]\!], \mathbb{P}(S = s) = \dfrac{s}{n(2n+1)}$.

1) Pourquoi peut-on affirmer que la loi de S est bien définie ?
2) Calculer les probabilité suivantes :
   $\mathbb{P}(S \leqslant n)$ $\mathbb{P}(S > n)$ $\mathbb{P}(S \text{ est pair})$ $\mathbb{P}\left((S \leqslant n/2) \cup (S > 3n/2)\right)$
3) Pour chacune des probabilités de la question précédente, en donner un développement asymptotique en $\underset{n \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

I.3. Image d'une variable aléatoire par une fonction

Définition 21.4

Soit U, V deux ensembles, $X : \Omega \to U$ une variable aléatoire et $f : U \to V$ une fonction.
$Y = f \circ X : \Omega \to V$ est une variable aléatoire appelée ***image de la variable aléatoire*** X ***par la fonction*** f.
On note habituellement $f(X)$ cette variable aléatoire et $\mathbb{P}_{f(X)}$ la loi associée.

Remarque

$\mathbb{P}_{f(X)}(y) = \mathbb{P}\big(f(X) = y\big) = \mathbb{P}_X\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}_X(x)$ mais aussi
$\mathbb{P}_{f(X)}(y) = \mathbb{P}\big(f \circ X = y\big) = \mathbb{P}\big((f \circ X)^{-1}(\{y\})\big) = \displaystyle\sum_{\omega \in (f \circ X)^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(\omega)$.

Ex. 21.3 (Cor.) Soit n un entier strictement positif. Une urne contient n boules noires et n boules rouges.
On tire toutes les boules, une à une, sans remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués jusqu'à obtenir la dernière boule rouge et Y le nombre de boules noires restant dans l'urne lorsque la dernière boule rouge a été tirée.

1) Que vaut Ω ?
2) Que vaut $X(\Omega)$?
3) Donner la loi de X.
4) Donner Y en fonction de X et en déduire la loi de Y.

I.4. Exemples usuels

a) Loi uniforme

Définition 21.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X ***suit la loi uniforme sur*** $[\![1; n]\!]$ si

$$X(\Omega) = [\![1; n]\!] \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1; n]\!], \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1; n]\!]\big)$.

Remarque

Cette loi modélise les situations où ***on tire au hasard (avec équiprobabilité) un objet numéroté parmi*** n ***objets*** : la variable aléatoire donne ***le numéro de l'objet tiré***. Les exemples classiques sont la variable aléatoire donnant la face d'un dé (bien équilibré) lancé, ou donnant le numéro d'une boule tirée dans une urne, etc...

Ex. 21.4 On lance $k \in \mathbb{N}^*$ dés bien équilibrés, et on suppose que les résultats obtenus sur les dés sont mutuellement indépendants.
On note X_k la variable aléatoire donnant la somme des résultats obtenus sur chaque dé.

1) Quelle est la loi suivie par X_1 ?

2) Que vaut $X_k(\Omega)$?
3) Exprimer, pour $i \in [\![k+1;6k+6]\!]$, $\mathbb{P}(X_{k+1}=i)$ en fonction des $(\mathbb{P}(X_k=j))_{j\in X_k(\Omega)}$.
Indication : on pourra traiter séparément les cas $i \in [\![k+1;k+5]\!]$, $i \in [\![k+6;6k+1]\!]$ et $i \in [\![6k+2;6k+6]\!]$.
4) Donner la loi de X_2 et celle de X_3.

b) Loi de Bernoulli

Définition 21.6

Soit $p \in [0;1]$. On dit que X ***suit la loi de Bernoulli de paramètre*** p si

$$X(\Omega) = \{0;1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=1) = p, \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Remarque

Cette loi modélise les situations où ***la probabilité de réussir une expérience aléatoire vaut*** p : la variable aléatoire vaut 1 (VRAI) en cas de réussite, 0 (FAUX) en cas d'échec.

c) Loi binomiale

Définition 21.7

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0;1]$. On dit que X ***suit la loi binomiale de paramètres*** n ***et*** p si

$$X(\Omega) = [\![0;n]\!] \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Remarque

Cette loi modélise les situations où ***on effectue*** n ***fois une expérience aléatoire dont la probabilité de succès vaut*** p : la variable aléatoire donne ***le nombre de succès***. Un exemple classique est la variable aléatoire donnant le nombre de lettres A dans un mot formé de n lettres choisies dans $\{A;B\}$: dans ce cas, $p = \frac{1}{2}$ la plupart du temps. Cet exemple est par ailleurs souvent utilisé dans d'autres situations (marche aléatoire sur une droite, évolution du score de deux joueurs à un jeu de hasard, tirages avec remise dans une urne contenant deux types d'objets, etc...).

Ex. 21.5 On lance n fois d'affilée un dé bien équilibré.
Lorsque le dé tombe sur 1 ou sur 2, on considère ce lancer comme un ***échec*** - noté E.
Lorsque le dé tombe sur 6, on considère ce lancer comme un ***coup critique*** - noté C.
Sinon, on considère le lancer comme un ***lancer standard*** - noté S.
On note X la variable aléatoire comptant le nombre d'échecs, Y la variable aléatoire comptant le nombre de coups critiques et Z la variable aléatoire comptant le nombre de lancers standards.

1) Donner la loi de X.
2) Donner la loi de Y.
3) Donner, de deux manières différentes, la loi de Z : en l'interprétant comme une variable aléatoire suivant une loi binomiale, ou en remarquant que $Z = n - X - Y$.
4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0;n]\!], 3^{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}2^i$.

II. Variables aléatoires multiples, indépendance

II.1. Couple de variables aléatoires

Définition 21.8

Soient U, V deux ensembles, $X : \Omega \to U$ et $Y : \Omega \to V$ deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω.

On appelle ***couple de variables aléatoires*** $(X;Y)$ la variable aléatoire

$$(X;Y) : \begin{cases} \Omega & \to & U \times V \\ \omega & \mapsto & (X(\omega);Y(\omega)) \end{cases}$$

Par définition, un couple de variables aléatoires définies sur un même univers Ω est une variable aléatoire définie sur Ω elle aussi.

Définition 21.9 (Loi conjointe, lois marginales)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, $(X;Y)$ le couple de variables aléatoires qu'elles définissent.

On appelle ***loi conjointe de*** X ***et de*** Y la loi de $(X;Y)$.

On appelle ***lois marginale de*** $(X;Y)$ les lois de X et de Y.

Ex. 21.6 (Cor.)

1) on lance un dé bien équilibré.
   On note X la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat du lancer est pair, et qui vaut 1 si le résultat est impair.
   On note Y la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat du lancer est strictement inférieur à 4, et qui vaut 1 sinon.
   Remplir le tableau suivant donnant les lois de X, de Y et de $(X;Y)$.
   Où trouve-t-on la loi conjointe ? Où trouve-t-on les lois marginales ?

$Y = ...$ / $X = ...$	0	1	$\mathbb{P}(X = ...)$
0			
1			
$\mathbb{P}(Y = ...)$			

2) on lance successivement deux pièces de monnaie bien équilibrées.
   On note X la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat du premier lancer est "*pile*", et qui vaut 1 sinon.
   On note Y la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat du second lancer est "*pile*", et qui

vaut 1 sinon.
Remplir le tableau suivant donnant les lois de X, de Y et de $(X;Y)$.

$Y = ...$ / $X = ...$	0	1	$\mathbb{P}(X = ...)$
0			
1			
$\mathbb{P}(Y = ...)$			

Remarque

Comme le prouve l'exercice précédent, la donnée des lois marginales de $(X;Y)$ .... En effet, deux lois conjointes distinctes, peuvent se traduire par les mêmes lois marginales.

II.2. Loi conditionnelle

Définition 21.10

Soient $(X;Y)$ un couple de variables aléatoires définies sur Ω
et $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$.
On appelle ***loi conditionnelle de*** Y ***sachant que*** $(X = x)$ la probabilité

$$\forall i \in Y(\Omega), \mathbb{P}_{(X=x)}(Y = i) = \mathbb{P}(Y = i | X = x) = \frac{\mathbb{P}\big((X;Y) = (x;i)\big)}{\mathbb{P}(X = x)}$$

II.3. Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 21.11

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont ***indépendantes*** si

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}\big((X;Y) = (x;y)\big) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Propriété 21.12

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\forall A \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big), \forall B \in \mathcal{P}\big(Y(\Omega)\big), \mathbb{P}\big((X;Y) \in A \times B\big) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

Démonstration

Propriété 21.13

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et si f et g sont deux applications respectivement définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.

Démonstration

II.4. Indépendance mutuelle

Définition 21.14

Soit n un entier strictement positif et $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille (finie) de variables aléatoires sur un même univers Ω.
On dit que la famille $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est formée de ***variables aléatoires mutuellement indépendantes*** lorsque

$$\forall (x_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega), \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Remarque

On pourrait, comme pour la notion d'indépendance mutuelle d'événements (voir section V.2. du chapitre 19) définir aussi une notion d'***indépendance deux à deux*** pour une famille de variables aléatoires.
On montrerait alors, comme dans le cas des événements, que l'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

Ex. 21.7 (Cor.) Donner un exemple d'expérience aléatoire, où trois variables aléatoires X, Y, Z sont deux à deux indépendantes mais non mutuellement indépendantes.

Propriété 21.15

Si $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors

$$\forall (A_1, ..., A_n) \in \prod_{i=1}^{n}\mathcal{P}\left(X_i(\Omega)\right), \text{ les événements } (X_i \in A_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \text{ sont mutuellement indépendants.}$$

Démonstration

Propriété 21.16

Si $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$, alors

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

Démonstration

III. Espérance, variance, écart-type

III.1. Espérance

Définition 21.17

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
On appelle ***espérance de*** X et on note $\mathbb{E}(X)$ le nombre réel

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Remarque

L'espérance est une ***moyenne***, plus précisément la moyenne des valeurs prises par X, pondérée par sa probabilité d'apparition.
En cela, l'espérance donne la valeur moyenne prise par la variable aléatoire lorsqu'on effectue un grand nombre d'expérience aléatoire.

Ex. 21.8 Pour chacune des lois ci-dessous, définies dans les précédents exercices, calculer son espérance :

21.4 : $\forall i \in [\![1;6]\!], \mathbb{P}(X_1 = i) = \dfrac{1}{6}$.

21.4 : $\forall i \in [\![2;12]\!], \mathbb{P}(X_2 = i) = \dfrac{\min(i-1;13-i)}{36}$.

21.5 : $\forall k \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(Z = k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

21.1 : $\forall i \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(Y = i) = \binom{n}{i}\dfrac{5^{n-i}}{6^n}$.

21.3 : soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(Y = i) = \dfrac{\binom{2n-i-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.

21.6 : $\forall i \in [\![0;1]\!], \forall j \in [\![0;1]\!], \mathbb{P}((X;Y) = (i;j)) = \dfrac{3+(-1)^{i+j+1}}{12}$ en travaillant dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, .)$.

Propriété 21.18

Avec les mêmes hypothèses que dans la définition précédente,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$$

Démonstration

Ex. 21.9 Calculer à nouveau l'espérance, en utilisant la seconde expression de l'espérance : 21.4 : $\Omega = [\![1;6]\!]^2$, $X((i;j)) = i+j$, $\mathbb{P}((i;j)) = \dfrac{1}{36}$.

III.2. Exemples

Proposition 21.19

Si X est une variable aléatoire constante, égale à x, alors $\mathbb{E}(X) = x$.

Démonstration

Proposition 21.20

Soit $A \subset \Omega$ et $X = \mathbb{1}_A$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A)$$

Démonstration

III.3. Propriétés de l'espérance

Propriété 21.21 (Linéarité)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration

Propriété 21.22 (Croissance)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
On suppose de plus que $X \geqslant Y$, c'est-à-dire que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant Y(\omega)$.
Alors

$$\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration

Propriété 21.23 (Produit de variables aléatoires indépendantes)

Si X et Y sont ***deux variables aléatoires indépendantes*** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration

Remarque

La propriété précédente est fausse si les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.
Sa réciproque est fausse.

Ex. 21.10 Donner un exemple de couple de variables aléatoires $(X; Y)$ telles que $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Donner un exemple de couple de variables aléatoires ***non indépendantes*** $(U; V)$ telles que $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)$.

Ex. 21.11 Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit $a = \min(X(\Omega))$ et $b = \max(X(\Omega))$.
Justifier l'existence de a et b.
Montrer que $a \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant b$.

III.4. Théorème de transfert

Théorème 21.24

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, f une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Démonstration

III.5. Variance et écart-type

Définition 21.25

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
On appelle ***variance de*** X, et on note $\mathbf{V}(X)$, l'espérance du carré de la différence entre X et son espérance. Autrement dit :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$$

On appelle ***écart-type de*** X, et on note $\sigma(X)$ ou σ_X, la racine carrée de la variance de X :

$$\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$$

Propriété 21.26

Avec les hypothèses de la définition précédente :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$$

Démonstration

Propriété 21.27

Avec les hypothèses de la définition précédente, quels que soient les réels a et b :

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$$

Démonstration

Ex. 21.12 Pour chacune des lois ci-dessous, calculer sa variance :

21.4 : $\forall i \in [\![1;n]\!], \mathbb{P}(X_1 = i) = \dfrac{1}{n}$.

21.4 : $X_2 = A + B$ où A et B sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

21.5 et 21.1 : $\forall i \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(Y = i) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i(1-p)^{n-i}$.

21.3 : soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(Y = i) = \dfrac{\begin{pmatrix} 2n-i-1 \\ n-1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}$.

III.6. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Lemme 21.28 (Inégalité de Markov)

Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ ***à valeurs positives***.
Autrement dit $I = Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
Alors

$$\forall u > 0, \mathbb{P}(Y \geqslant u) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{u}$$

Démonstration

Théorème 21.29

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$.
Quel que soit le réel ***strictement positif*** α, on a

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \alpha\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

Démonstration

Remarque

Le théorème précédent précise le rôle de l'écart-type comme indicateur de la dispersion d'une variable aléatoire : la probabilité que la distance entre la valeur d'une variable aléatoire et son espérance soit supérieure à $\alpha > 0$ est majorée par le quotient $\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$. Plus α est grand, plus cette probabilité est faible.
Pour $\alpha = 2\sigma$ par exemple, elle est inférieure à $\frac{1}{4}$.

IV. Lois usuelles

IV.1. Variable aléatoire constante

Définition : ....
Utilisation : ....
Loi : ....
Espérance : ....
Variance : ....
Écart-type : ....

IV.2. Fonction indicatrice d'une partie de Ω, loi de Bernoulli

Définition : ....
Utilisation : ....
Loi : ....
Espérance : ....
Variance : ....
Écart-type : ....

IV.3. Loi uniforme

Définition : ....
Utilisation : ....
Loi : ....

Espérance : ....
Variance : ....
Écart-type : ....

IV.4. Loi binomiale

Définition : ....
Utilisation : ....
Loi : ....
Espérance : ....
Variance : ....
Écart-type : ....

V. Correction des exercices

Cor. 21.3 :

1) On peut voir l'univers des événements de plusieurs manières différentes :
   - on ne fait aucune distinction entre les boules rouges d'une part, et les boules noires d'autre part.
     Dans ce cas, un événement peut être représenté par un mot de $2n$ lettres, composé pour moitié de N, pour moitié de R.
     $\Omega_1 = \{$mots de $2n$ lettres, composés de n lettres N et n lettres $R\}$
   - on choisit au contraire de distinguer les boules rouges entre elles, et les boules noires entre elles - en imaginant par exemple qu'elles sont numérotées.
     Dans ce cas, un événement est une permutation du mot $N_1N_2...N_nR_1R_2...R_n$.
     $\Omega_2 = \mathfrak{S}_{2n}$
2) Quelle que soit la modélisation choisie pour Ω, $X(\Omega) = [\![n; 2n]\!]$.
3) On choisit la deuxième modélisation Ω_2 en faisant l'hypothèse d'équiprobabilité pour chaque tirage possible.
   La probabilité d'un tirage élémentaire e est alors $\mathbb{P}(e) = \dfrac{1}{(2n)!}$.
   La succession des boules rouges et noires ne change pas si l'on permute les boules rouges entre elles, ou les boules noires entre elles.
   La probabilité d'un mot M de Ω_1 est donc $\mathbb{P}(M) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.
   Enfin, pour tout entier $k \in [\![n; 2n]\!]$, l'événement $(X = k)$ regroupe tous les mots M de Ω_2 se terminant par 1 lettre R (une boule rouge) suivie de $n - k$ lettres N ($n - k$ boules noires).
   Choisir un tel mot M, c'est donc choisir la position des $n - 1$ lettres R parmi les $k - 1$ premières lettres du mot M.
   Donc $\mathbb{P}(X = k) = \begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{n \times (k-1)! \times n!}{(k-n)! \times (2n)!}$.
   Remarque : on peut notamment vérifier que $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \mathbb{P}(X = k)$ vaut bien 1.

En effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n}\binom{k-1}{n-1} &= \binom{n-1}{n-1}+\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{k-1}{n-1}\\
&= 1+\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{k}{n}-\binom{k-1}{n} \text{ d'après la formule de Pascal}\\
&= 1+\binom{2n}{n}-\binom{n}{n} \text{ par télescopage}\\
&= \binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ par définition des coefficients binomiaux}
\end{aligned}$$

4) Y est le nombre de boules noires restant dans l'urne lorsque la dernière boule rouge a été tirée.
Donc $X+Y=2n$, c'est-à-dire $Y=2n-X$.
Notamment $Y(\Omega)=[\![0;n]\!]$.
D'où, $\forall k\in[\![0;n]\!]\,,\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(X=2n-k)=\binom{2n-k-1}{n-1}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}=\dfrac{n\times(2n-k-1)!\times n!}{(n-k)!\times(2n)!}$.

Cor. 21.6 :

1)

$X=\ldots$ \ $Y=\ldots$	0	1	$\mathbb{P}(X=\ldots)$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(Y=\ldots)$	$\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{2}$	$\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{2}$	1

Les lois marginales, comme leur nom l'indique, se trouvent dans la ***marge*** droite et dans la ***marge*** du bas.
La loi conjointe se trouve dans la partie interne en haut à gauche du tableau.

2)

$X=\ldots$ \ $Y=\ldots$	0	1	$\mathbb{P}(X=\ldots)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(Y=\ldots)$	$\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{2}$	$\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{2}$	1

Ces deux exemples montrent que les deux lois marginales ne permettent pas d'obtenir la loi conjointe, puisqu'on observe ici que ***deux lois conjointes différentes peuvent conduire aux mêmes lois marginales***.

Cor. 21.7 : On lance deux pièces et on note
X la variable aléatoire qui vaut 1 si la première pièce donne *pile*, 0 sinon ;
Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la seconde pièce donne *pile*, 0 sinon ;
Z la variable aléatoire qui vaut 1 si les deux lancers sont identiques, 0 sinon.
On vérifie que les trois v.a. sont deux à deux indépendantes mais non mutuellement indépendantes.
Par exemple $\mathbb{P}\big((X;Y;Z)=(0;0;0)\big)=0\neq\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$.

Maths - Chapitre 22

Produit scalaire et espace euclidien

Tout comme la notion de vecteur, la notion de produit scalaire arrive tardivement en mathématiques, au tournant des XIX$^{\text{ème}}$ et XX$^{\text{ème}}$ siècles.
Cependant, nombre de théorèmes de ce chapitre ont une interprétation géométrique simple et étaient connus bien avant l'apparition du produit scalaire. En effet, comme pour les espaces vectoriels, il faut comprendre d'emblée que le principal changement par rapport à la géométrie traditionnelle concerne la nature des objets qui sont considérés comme fondamentaux :

- les notions de ***vecteurs et de scalaires***, ainsi que les ***opérations*** entre eux, sont les objets fondamentaux de la théorie des ***espaces vectoriels***. Sur ces notions sont construites celles qui étaient le soubassement de la géométrie traditionnelle : points, droites, plans, parallélisme.
- Les notions de ***produit scalaire et de norme*** sont les notions fondamentales de la théorie des ***espaces euclidiens***. Sur ces notions sont construites celles qui étaient le soubassement de la géométrie traditionnelle : ***distance, angle et orthogonalité***.

Le principal avantage que l'on tire de ce changement de point de vue est qu'il se généralise à des objets qui sortaient jusque-là du cadre de la géométrie traditionnelle. Comme nous l'avons vu, $(\mathcal{F}(I, \mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des suites à valeurs réelles ou complexes aussi, de même que l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. L'ensemble des polynômes, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, l'ensemble des n-uplet, etc... munis des opérations habituelles en sont d'autres exemples.
Comme nous allons le voir, si l'on parvient à définir sur ces espaces vectoriels des produits scalaires, les notions géométriques de distance, d'angle ou d'orthogonalité pourront elle-même y être définies et généralisées.
Dans tout ce qui suit, $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I. Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

I.1. Produit scalaire

Définition 22.1 (Produit scalaire)

On dit qu'une application $s : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire lorsqu'il vérifie les propriétés suivantes :

1) ***Symétrie*** : $\forall u, v \in E, s(u, v) = s(v, u)$.
2) ***Bilinéarité*** : $\forall u, v, w \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   - $s(\lambda u + \mu v, w) = \lambda s(u, w) + \mu s(v, w)$;
   - $s(w, \lambda u + \mu v) = \lambda s(w, u) + \mu s(w, v)$.

3) ***Définition*** : $\forall u \in E, s(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
4) ***Positivité*** : $\forall u \in E, s(u,u) \geqslant 0$.

En résumé, un produit scalaire sur E est donc une ***forme bilinéaire symétrique définie positive***.

Notation

Plusieurs notations sont utilisée pour un produit scalaire :

$$s(u,v) = (u|v) = \langle u, v\rangle = u \cdot v$$

La notation utilisée dans ce chapitre sera le plus souvent $(u|v)$.

Remarques

- Un produit scalaire étant ***symétrique***, il suffit, après avoir démontré cette symétrie, de vérifier qu'il est linéaire à droite ou à gauche pour démontrer qu'il est bilinéaire.
  En pratique, on vérifiera donc d'abord la symétrie avant de vérifier la linéarité (à droite ou à gauche) dans les exercices visant à exhiber un produit scalaire sur un espace vectoriel donné.
- Il arrive que l'on définisse plusieurs produits scalaires sur un même espace vectoriel.
  Cette possibilité ne sera que peu utilisée dans ce chapitre mais sera très utilisée en seconde année pour démontrer par exemple une propriété fondamentale des matrices symétriques réelles.

Ex. 22.1 Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (i;j)$ et $\mathcal{B}' = (i';j')$ deux bases de E.

1) Pour $(u,v) \in E^2$, on note $u = x_1 i + y_1 j$, $v = x_2 i + y_2 j$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ étant les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}$.
   Montrer que l'application qui à tout couple de vecteurs $(u,v) \in E^2$ associe $(u|v) = x_1x_2 + y_1y_2$ est un produit scalaire sur E.
2) Montrer qu'il en est de même de l'application $\langle u, v\rangle = x_1'x_2' + y_1'y_2'$, $x_1', y_1', x_2', y_2' \in \mathbb{R}$ étant les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}'$.
3) Que valent $(i|j)$ et $\langle i', j'\rangle$?
4) On donne $i' = 2i + j$ et $j' = i - 2j$.
   Calculer $(i'|i')$, $(i'|j')$ et $(j'|j')$ puis exprimer pour $u, v \in E$ $\langle u, v\rangle$ en fonction de $(u|v)$.

Cor. 22.1

I.2. Espaces préhibertiens réels et espaces euclidiens

Définition 22.2 (Espace préhilbertien réel)

On appelle ***espace préhilbertien réel*** tout $\mathbb{R}$-***espace vectoriel muni d'un produit scalaire***.

Définition 22.3 (Espace euclidien)

On appelle ***espace euclidien*** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel ***de dimension finie*** muni d'un produit scalaire.

I.3. Exemples de référence

a) Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Définition 22.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle ***produit scalaire canonique*** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ l'application qui à tout couple $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ associe

$$(u|v) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

Ex. 22.2 Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est bien un produit scalaire.

Cor. 22.2

b) Produits scalaires sur $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$

Ex. 22.3 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$) et h une fonction continue et strictement positive sur $[a;b]$. Montrer que l'application qui à deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$ associe

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)h(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

Cor. 22.3

Définition 22.5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
On appelle ***produit scalaire canonique*** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$ l'application qui à tout couple $(u, v) \in (\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R}))^2$ associe

$$(u|v) = \int_a^b u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Ex. 22.4 Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on donne les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 3X^2 - 1$ et $P_3 = 5X^3 - 3X$.

1) Calculer pour $i, j \in [\![0;3]\!]$, $(P_i|P_j) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_i(t)P_j(t)\mathrm{d}t$.

2) En déduire les coordonnées de $Q = X^3 + X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B} = (P_0; P_1; P_2; P_3)$.

Remarque : ces polynômes sont appelés ***polynômes de Legendre***.

Cor. 22.4

II. Norme associée à un produit scalaire

II.1. Définition

Définition 22.6 (Norme sur un espace préhilbertien réel)

On appelle ***norme associée à un produit scalaire*** $(\cdot|\cdot)$ sur un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien E l'application définie par

$$N : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & N(u) = \sqrt{(u|u)} \end{cases}$$

Notation

La norme d'un vecteur u est notée $\|u\|$.

Ex. 22.5 Soient u et v deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

1) Écrire $\|u \pm v\|^2$ en fonction de $\|u\|$, $\|v\|$ et $(u|v)$.
2) En déduire trois expressions de $(u|v)$ ne faisant intervenir que $\|u \pm v\|$, $\|u\|$ et $\|v\|$.

Cor. 22.5

Remarques

- La positivité du produit scalaire garantit l'existence de la norme.
- La définition du produit scalaire implique que $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

II.2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 22.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Quels que soient les vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien, on a

$$|(u|v)| \leqslant \|u\| \, \|v\|$$

De plus, il n'y a égalité que si les vecteurs u et v sont colinéaires.

Démonstration

Ex. 22.6 Écrire la définition de la norme et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les produits scalaires canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$.

Cor. 22.6

II.3. Propriétés de la norme

Propriété 22.8

Quels que soient les vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien, on a :

- ***Séparation*** : $\|u - v\| = 0 \Leftrightarrow u = v$;
- ***Homogénéité*** : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda|. \|u\|$;
- ***Inégalité triangulaire*** : $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Démonstration

Ex. 22.7 (Cor.)

1) Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$ et d'une norme associée notée $\|.\|$.
   Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs unitaires de E tels que

$$\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2 \text{ avec } i \neq j, \|x_i - x_j\| = 1$$

   Calculer pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ le produit scalaire $(x_i|x_j)$.
2) Soit $A = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{ij} = (x_i|x_j)$.
   Montrer que A est inversible et en déduire que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre.

II.4. Complément : angle géométrique entre deux vecteurs

Étant donnés deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien réel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que

$$-\|u\| \|v\| \leqslant (u|v) \leqslant \|u\| \|v\|$$

Si u et v sont deux vecteurs non nuls, on a donc

$$-1 \leqslant \frac{(u|v)}{\|u\| \|v\|} \leqslant 1$$

Ceci permet de donner une définition de l'***angle géométrique formé par deux vecteurs non nuls*** :

Définition 22.9 (Angle géométrique de deux vecteurs non nuls)

Étant donnés deux vecteurs non nuls u et v d'un espace préhilbertien réel, on appelle ***angle géométrique formé par les vecteurs*** u ***et*** v le nombre

$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{(u|v)}{\|u\| \|v\|}\right) \in [0; \pi]$$

Ceci parachève l'objectif que l'on se donnait en introduction du chapitre : nous avons construit toutes les notions élémentaires de la géométrie traditionnelle à l'aide des notions de vecteurs et de produit scalaire.
Ces dernières notions deviennent les notions fondamentales sur lesquelles peut être construite la géométrie traditionnelle.
L'avantage que l'on tire de ce changement de point de vue est double :

- d'une part, il exhibe les ***propriétés algébriques*** (c'est-à-dire opératoires) nécessaires à la construction d'une géométrie ;
- d'autre part, il permet en conséquence de généraliser les notions géométriques à des espaces qui jusque-là sortaient de ce cadre : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$, etc...

III. Orthogonalité en dimension quelconque

Dans cette section, $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.
Il s'agit donc d'un ....

III.1. Définitions

Définition 22.10 (Vecteurs orthogonaux)

On dit que deux vecteurs u, v de E sont ***orthogonaux*** si

$$(u|v) = 0$$

Définition 22.11 (Sous-espaces vectoriels orthogonaux)

Étant donnés deux sous-espaces vectoriels G et H de E, on dit qu'ils sont ***orthogonaux*** si ***tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre***.
Autrement dit, G et H sont orthogonaux si

$$\forall u \in G, \forall v \in H, (u|v) = 0$$

Définition 22.12 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)

Étant donné un sous-espace vectoriel G de E, on appelle ***orthogonal de*** G l'***ensemble des vecteurs de*** E ***qui sont orthogonaux à tout vecteur de*** G.
Autrement dit, l'orthogonal de G est l'ensemble

$$\{v \in E, \forall u \in G, (u|v) = 0\}$$

Notation

Si deux vecteurs u et v de E sont orthogonaux, on note $u \perp v$.
Si deux sous-espaces vectoriels G et H de E sont orthogonaux, on note $G \perp H$.
L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel G de E est noté $G^\perp = \{v \in E, \forall u \in G, (u|v) = 0\}$.

III.2. Propriété

Propriété 22.13 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)

Soit G un sous-espace vectoriel de E. $G^{\perp}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

III.3. Familles orthogonales, orthonormales

Définition 22.14 (Famille orthogonale)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une ***famille orthogonale*** ou une ***famille de vecteurs orthogonaux*** si

$$\forall i, j \in [\![1;n]\!], i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$$

Remarque

Si $n = 1$, c'est-à-dire si la famille est formée d'un unique vecteur, elle est considérée comme orthogonale.

Définition 22.15 (Famille orthonormale)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une ***famille orthonormale*** ou une ***famille orthonormée*** ou encore une ***famille de vecteurs orthonormés*** si elle est ***orthogonale*** et que ***tout vecteur est de norme égale à 1***.
Autrement dit, $\mathcal{F}$ est une ***famille orthonormale*** si

$$\forall i, j \in [\![1;n]\!], (u_i|u_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ex. 22.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, $f_k : x \in [-\pi;\pi] \mapsto \cos(kx)$. On note $\mathcal{F} = (f_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ la famille de l'espace préhilbertien réel $\mathcal{C}^0([-\pi;\pi];\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

1) La famille $\mathcal{F}$ est-elle orthogonale ?
2) La famille $\mathcal{F}$ est-elle orthonormale ?
   Si ce n'est pas le cas, construire à partir de $\mathcal{F}$ une famille orthonormale.

Cor. 22.8

III.4. Propriété d'une famille orthogonale

Propriété 22.16 (Liberté d'une famille orthogonale)

Toute famille orthogonale de vecteurs ***non nuls*** est libre.

Démonstration

III.5. Théorèmes de Pythagore

Théorème 22.17 (Théorème de Pythagore : $1^{\text{ère}}$ version)

Soient u et v deux vecteurs de E.
$u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Démonstration

Théorème 22.18 (Théorème de Pythagore : $2^{\text{ème}}$ version)

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille orthogonale de vecteurs de E.
$\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$.

Démonstration

Important ! Réciproque du théorème de Pythagore
La réciproque du théorème de Pythagore n'est valable que dans le cas de la somme de deux vecteurs. Dans le cas de trois vecteurs ou plus, on peut trouver des contre-exemples.

Ex. 22.9 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, on donne les trois vecteurs $u = (1;2)$, $v = (0;2)$ et $w = (0;-1)$.
Que valent $\|u+v+w\|^2$ et $\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$?
La famille (u, v, w) est-elle orthogonale ?
Donner un exemple d'une famille de quatre vecteurs qui vérifie l'identité de Pythagore mais qui n'est pas orthogonale.

Cor. 22.9

III.6. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 22.19

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille orthonormale de E.

Quel que soit le vecteur v de E, $v' = v - \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)\, u_i$ est orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$.

Démonstration

Méthode : Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Le théorème précédent permet de construire à partir d'une famille $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ libre de vecteurs non nuls de E une nouvelle famille $\mathcal{F}' = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ orthonormale.
L'algorithme qui en découle est appelé ***procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*** et se décompose comme suit :

- ***Initialisation*** : $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ est un vecteur unitaire et forme donc (à lui seul) une famille orthonormale.
- ***Propagation et hérédité*** : pour i allant de 2 à n, on suppose que la famille $\mathcal{F}'_{i-1} = (v_k)_{k\in[\![1;i-1]\!]}$ est orthonormale
  - ⋆ calculer $u'_i = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} (v_k|u_i)\, v_k$. D'après le théorème précédent u'_i est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}'_{i-1}$. De plus u'_i est non nul car $\mathcal{F}$ est libre (par l'absurde si l'on n'est pas convaincu).
  - ⋆ Le vecteur $v_i = \dfrac{u'_i}{\|u'_i\|}$ est donc unitaire et orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}'_{i-1}$. La famille $\mathcal{F}'_i = (v_k)_{k\in[\![1;i]\!]}$ est donc orthonormale.
- ***Conclusion*** : à l'arrêt de l'algorithme, la famille $\mathcal{F}' = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ obtenue est orthonormale.

Ex. 22.10 (Cor.)

1) On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ l'application $(P,Q) \mapsto (P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2) Même question pour $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
3) Trouver une base orthonormale de E dans les deux cas précédents.

IV. Orthogonalité en dimension finie

Dans cette section, $(F,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ***de dimension finie*** $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.
Il s'agit donc d'un ....

IV.1. Bases orthonormées

Définition 22.20 (Base orthonormée)

On appelle ***base orthonormée*** ou ***base orthonormale*** d'un espace euclidien F toute famille libre, génératrice et orthonormale de F.

Théorème 22.21 (Existence de bases orthonormées)

Tout espace euclidien F possède au moins une base orthonormée.

Démonstration

IV.2. Coordonnées en base orthonormée

Propriété 22.22 (Propriété fondamentale des espaces euclidiens)

Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de F (euclidien).
Alors, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ la coordonnée suivant u_i de tout vecteur v de F est

$$x_i = (u_i|v)$$

Démonstration

IV.3. Expressions du produit scalaire et de la norme

Propriété 22.23

Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de F (euclidien).

Alors quels que soient les vecteurs $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ et $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i u_i$ on a

- $(v|w) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$;
- $\|v\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Démonstration

IV.4. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 22.24

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
Quel que soit le vecteur $u \in E$, il existe un unique vecteur $v = p_F(u) \in F$ tel que $u - v \in F^{\perp}$.

Démonstration

Définition 22.25 (Projection orthogonale sur un espace euclidien)

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
On appelle ***projection orthogonale*** sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
Autrement dit, la projection orthogonale sur F est l'application p_F qui à tout vecteur u de E associe l'unique vecteur v de F tel que $u - v \in F^\perp$.

Corollaire 22.26

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
Tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$.

IV.5. Remarque importante

Les théorèmes de la sous-section précédente ne sont valables que pour un sous-espace vectoriel F de ***dimension finie***. L'exercice suivant donne un contre-exemple dans le cas où F est de dimension infinie.

Ex. 22.11

1) Montrer qu'une application continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, qui s'annule sur tout intervalle ouvert non vide $I \subset [0;1]$, est l'application nulle.
   Indication : pour une application $f \in \mathcal{F}(E,F)$, ***s'annuler*** et ***être nulle*** ont des significations (très) différentes...
2) Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique et $F = \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$.
   a) Montrer que $F^\perp = \{x \in [0;1] \mapsto 0\}$.
   b) En déduire que si $f \in E \backslash F$, il n'existe pas de fonction $g \in F$ telle que $f - g \in F^\perp$.
   c) Que vaut $\left(F^\perp\right)^\perp$?

IV.6. Propriétés

Propriété 22.27

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
La projection orthogonale p_F sur F est un projecteur, autrement dit $p_F \circ p_F = p_F$.

Démonstration

Propriété 22.28 (Inégalité de Bessel)

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le vecteur $u \in E$,

$$\|p_F(u)\| \leqslant \|u\|$$

Démonstration

Propriété 22.29

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le vecteur $u \in E$, $v = p_F(u)$ est l'unique vecteur de F vérifiant

$$\|u - v\| = \min_{w \in F} \|u - w\|$$

Démonstration

IV.7. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace euclidien

Théorème 22.30

Soient E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
Alors $F^\perp$ et F sont supplémentaires.

Démonstration

Théorème 22.31

Soient E un espace ***euclidien*** de dimension n et F un sous-espace vectoriel de dimension p de E. Alors $\dim F^\perp = n - p$ et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Démonstration

V. Correction des exercices

Cor. 22.7 :

1) Les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont unitaires donc $\forall i \in [\![1; n]\!], \|x_i\|^2 = (x_i|x_i) = 1$.
De plus, par hypothèse, $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\|x_i - x_j\| = 1$.
Donc $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\|x_i - x_j\|^2 = 1 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2(x_i|x_j)$.
Donc $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $(x_i|x_j) = \dfrac{1}{2}$.

2) Soit $A=(a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{ij}=(x_i|x_j)$.
$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ d'après la question précédente.

Donc $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{n+1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} & \frac{n+1}{2} \\ \vdots & & \ddots & 1 & \frac{n+1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{n+1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{n+1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$

Finalement $\det(A)=\dfrac{n+1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{n+1}{2^n}$.

Montrons maintenant que la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre.
Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0_E$.
En effectuant le produit scalaire par x_j pour tout $j\in[\![1;n]\!]$, on obtient le système :

$$A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

Or A est inversible. Donc $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$.
Donc la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre.

Cor. 22.10 :

1) On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ l'application $(P,Q)\mapsto(P|Q)=P(-1)Q(-1)+P(0)Q(0)+P(1)Q(1)$.
Symétrie : $(P|Q)=P(-1)Q(-1)+P(0)Q(0)+P(1)Q(1)=Q(-1)P(-1)+Q(0)P(0)+Q(1)P(1)=(Q|P)$.
Linéarité à gauche : $(aP_1+bP_2|Q)=aP_1(-1)Q(-1)+aP_1(0)Q(0)+aP_1(1)Q(1)+bP_2(-1)Q(-1)+bP_2(0)Q(0)+bP_2(1)Q(1)=a\,(P_1|Q)+b\,(P_2|Q)$.
Par symétrie, c'est bien une forme bilinéaire.
Positivité : $(P|P)=\displaystyle\sum_{i=-1}^{1}P(i)^2\geqslant 0$.
Définition : $(P|P)=0\Rightarrow P(-1)=P(1)=P(0)=0$.
Or P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui possède strictement plus de 2 racines : c'est donc le polynôme nul.

2) $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\mathrm{d}t$: il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}^0([-1;1],\mathbb{R})$.
Les fonctions polynomiales étant continues et $[-1;1]$ étant un ensemble infini, c'est bien un

produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ (l'égalité des polynômes et l'égalité des fonctions polynomiales associées sont en effet identiques).

3) On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt en partant de la base canonique.
$P_1 = 1$. $\|P_1\|_1^2 = 3$ donc $Q_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ est un vecteur normé pour le premier produit scalaire.
$P_2 = X$. $P_2 - (P_2|Q_1)\, Q_1 = X - 0 = X$ et $\|X\|_1^2 = 2$ donc $Q_2 = \dfrac{\sqrt{2}X}{2}$ forme avec Q_1 une famille orthonormée.
$P_3 = X^2$. $P_3 - (P_3|Q_1)\, Q_1 - (P_3|Q_2)\, Q_2 = X^2 - \dfrac{2}{3}$.
Enfin, $\left\|X^2 - \dfrac{2}{3}\right\|_1^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{3}$.
Donc $Q_3 = \dfrac{3\sqrt{6}X^2 - 2\sqrt{6}}{6}$ forme avec Q_1 et Q_2 une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
Pour le second produit scalaire, on retrouve les polynômes de Legendre vus à l'exercice 22.4.

Maths - Chapitre 23

Séries

La notion de série repose sur l'idée que pour obtenir une approximation d'un nombre (irrationnel par exemple), on peut partir d'une approximation déjà obtenue et lui ajouter un terme suffisamment petit pour obtenir une approximation plus fine. C'est une notion d'une importance fondamentale en mathématiques non seulement à cause de l'importance pratique de la notion d'approximation des nombres irrationnels, mais encore parce qu'elle est une synthèse des notions de suites, de sommes finies et -comme nous le verrons- fait aussi intervenir les notions d'intégrales ou de développements limités.
Dans tout ce qui suit, u, v et w sont des suites réelles ou complexes définies sur une partie $A \subset \mathbb{N}$ et f une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Introduction

I.1. Formules de Taylor

Théorème 23.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit n un entier positif et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Ex. 23.1 Écrire ce théorème pour $n = 0$ et $n = 1$

....

....

Théorème 23.2 (Formule de Taylor-Young)

Soit n un entier positif et $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o_{x_0}\left((x - x_0)^n\right)$$

Démonstration

Remarque

Toutes les formules précédentes peuvent se réécrire en utilisant $h = x - x_0$ à la place de x et le signe $\sum$ à la place des pointillés.
Par exemple, la formule de Taylor avec reste intégral pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ se réécrit :

$$f(x_0 + h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + t)\mathrm{d}t$$

Réécrire la formule de Taylor-Young de cette façon :

. . . .

I.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 23.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$.
Si $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$ (autrement dit $f^{(n+1)}$ est bornée sur I), alors

$$\left| f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) - \cdots - \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \right| \leqslant M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ou encore

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right| \leqslant M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration

Ex. 23.2 Écrire ce théorème pour $n = 0$

. . . .

. . . .

Quel nom porte ce théorème ? . . . .

Ex. 23.3 Montrer que $e = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Cor. 23.3

I.3. Définition

Définition 23.4 (Série numérique)

Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles ou complexes, on appelle ***série de terme général*** u_n la suite S définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La définition s'étend au cas où le terme général u_n n'est défini qu'à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
Les termes de la suite S sont appelés ***sommes partielles*** de la série.

Notation

On note $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

Définition 23.5 (Convergence/divergence d'une série)

On dit que la série $\sum u_n$ ***converge*** si la suite S de ses sommes partielles converge.
Dans le cas contraire, on dit que la série ***diverge***.

Notation

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite S.

Définition 23.6 (Somme et restes d'une série convergente)

Lorsqu'une série $\sum u_n$ converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est appelée ***somme de la série***.

La suite R définie par $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelée suite des ***restes de la série***.

Ex. 23.4 $\sum \frac{x^n}{n!}$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$?

Cor. 23.4

I.4. Propriétés

Propriété 23.7 (Linéarité de la somme)

Si les séries de termes généraux u_n et v_n convergent toutes les deux, alors $\forall(\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2$ la série $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration

Propriété 23.8

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite u converge vers 0.

Démonstration

Méthode : Divergence grossière d'une série

La propriété précédente est utilisée pour montrer qu'une série ***diverge*** en passant par sa contraposée : si la suite u ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.
On dit dans ce cas que la série ***diverge grossièrement***.

Important !

La réciproque de cette propriété est fausse !

Ex. 23.5 Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(n\frac{2\pi}{7}\right)$.

Cor. 23.5

Ex. 23.6 Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Cor. 23.6

I.5. Série géométrique

Définition 23.9 (Série géométrique)

On appelle ***série géométrique*** toute série dont le terme général est une suite géométrique.

Propriété 23.10 (Rappel)

Si u est une suite géométrique de raison r différente de 1 alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Si u est une suite géométrique de raison 1 alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0$.

Théorème 23.11 (Convergence d'une série géométrique)

Une série géométrique converge si et seulement si son terme général est nul ou de raison r vérifiant $|r| < 1$.

De plus, si elle est convergente, alors sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1-r}$$

Démonstration

Méthode

Les séries géométriques ***sont d'une importance primordiale*** !

En voici deux utilisations très fréquentes :

- lorsqu'une série est de la forme $\sum f(n)r^n$, il peut être fructueux de considérer la fonction $S_n : x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \sum f(n)x^n$ et de tenter d'exprimer S_n à l'aide de la série géométrique $\sum x^n$ puis d'évaluer S_n pour $x = r$;
- nous verrons une autre utilisation de la comparaison à des séries géométriques -notamment de la majoration d'une série à termes positifs par une série géométrique- au paragraphe II..

Ex. 23.7 Nature (et somme si convergence) de la série $\sum \frac{n}{2^n}$.

Même question pour la série $\sum \frac{n\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{2^n}$.

Cor. 23.7

I.6. Suites et séries télescopiques

Proposition 23.12

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Démonstration

Méthode : Sommation d'une série en utilisant des sommes télescopiques

Le théorème précédent paraît anodin mais est souvent utilisé pour calculer la valeur de la somme d'une série, notamment lorsque celle-ci a pour terme général une fraction rationnelle. En décomposant cette fraction rationnelle en éléments simples, il apparaît parfois une série télescopique dont la somme peut être calculée.

Nous verrons aussi à l'exercice 23.11 une utilisation directe de cette proposition.

Ex. 23.8 Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Cor. 23.8

Ex. 23.9 En utilisant l'exercice précédent, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge et donner un encadrement de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Cor. 23.9

I.7. Série exponentielle

Proposition 23.13 (Série exponentielle)

L'exercice 23.4 montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Cette égalité se prolonge aux variables complexes : autrement dit,

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$$

II. Séries à termes positifs

II.1. Définition

Définition 23.14 (Série à termes positifs)

On dit que $\sum u_n$ est ***une série à termes positifs*** ou plus simplement est ***à termes positifs*** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

II.2. Théorème de convergence monotone

Théorème 23.15

Une série à termes positifs converge si et seulement si elle est majorée.

Démonstration

Notation

Somme d'une série à termes positifs

Le théorème précédent montre qu'une série à termes positifs divergente tend vers $+\infty$.

On notera alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$$

Autrement, ***pour une série à termes positifs***, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est ***toujours définie*** et prend sa valeur dans $[0; +\infty]$.

Dans le cas où, au contraire, une série ***à termes positifs*** converge, on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$.

II.3. Comparaison entre séries et intégrales

Théorème 23.16

Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Méthode

Nous avons déjà utilisé le théorème précédent pour déterminer la nature de la ***série harmonique*** $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$.

En pratique, comme dans l'exemple 23.6, ce théorème permet dans le cas où la série est divergente d'obtenir ***non seulement la divergence de la série***, mais aussi ***un équivalent*** de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ lorsque $n \to +\infty$.

Dans le cas des séries convergentes en revanche, ce théorème permet de majorer la série donc de prouver sa convergence, mais ne donne pas la valeur de sa somme.

Ex. 23.10 Soit $r \in \mathbb{R}$.

Déterminer suivant la valeur de r la nature de la série $S = \displaystyle\sum \frac{1}{n^r}$ et donner un équivalent de S_n lorsqu'elle diverge.

Cor. 23.10

II.4. Séries de Riemann

Définition 23.17 (Séries de Riemann)

On appelle ***série de Riemann*** toute série de la forme $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Propriété 23.18

La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

La démonstration a été faite à l'exercice 23.10.

II.5. Théorèmes de comparaisons entre séries *à termes positifs*

Proposition 23.19 (Majoration/minoration)

Si u et v sont positives à partir d'un certain rang et si $u \leqslant v$ à partir d'un certain rang alors

- $\sum v_n$ converge$\Rightarrow \sum u_n$ converge ;
- $\sum u_n$ diverge$\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

Démonstration

Remarque

Dans la proposition précédente, ***si l'inégalité est vérifiée à partir du rang*** 0, on peut de plus affirmer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Proposition 23.20 (Nature de séries à termes *positifs équivalents*)

Si u et v sont positives et si $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

II.6. Exemples

Ex. 23.11 Soit x la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Montrer que x_n converge et en déduire qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Cor. 23.11

Méthode : Utilisation des séries de Riemann et des théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs

- Si $\sum u_n$ est une série à terme positifs et si $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$:
  en effet, $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, donc à partir d'un certain rang, $u_n > \dfrac{1}{n}$.
  Le théorème de comparaison et le théorème sur les séries de Riemann permettent de conclure à la divergence de $\sum u_n$.
- Si $\sum u_n$ est une série à terme positifs et si $n^2u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$:
  en effet, $n^2u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n < \dfrac{1}{n^2}$.
  Le théorème de comparaison et le théorème sur les séries de Riemann permettent de conclure à la convergence de $\sum u_n$.
- Ces deux exemples donnent une méthode très utile en exercices pour obtenir la ***nature*** (c'est-à-dire la convergence ou le divergence) d'une série à termes positifs.

Ex. 23.12 Nature des séries suivantes :

$$S = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n^3-1}} \qquad T = \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad U = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+\ln n} \qquad V = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n\ln n}} \qquad W = \sum n^3 e^{-n}$$

Cor. 23.12

Ex. 23.13

1) Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{n^n}{(2n)!}$?

2) On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^n}{(2n)!}$ (avec la convention $0^0 = 1$).
   Montrer que $S \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ puis majorer S.

Cor. 23.13

III. Séries absolument convergentes

III.1. Définition

Définition 23.21 (Convergence absolue)

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est ***absolument convergente*** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

III.2. Propriété

Théorème 23.22

Toute série absolument convergente est convergente. De plus, on a alors pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration

Méthode

Lorsqu'une série ***n'est pas à termes positifs***, le théorème précédent donne souvent un moyen simple de démontrer sa convergence.
Attention cependant ! Il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes !

Ex. 23.14 Soit $S = \sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

1) S est-elle absolument convergente ?
2) Montrer que S converge et calculer sa somme.

Cor. 23.14

Ex. 23.15 Soient $z \in \mathbb{C}$ et $S(z) = \sum nz^n$.

1) Pour quelles valeurs de z la série est-elle absolument convergente ?
2) Calculer, dans le cas où elle est absolument convergente, sa somme.

Cor. 23.15

III.3. Corollaire

Corollaire 23.23

Si (u_n) est une suite complexe, (v_n) une suite de réels positifs, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

III.4. Pour le plaisir : formule de Stirling

Ex. 23.16 (Cor.) On appelle intégrales de Wallis les intégrales de la forme

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad W'_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer W_0, W_1, W_0' et W_1'.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n = W_n'$.
3) Obtenir une formule de récurrence à l'aide d'une intégration par partie.

Ex. 23.17 Les exercices 23.16 et 23.11 ont conduit aux résultats suivants :

- $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \mathrm{d}x$ vérifie pour $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$;
- il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exprimer W_{2n} à l'aide de factoriels puis montrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Cor. 23.17

IV. Correction des exercices

Cor. 23.16 :

1) On obtient immédiatement $W_0 = W_0' = \dfrac{\pi}{2}$, $W_1 = W_1' = 1$.
2) On effectue le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$ dans l'une des deux intégrales :
$$W_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u)\mathrm{d}u = W_n'.$$
3) Pour n suffisamment grand,
$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[-\sin^{n-1}(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x \\ &= (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \end{aligned}$$
Donc pour $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

Deuxième partie

Feuilles d'exercices

Ensembles finis, calcul littéral

I. Entiers, récurrence

Ex. 1.1 (Cor.) Déterminer les valeurs possibles du chiffre a pour que $999999993a4$ soit divisible par 12.

Ex. 1.2 (Cor.) [*] ***Algorithme d'Euclide***
On rappelle que étant donnés deux entiers a et b positifs distincts non nuls, l'algorithme d'Euclide est le suivant :

- on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$;
- tant que c'est possible - c'est-à-dire tant que $b_n \neq 0$ -, on définit $a_{n+1} = b_n$ et b_{n+1} comme le reste de la division de a_n par b_n ;
- lorsque, pour un certain entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $b_{n_0} = 0$, la valeur de a_{n_0} est le $\mathrm{PGCD}(a; b)$ recherché.

a. Écrire l'algorithme d'Euclide pour $a = 1653$ et $b = 2717$.

b. Montrer que si $n > 0$ alors $a_{n+1} < a_n$ et $b_{n+1} < b_n$ si ces termes sont définis.

c. Montrer que tant que a_n, b_n, a_{n+1} et b_{n+1} sont strictement positifs, $\mathrm{PGCD}(a_n; b_n) = \mathrm{PGCD}(a_{n+1}; b_{n+1})$
Remarque : ce type d'égalité entre des quantités calculées à chaque pas d'un algorithme est appelé ***invariant de boucle*** en informatique.

d. En déduire que l'algorithme d'Euclide se termine.

e. Montrer que si $b_n = 0$ alors $a_n = \mathrm{PGCD}(a; b)$.

f. Écrire un code Python permettant étant données deux variables `a` et `b` de calculer leur PGCD.

Ex. 1.3 (Cor.) [*] Soit p un nombre premier supérieur à 4. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Ex. 1.4 (Cor.) [*] Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\mathrm{PGCD}(a; b)\,\mathrm{PPCM}(a; b) \leqslant ab$.

Ex. 1.5 (Cor.) [**] Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\mathrm{PGCD}(a; b)\,\mathrm{PPCM}(a; b) = ab$.

Ex. 1.6 Trouver ***tous*** les entiers naturels x, y tels que
$$\begin{cases} x + y & = 56 \\ \mathrm{PPCM}(x; y) & = 105 \end{cases}.$$

Ex. 1.7 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^x$.
Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de f est la fonction
$$f^{(n)} : x \in \mathbb{R} \mapsto (x + n)e^x$$

Ex. 1.8 On définit les suites u et v par :

- $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n$
- $v_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = n - v_n$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

b. Trouver une formule explicite similaire pour la suite v, et la démontrer.

Ex. 1.9 Pour tout entier $n \geq 3$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par :
« il existe $(u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ tel que $u_1 < u_2 < ... < u_n$ et $1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$. »

a. Analyse du cas $n = 3$: on suppose qu'il existe $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $u_1 < u_2 < u_3$ et $1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}$.
   i. Montrer que $u_1 < 3$. En déduire la valeur de u_1.
   ii. Trouver les valeurs de u_2 et u_3.

b. Montrer que $\mathcal{P}(4)$ est vraie et trouver tous les quadruplets qui satisfont cette propriété.

c. Montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

II. Sommes et produits finis

Ex. 1.10 Transformer en utilisant le signe $\sum$ puis simplifier pour $n \in \mathbb{N}$:
$I = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n+1)$
Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Ex. 1.11 (Cor.) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$,
$S_n = 1 \times (n+1) + 2 \times n + 3 \times (n-1) + ... + n \times 2 + (n+1) \times 1$

Ex. 1.12 Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=5}^{30} \frac{k^2 - 2k - 3}{k+1}$.
Indication : on pourra effectuer le changement d'indice $j = k+1$ ou remarquer que $\dfrac{k^2 - 2k - 3}{k+1} = ...$

Ex. 1.13 Simplifier les sommes suivantes (n étant un entier naturel) :

- $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} 2^{k-1}$
- $\displaystyle\sum_{k=-2}^{n} \frac{1}{3^{k+1}}$
- $\displaystyle\sum_{k=-5}^{15} k(10-k)$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n - k + 1$
- $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n-1} \sin(2k+1)$

Ex. 1.14 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$S_n = \displaystyle\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \min(i;j)$ et $T_n = \displaystyle\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \max(i;j)$.

Ex. 1.15 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Ex. 1.16 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} k}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k} = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$

Ex. 1.17 Calculer et simplifier (pour $n \in \mathbb{N}$) les sommes suivantes :

$$I = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \qquad J = \sum_{k=1}^{n} k \times (k!)$$

III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

Ex. 1.18 ***Petite formule*** Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

En déduire une expression simplifiée de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}$$

et de

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$$

Ex. 1.19 Simplifier les sommes suivantes : étant donnés un entier naturel n, $p \in [\![0;n]\!]$ et un complexe z

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \qquad S_2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^n \qquad S_5(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{k+1}(1-z)^{n-k}$$

$$T_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$

Ex. 1.20 $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \le p \le n$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
Indication : on pourra tenter d'utiliser la formule de Pascal pour

faire apparaître un télescopage.
Ou bien faire une démonstration par récurrence.

Ex. 1.21 Soient $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que $\dfrac{p+1}{\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}} - \dfrac{p+1}{\begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix}} = \dfrac{p}{\begin{pmatrix} n+p \\ p+1 \end{pmatrix}}$.

b. En déduire une expression simplifiée de $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$ et

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)(i+3)}.$$

Corrections

Cor. 1.1 : Soit $N = 99999999304 + a \times 10$. N doit être divisible par 12 or $99999999300 = 12 \times 25 \times 333333331$. Donc $12|N \Leftrightarrow 12|(10a+4)$.
Deux solutions s'offrent alors :

- comme a est un *chiffre*, $a \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. On essaye toutes les valeurs de a et on montre que $12|(10a+4)$ pour
  - ⋆ $a = 2 : 20+4 = 24 = 2 \times 12$;
  - ⋆ $a = 8 : 84 = 7 \times 12$.
- on écrit : $10a+4 = (12-2)a+4 = 12a+4-2a$ est divisible par 12 si et seulement si $4-2a$ l'est. On retrouve à nouveau les deux cas possibles, $a = 2$ donne $4-2a = 0$ et $a = 2+6 = 8$ donne $4-2a = -12$, de façon plus simple à calculer.

Cor. 1.2 :

a.

a_i	b_i	$a_i = qb_i + r$
1653	2717	$1653 = 0 \times 2717 + 1653$
2717	1653	$2717 = 1 \times 1653 + 1064$
1653	1064	$1653 = 1 \times 1064 + 589$
1064	589	$1064 = 1 \times 589 + 475$
589	475	$589 = 1 \times 475 + 114$
475	114	$475 = 4 \times 114 + 19$
114	19	$114 = 6 \times 19 + 0$
19	0	Impossible

Le PGCD de 1653 et 2717 est 19.

b. À partir du rang $n = 1$, les termes a_n et b_n sont définis par la formule de récurrence $a_n = b_{n-1}$ et b_n est le reste de la division euclidienne de a_{n-1} par b_{n-1} : donc $b_n < b_{n-1} = a_n$.
De plus, comme $a_{n+1} = b_n$, $a_{n+1} < a_n$.

c. Soit d un diviseur commun de a_n et b_n. $d|a_{n+1}$ puisque $a_{n+1} = b_n$.
De plus, la division euclidienne $a_n = qb_n + r$ permet d'écrire $r = a_n - qb_n$ qui est donc divisible par d (comme différence de deux nombres divisibles par d).
Donc d divise $r = b_{n+1}$.
Donc l'ensemble D_n des diviseurs communs à a_n et b_n est inclus dans l'ensemble D_{n+1} défini de même.
Réciproquement, en écrivant que $a_n = qa_{n+1} + b_{n+1}$, on montre que $D_{n+1} \subset D_n$.
Donc $D_n = D_{n+1}$
et $\text{PGCD}(a_n;b_n) = \max D_n = \max D_{n+1} = \text{PGCD}(a_{n+1};b_{n+1})$.

d. On a montré que tant que l'algorithme n'est pas terminé $b_n < b_{n-1}$. La suite (b_n) est donc une suite strictement décroissante d'entiers positifs (puisque le reste d'une division euclidienne est positif). Il est donc impossible que cette suite soit infinie (il n'y a qu'un nombre fini d'entiers positifs inférieurs $b_0 = b$).
L'algorithme d'Euclide se termine donc en un nombre fini d'étapes, lorsque le reste de la division euclidienne effectuée dans une boucle est nul.

e. Supposons que $b_n = 0$. Alors $a_{n-1} = qb_{n-1} + 0$ est multiple de b_{n-1}. Donc $\text{PGCD}(a_{n-1};b_{n-1}) = \text{PGCD}(qb_{n-1};b_{n-1}) = b_{n-1} = a_n$.
Or pour tout n valide $\text{PGCD}(a_n;b_n) = \text{PGCD}(a;b)$ (c'est un invariant, sa valeur est la même qu'au début de l'algorithme).
Donc $\text{PGCD}(a;b) = a_n$ lorsque $b_n = 0$.

f.
```
def euclide(a,b):
    while b>0:
        a,b=b,a%b
        print(a,b)
    return a
```

Cor. 1.3 : Si p premier est supérieur à 4, en particulier $2 \nmid p$ et $3 \nmid p$. Donc $p = 1+6k$ ou $p = 5+6k$, $k \in \mathbb{N}$ (tous les autres cas donnent un nombre divisible par 2 ou 3).
Donc $p^2-1 = 12k+36k^2 = 12k(1+3k)$ ou $p^2-1 = 24+60k+36k^2 = 24+12k(5+3k)$.
Or si k est pair, alors $12k$ est un multiple de 24.

Et si k est impair, $12(1+3k)$ et $12(5+3k)$ sont des multiples de 24.
Donc p^2-1 est divisible par 24 pour tout nombre premier p supérieur à 4.

Cor. 1.4 : Considérons la fraction $F = \dfrac{ab}{\mathrm{PGCD}(a;b)}$.
D'une part, $F = \dfrac{a}{\mathrm{PGCD}(a;b)} \times b$. Comme $\mathrm{PGCD}(a;b)$ divise a, F est un entier multiple de b et de $a' = \dfrac{a}{\mathrm{PGCD}(a;b)} \in \mathbb{N}$.
D'autre part, $F = \dfrac{b}{\mathrm{PGCD}(a;b)} \times a$. Comme $\mathrm{PGCD}(a;b)$ divise b, F est un entier multiple de a et de $b' = \dfrac{b}{\mathrm{PGCD}(a;b)} \in \mathbb{N}$.
F est donc un multiple de a **et** de b. Par conséquent $\mathrm{PPCM}(a;b)$ qui est ***le plus petit*** des multiples de a **et** de b vérifie

$$\mathrm{PPCM}(a;b) \leqslant F$$

En remplaçant F par sa définition on obtient donc
$\mathrm{PGCD}(a;b)\,\mathrm{PPCM}(a;b) \leqslant ab$

Cor. 1.5 : En reprenant les notations et la démonstration de l'exercice 1.4, on a $F = \dfrac{ab}{\mathrm{PGCD}(a;b)} = k\,\mathrm{PPCM}(a;b)$ pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$.
En posant $G = \dfrac{ab}{\mathrm{PPCM}(a;b)}$, on a donc $G = k\,\mathrm{PGCD}(a;b)$. En particulier, G est un entier.
Or $\mathrm{PPCM}(a;b)$ est un multiple (strictement positif) de a donc il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{PPCM}(a;b) = ia$. De même, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{PPCM}(a;b) = jb$.
Donc $G = \dfrac{ab}{ia} = \dfrac{b}{i}$ divise b et de même $G = \dfrac{ab}{jb} = \dfrac{a}{j}$ divise a.
Or $\mathrm{PGCD}(a;b)$ est le plus grand diviseur commun à a et b donc $\mathrm{PGCD}(a;b) \geqslant G$.
En remplaçant G par sa définition, on obtient donc $\mathrm{PGCD}(a;b)\,\mathrm{PPCM}(a;b) \geqslant ab$.
Le résultat de l'exercice 1.4 permet alors de conclure que
$\mathrm{PGCD}(a;b)\,\mathrm{PPCM}(a;b) = ab$.

Cor. 1.11 : Le premier travail à faire est d'exprimer cette somme à l'aide d'un signe $\sum$:
$S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i(n+2-i)$
Ensuite, on utilise les différentes techniques du cours. Par exemple :

$$\begin{aligned}
S_n &= (n+2)\sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = (n+2)\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= (n+1)(n+2)\frac{3n+6-2n-3}{6} \\
&= \begin{pmatrix} n+3 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}.$$

Logique, ensembles, applications

I. Éléments de logique

Ex. 2.1 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Écrire chacune d'elles comme une implication.

a. Une condition suffisante pour qu'un nombre réel soit supérieur ou égal à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.

b. Une condition nécessaire pour qu'un nombre entier soit strictement supérieur à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.

c. Pour qu'un nombre réel soit strictement supérieur à 2, il faut que son carré soit strictement supérieur à 4.

Ex. 2.2 [∗] Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+$ tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels. Montrer (par l'absurde) que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est aussi irrationnel.

Ex. 2.3 [∗] On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

Ex. 2.4 [∗] On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une. Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intrus en trois pesées ?

II. Ensembles et quantificateurs

Ex. 2.5

a. Donner une définition par compréhension puis comme image directe de l'ensemble I des entiers relatifs impairs.

b. Donner une définition symbolique des ensembles suivants :
- $E = \{-28; -21; -14; -7; 0; 7; 14; 21; 28; 35\}$
- $F = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100\}$

Ex. 2.6 Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E. Prouver les égalités suivantes :
•$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ •$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ •$A \cup B = (A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)$

Ex. 2.7 Donner comme réunion d'intervalles les parties de $\mathbb{R}$ constituées des valeurs de x vérifiant les assertions suivantes :

a. $(x > 0 \textbf{ et } x < 1) \textbf{ ou } x = 0$;

b. $x > 3 \textbf{ et } x < 5 \textbf{ et } x \neq 4$;

c. $(x \leqslant 0 \textbf{ et } x > 1) \textbf{ ou } x = 4$;

d. $x \geqslant 0 \Rightarrow x > 3$.

III. Applications et fonctions

Ex. 2.8 Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x^2 - x - 1 \end{array} \right.$$

et calculer $\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\mathrm{d}x$.

Ex. 2.9 [∗] Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1;1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$.
Montrer que f est bijective et donner une expression de sa bijection réciproque.

Ex. 2.10 (Cor.) [∗] L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array} \right.$ est-elle injective ? surjective ?

IV. Équations et systèmes

Ex. 2.11 Vrai ou faux ?

a. Quel que soit la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, l'équation $mx = m$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution.

b. Le système d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} - x - \frac{3y}{2} & = & 0 \\ 5(x+y)+3 & = & 8-5x-10y \end{array}\right.$ est équivalent à la seule équation $2x+3y=1$.

Ex. 2.12 Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x :

(a) $(3x+2)(x+1) = -\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

(b) $(2x+1)(x-3)(x+2) - (2x+1)(x-7) = 0$

(c) $\ln(x+1) - \ln(1-x) = \ln 2$

Ex. 2.13 Résoudre l'équation d'inconnue réelle x et de paramètre réel m :
$(m+1)x + 3 = 2mx + m^2 + 2m$.

Ex. 2.14 Résoudre le système suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} z - y & = & 1 \\ x - az & = & 2 \\ ay - x & = & 3 \end{array}\right.$$

Ex. 2.15 Donner la nature et si possible une équation paramétrique de l'ensemble des solutions des systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$:

$$S_1 : \left\{\begin{array}{rcl} 3x - y + 2z & = & 5 \\ -8x + 3y + z & = & 1 \end{array}\right. \qquad S_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x + y - z & = & 1 \\ 2x + 2y - z & = & 3 \end{array}\right.$$

Ex. 2.16

a. Résoudre et discuter suivant la valeur de $a, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ le système

$$S_3 : \left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & \alpha \\ x & + & ay & + & z & = & \beta \\ x & + & y & + & az & = & \gamma \end{array}\right.$$

b. Généraliser le résultat à un système de 4 équations à 4 inconnues, 5 équations à 5 inconnues, etc..., n équations à n inconnues.

Ex. 2.17 [*] Résoudre avec $\forall i \in [\![1;n]\!]\,, a_i \in \mathbb{R}^*$ et $s \in \mathbb{R}$ le système d'inconnues $x_1, ..., x_n$ réelles suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \dfrac{x_1}{a_1} & = & \dfrac{x_2}{a_2} & = & \cdots & = & \dfrac{x_n}{a_n} \\ x_1 & + & \cdots & + & x_n & = & s \end{array}\right.$$

Corrections

Cor. 2.10 : L'application n'est ni injective, ni surjective.
En effet, $f(1,2) = (3,2) = f(2,1)$ donc l'application n'est pas injective.
De plus, montrons qu'il n'existe pas de couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x+y=0$ et $xy=1$. Comme le produit $xy \neq 0$, x et y sont non nuls. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ xy=1 & & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ y & = & \frac{1}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+\frac{1}{x} & = & 0 \\ y & = & \frac{1}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2+1 & = & 0 \\ y & = & \frac{1}{x} \end{array}\right.$$

Or l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solutions réelles, donc f n'est pas surjective.

Nombres complexes

I. Conjugué, module, parties réelle et imaginaire

Ex. 3.1 Soit z un nombre complexe différent de i.
Montrer que $Z = \dfrac{iz-1}{z-i}$ ***est bien défini*** et que $Z \neq i$.

Ex. 3.2 Soit $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$

Ex. 3.3 Montrer que si z_1 et z_2 sont des complexes de module inférieur ou égal à 1 alors $|z_1+z_2| \leq \sqrt{2}$ ou $|z_1-z_2| \leq \sqrt{2}$.

Ex. 3.4 Soit z un nombre complexe de module 1, différent de -1.
Montrer que $u = \dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{2}$ est bien défini et que $u \in i\mathbb{R}$.

II. Trigonométrie

Ex. 3.5 Écrire sous la forme trigonométrique les complexes suivants :
$z_1 = -3 \quad z_2 = -3i \quad z_3 = -2+2i \quad z_4 = \sqrt{3}-i \quad z_5 = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) - i$

Ex. 3.6 Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $a = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ et $b = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$.

a. Montrer que $\bar{a} = b$ puis calculer $a+b$ et ab.

b. En déduire a et b.

Ex. 3.7 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a. Écrire $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

b. En prenant $\theta = \frac{\pi}{5}$, déduire de la question précédente la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

c. Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}$.

Ex. 3.8 Linéariser les polynômes trigonométriques :
$A(x) = \sin^5 x \qquad B(x) = \cos^3 x \sin^2 x \qquad C(x) = \cos^6 x$

Ex. 3.9 Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Ex. 3.10 [**] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $D_n : x \in [-\pi;\pi] \mapsto 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$ et $F_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$.

a. Que vaut $D_n(0)$?

b. Montrer que pour tout $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$,
$$D_n(x) = 2\cos\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 1.$$

c. En déduire que pour tout $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$,
$$D_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

d. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$?

e. Montrer que pour tout $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$,
$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

f. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0} F_n(x)$?

III. Divers

Ex. 3.11 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x^k(1-x)^{n-k}$$

a. Montrer que $\forall x \in [0;1], \forall k \in [\![0;n]\!], 0 \leqslant f_k(x) \leqslant 1$.

b. Soit x un nombre réel. Simplifier la somme

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k(x)$$

c. Soit x un nombre réel. Simplifier la somme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} f_k(x)$$

d. Soit x un nombre réel. Simplifier la somme

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} f_k(x)$$

e. Existe-t-il une famille $(a_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ de nombres réels telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x) = x^3 \quad ?$$

Ex. 3.12 Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (-1)^i \binom{j}{i}$.
En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n \\ i \texttt{ pair}}} \binom{j}{i}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n \\ i \texttt{ impair}}} \binom{j}{i}$.

Ex. 3.13 Soit z un nombre complexe et n un entier strictement positif.
Simplifier la somme

$$A_n = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} z^j$$

en distinguant les cas $z = 1$ et $z \neq 1$.

Ex. 3.14 Résoudre les systèmes suivants d'inconnues ***complexes*** :

$$\begin{cases} (1+i)x + y = 2i \\ ix + (1+i)y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + iy - z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

Ex. 3.15 Résoudre et ***discuter suivant la valeur du paramètre*** a ***complexe*** le système suivant d'inconnues $(x;y;z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ay + z = 1 \\ x + az = 1+i \end{cases}$$

Ex. 3.16 Soit $h : \begin{cases} H \to D \\ z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i} \end{cases}$ où $H = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{I}m\,(z) > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

a. Justifier rapidement que h est bien définie sur H.

b. Soit $z \in H$. Montrer que $h(z) \in D$.

c. Soit $Z \in D$. Montrer qu'il existe $z \in H$ tel que $Z = h(z)$.

d. Que peut-on déduire des deux questions précédentes concernant l'application h ?

e. Soit $z \in H$ et $z' \in H$ tels que $h(z) = h(z')$.
Montrer que $z = z'$.

f. Que peut-on déduire de la question précédente concernant l'application h ?

g. Montrer que h est une bijection de H vers D et donner l'expression de sa bijection réciproque.
Espace de départ. Espace d'arrivée. Animation de la transformation.

Corrections

Trigonométrie

Ex. 4.1 Simplifier, pour x réel quelconque :

$A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\qquad B = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$C = \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$D = \cos(x - \pi) + \sin\left(\frac{-\pi}{2} - x\right)$

Ex. 4.2 Donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Ex. 4.3 Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
Simplifier :

$$U = \sin(4x)\cos(5x) - \sin(5x)\cos(4x) \qquad V = \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}$$

$$W = \cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \qquad Y = \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$$

Ex. 4.4 (Cor.) Soit n un entier naturel et x un réel.

Simplifier la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cos(kx)$.

Ex. 4.5 Résoudre le système suivant d'inconnues $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre a réel :

$$\begin{cases} \cos(a) + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin(a) + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 \end{cases}$$

Ex. 4.6 Soit n un entier naturel et x un réel tel que $\cos(x) \neq 0$.

Simplifier la somme $T(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

Indication : écrire $\cos(kx) = \mathcal{R}e\left(e^{ikx}\right)$ puis...

Ex. 4.7 Soit $z \in \mathbb{U}$.

Peut-on trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = \dfrac{1 + ia}{1 - ia}$?

Ex. 4.8 Quelle relation y a-t-il entre les fonctions suivantes ?

$$f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$$

$$g : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

$$h : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ex. 4.9 Étudier (ensemble de définition, parité, périodicité, variations, représentation graphique, etc...) la fonction définie par

$$T(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$$

Cor. 4.4 : Notons $T(x)=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$ et $U(x)=\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}$.
T est dérivable et $\forall x\in\mathbb{R}, T'(x)=S(x)$.
Par ailleurs $T(x)=\mathcal{I}m\left(U(x)\right)$. Or, pour $x\neq 0[2\pi]$:

$$\begin{aligned}
U(x) &= \sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\\
&= \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\\
&= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x}-e^{i\frac{n+1}{2}x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)}\\
&= e^{i\frac{n}{2}x}\frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Donc $T(x)=\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$\text{et } S(x)=T'(x)=\begin{array}{l}\dfrac{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)+\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\right]}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\ +\dfrac{\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right]\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\end{array}$$

ou encore

$$S(x)=\frac{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)-\sin^2\left(\frac{n}{2}x\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Si $x=0[2\pi]$, $S(x)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Techniques de calcul différentiel

I. Généralités

Ex. 5.1

- Montrer que $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
- Montrer que $\forall (a;b;c) \in \mathbb{R}^3, ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2$.
- Montrer que $\forall (a;b;c) \in \mathbb{R}^3, 3ab+3bc+3ac \leq (a+b+c)^2$.

Ex. 5.2 $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1..., a_n$ des réels.

- Montrer que si $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n$ alors $\forall i \in [\![1;n]\!], a_i = 1$.
- Est-il possible que $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > n$?
- Trouver un exemple où $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 < n$.

Ex. 5.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter l'ensemble des solutions :
a. $|x+1| \leq 1$ b. $|x-1| \leq |x-2|$ c. $|2x-1| - |x+1| < |3x+5|$

Ex. 5.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter l'ensemble des solutions :
a. $(y+1)(y+3) > (y+1)^3$ b. $(y+2)(y+3)y \leq 4y+8$
c. $\lambda \in \mathbb{R}$ donné, $(\lambda^2-1)\,y^2 + 2\lambda y + 1 \geq 0$

Ex. 5.5 [*] Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0 et f bijective et impaire de I dans $J \subset \mathbb{R}$. Montrer que f^{-1} est impaire.

Ex. 5.6 On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique, admettant 2 et 3 comme période. Montrer que f est 1-périodique.

II. Études de fonctions

Ex. 5.7

- Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, \ln(x) \leqslant x-1$.
- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 1-\frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x-\frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
- Montrer que $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
- Montrer que, pour tout entier n strictement supérieur à 1 et tout réel x ***non nul et supérieur ou égal à*** -1, on a :

$$(1+x)^n > 1+nx$$

Ex. 5.8 (Cor.) Étude et représentation graphique de

$$f : x \mapsto \left|x - \sqrt{1-x^2}\right|$$

Ex. 5.9 Étudier la fonction $P : x \in \mathbb{R} \mapsto x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2$.
Montrer que $P(x) = 0$ possède exactement deux solutions réelles, dont une (que l'on ne cherchera pas à obtenir) dans l'intervalle $[2;+\infty[$.

Ex. 5.10 Étudier la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x\,(x^3 - 3x^2 + 6x - 5)$.
Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution réelle x_0 (que l'on ne cherchera pas à obtenir).
Montrer plus précisément que $x_0 \in [1;2]$.

Ex. 5.11 Ensemble de définition, parité, étude et représentation graphique de $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.
On montrera que h est bijective de son ensemble de définition sur un intervalle à préciser et on donnera une expression de sa bijection réciproque.

Ex. 5.12 (Cor.) [**] Soit $0 < a \leqslant b$.

On pose $f : x \in]0;+\infty[\mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

Étudier la monotonie de f. En déduire l'inégalité

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2$$

Ex. 5.13

a. Montrer que, pour tout $x \in]0;1[$, on a les inégalités

$$\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$$

b. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{(p+1)n}$. Déterminer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Ex. 5.14 ***Sinus cardinal*** [**] On appelle ***sinus cardinal*** et on note sinc la fonction définie par

$$\mathrm{sinc} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x} \\ 0 & \mapsto & 1 \end{cases}$$

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

b. Déduire de la question précédente que sinc est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Quel est l'ensemble de dérivabilité ***à priori*** de sinc ?

d. Montrer que sinc est dérivable en 0. Que peut-on en déduire concernant l'ensemble sur lequel sinc est dérivable ?

e. Montrer que sinc possède un maximum que l'on précisera.

f. Montrer que sinc′ change de signe une infinité de fois.

g. Tracer une représentation graphique rapide de sinc (on ne cherchera pas à préciser les intervalles sur lesquels sinc est monotone).

h. Montrer que sinc′ est continue sur $\mathbb{R}$.

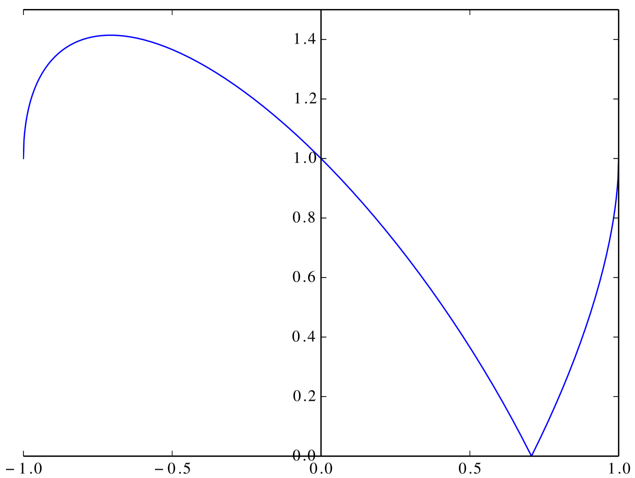
Corrections

Cor. 5.8 : $f(x)$ est définie si et seulement si $1-x^2 \geqslant 0$. Donc f est définie sur $[-1;1]$.
Étudions le signe de $x - \sqrt{1-x^2}$:
$x - \sqrt{1-x^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt{1-x^2}$. Cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in [-1;0]$. Considérons l'autre cas possible à savoir $x \in [0;1]$. Dans ce cas, l'inégalité porte sur deux quantités positives, la fonction carré est bijective croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ donc

$x \leqslant \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1-x^2 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En résumé :

- si $x \in \left[-1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2} - x$. Sur cet intervalle, f est dérivable si et seulement si $1-x^2 \neq 0$. Donc f est dérivable sur $\left]-1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$. On a alors :
  $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - 1 = \dfrac{-x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. On étudie à nouveau le signe de $f'(x)$ qui est celui de son numérateur.
  Or on remarque que $-x-\sqrt{1-x^2} = (-x) - \sqrt{1-(-x)^2} = u - \sqrt{1-u^2}$ en posant $u=-x$. L'étude du signe de cette dernière expression a déjà été faite et on conclut que
  $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left]-1;\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in \left[\dfrac{-\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
- de même, si $x \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]$, $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ et une étude similaire conduit à prouver que f est strictement croissante sur cet intervalle.

Valeurs de x	-1		$\frac{-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
Signe de $f'(x)$	||	+	0	-	-2||2	+	||
Variations de $f(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	0	↗	1



Cor. 5.12 :

- Commençons par justifier que f est bien définie sur $]0;+\infty[$.
  Soit $x > 0$. $0 < a \leqslant b$ donc $0 < ax \leqslant bx$ et par conséquent $1 < 1 + ax \leqslant 1 + bx$.
  Donc $\ln(1+ax)$ et $\ln(1+bx)$ sont bien définies et strictement positives.
  Donc $f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ est bien définie (son numérateur et son dénominateurs sont définis, et son dénominateur ne s'annule pas).
  De plus, cette étude montre aussi que $0 < f(x) \leqslant 1$.
  f est aussi dérivable comme quotient de fonctions dérivables et, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)^2} \\ &= \frac{a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)^2(1+ax)(1+bx)} \end{aligned}$$

  L'étude précédente prouve que le dénominateur de cette expression est strictement positif, $f'(x)$ est donc du signe de son numérateur.
- Étudions donc le signe de $a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$.

$$\begin{aligned} & a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a(1+bx)\ln(1+bx) \geqslant b(1+ax)\ln(1+ax) \\ \underset{\times\frac{1}{abx}}{\Leftrightarrow}\quad & \left(\frac{1}{bx}+1\right)\ln(1+bx) \geqslant \left(\frac{1}{ax}+1\right)\ln(1+ax) \end{aligned}$$

  Montrons que cette dernière inégalité est toujours vérifiée : comme $bx \geqslant ax > 0$, il suffit pour cela de démontrer que la fonction
  $g : u > 0 \mapsto \left(\dfrac{1}{u}+1\right)\ln(1+u) = \dfrac{(u+1)\ln(u+1)}{u}$ est croissante.
  Or, $g'(u) = \dfrac{(\ln(u+1)+1)u - (u+1)\ln(u+1)}{u^2} = \dfrac{u - \ln(u+1)}{u^2} \geqslant 0$
  car $\forall u \in]-1;+\infty[, \ln(1+u) \leqslant u$.
  Donc g est bien croissante, et par conséquent, $g(bx) \geqslant g(ax)$.
  D'après ce qui précède, ceci prouve que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) \geqslant 0$.
- Nous avons donc montré que f est croissante.
  Il s'agit d'en déduire maintenant que $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2$.
  Par hypothèse, $0 < a \leqslant b$. La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc aussi
  $0 < \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.
  Or f est croissante, donc $f\left(\frac{1}{b}\right) \leqslant f\left(\frac{1}{a}\right)$.
  Ceci achève la démonstration puisque :

$$f\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)}{\ln(1+1)} = \frac{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)}{\ln(2)}$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\ln(1+1)}{\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}$$

  et qu'en remplaçant dans l'inégalité précédente on obtient, comme l'énoncé l'affirmait,

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2$$

Nombres complexes : équations et géométrie

Remarque

On trouve sur internet une banque d'exercices d'oraux corrigés pour le concours CCP MP 2024. La plupart de ces exercices ne sont pas compréhensibles en Maths Sup, mais certains d'entre eux concernent en fait le programme de première année. Lorsque des exercices (du cours ou des feuilles d'exercices) seront extraits de cette banque, ils seront indiqués par ***CCP MP Année - n°xx***. Le numéro donné permet d'aller rechercher dans la banque d'exercices la solution officielle donnée.

Adresse internet de la banque d'exercices :

https://www.concours-commun-inp.fr/_resource/annales%20oraux/MP/2024/banque%20finale%20avec%20corr_2024.pdf

I. Utilisation en géométrie et en algèbre

Ex. 6.1 Soient z et z' deux complexes distincts de module égal à 1.

a. Montrer que $\overline{(z+z')}(z-z') \in i\mathbb{R}$.

b. En déduire que les bissectrices intérieures et extérieures de deux droites sécantes sont orthogonales.

Ex. 6.2 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$E : z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i = 0$.
Quelle particularité présente le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de cette équation ?

Ex. 6.3 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :
$E_1 : e^z = 1+i \qquad E_2 : e^z = e^{1+i}$

Ex. 6.4 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :

$E_1 : z^2 + z + 5 = 0 \qquad E_2 : z^6 = \dfrac{1+i}{4\sqrt{6} - i4\sqrt{2}}$
$E_3 : 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \qquad E_4 : z^2 = -3 + 4i$
$E_5 : (1+i)z^2 - z - 1 + i = 0 \qquad E_6 : \theta \in \mathbb{R}, z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$
$E_7 : z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$
$E_8 : z^3 - (3+2i)z^2 + (3+11i)z - 2(1+7i) = 0$
$E_9 : (z^2+4z+1)^2 + (3z+5)^2 = 0$

Ex. 6.5 (Cor.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation

$$nz^n = z^{n-1} + ... + z + 1$$

a. Résoudre (E_1), (E_2), (E_3).

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 1 est solution de (E_n).

c. Montrer que si $|z| > 1$ alors $n|z^n| > |z^{n-1} + ... + z + 1|$.

d. On suppose que $z = e^{i\theta} \neq 1$ est solution de (E_n).
Montrer que $ne^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} = \dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

e. Montrer que 1 est la seule racine de (E_n) de module 1.

f. Conclure.

Ex. 6.6 ***CCP MP 2024 - n°84***

a. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul. (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre)

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.

c. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions de l'équation (E) : $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Ex. 6.7 Soient $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Écrire $S = 1 + z + ... + z^{n-1}$ sous la forme d'un quotient.

b. En déduire que pour tout entier $n > 1$, la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle.

Ex. 6.8 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) + zf(1-z) = 1 + z$$

Corrections

Cor. 6.5 :

a. $(E_1) : z = 1.$
   $(E_2) : 2z^2 = z + 1.$
   $\Delta = 1 + 8 = 9$ conduit aux deux solutions $z_1 = 1$ et $z_2 = \dfrac{-1}{2}$.
   $(E_3) : 3z^3 = z^2 + z + 1.$
   On lit la question suivante :-), et on note que $z_1 = 1$ est racine évidente. D'où
   $(E_3) \Leftrightarrow (z-1)\big(3z^2 + 2z + 1\big) = 0.$
   $\Delta = 4 - 12 = -8$ conduit aux deux autres solutions $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{2}}{3}$ et $z_3 = \dfrac{-1 - i\sqrt{2}}{3}$.

b. D'une manière générale, (E_n) s'écrit $nz^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$.
   Pour $z = 1$, les membres de droite et de gauche de l'équation valent n. Donc 1 est solution de (E_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Supposons $|z| > 1$. Alors d'après l'inégalité triangulaire
   $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k\right| < n|z|^{n-1} < n|z|^n.$
   On en déduit immédiatement que (E_n) n'a aucune solution de module strictement supérieur à 1.

d. Soit $z = e^{i\theta} \neq 1$ une solution de (E_n). Alors
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{n\theta}{2}} - e^{i\frac{n\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = e^{i\frac{(n-1)\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$. En remplaçant dans (E_n) on obtient
   $ne^{in\theta} = e^{i\frac{(n-1)\theta}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Leftrightarrow ne^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} = \dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$

e. En gardant les mêmes notations que dans la question précédente, supposons que (E_n) admette une racine de module 1 distincte de $z = 1$. Le résultat précédent conduit en identifiant les ***parties réelles*** des deux membres à

$$\begin{aligned}
(E_n) \quad &\Rightarrow \quad n\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{(n+1-1)\theta}{2}\right)\\
&\Rightarrow \quad n\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) = 0\\
&\Rightarrow \quad (n+1)\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

   L'identification des ***parties imaginaires*** conduit quant à elle immédiatement à $\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) = 0$ et donc à $\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) = 1$.
   La conjonction de ces deux identités permet donc d'affirmer que si $z = e^{i\theta} \neq 1$ est solution de (E_n) alors
   $\frac{\theta}{2} \equiv 0\,[\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv 0\,[2\pi]$ ce qui est absurde puisque $z \neq 1$.
   Donc la seule racine de module 1 est 1.

f. Les questions c, d, et e permettent d'affirmer que si z est solution de (E_n) alors $z = 1$ ou $|z| < 1$.

Fonctions de référence

I. Logarithmes et exponentielle

Ex. 7.1 Soit $n, q \in \mathbb{N}^*$.

a. Compléter : n s'écrit avec exactement q chiffres si et seulement si
.... $\leq n <$ ....

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\log_{10}(n)$ pour que n s'écrive avec q chiffres.

c. En utilisant le fait que $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, donner une valeur approchée de $\log_{10}(2)$.

d. Donner le nombre approximatif de chiffres du plus grand nombre premier connu $2^{82\,589\,933} - 1$ (record obtenu le 7 décembre 2018 par Patrick Laroche).
[Réponse : ce nombre premier possède 24 862 048 chiffres en base 10.]

Ex. 7.2 (Cor.) Soient $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dérivables où u vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$.
Montrer que $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Ex. 7.3

a. Montrer que pour tout réel positif x, $e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

b. Montrer que $e \geqslant \dfrac{8}{3}$.
Indication : voir l'exercice 5 du cours.

Ex. 7.4 On rappelle que, d'après l'exercice 2 du cours,

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$. Que peut-on dire des limites de la forme $1^{+\infty}$?
Calculer de même $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{-x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{\ln(x)}}$.
Interpréter ces résultats en terme de formes indéterminées.

Ex. 7.5 Calculer, si elles existent :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 - 4x + 1 - \ln(x)$
b. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x + 1$
c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^3+1}$
d. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$

Ex. 7.6 Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{-1}{x^2}}\right)^x$
Quelle conclusion peut-on en tirer sur la valeur que pourrait avoir 0^0 ?
Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2^{\frac{-1}{x}}\right)^x$ et préciser votre réponse.

Ex. 7.7 Résoudre les équations d'inconnue x réelle :
(E_1) : $\log_{10}(x+2) - \log_{10}(x+1) = \log_{10}(x-1)$.
(E_2) : $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

II. Fonctions trigonométriques et réciproques

Ex. 7.8 Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

Ex. 7.9 Donner la valeur de $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\mathrm{Arccos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right)$.

Ex. 7.10 (Cor.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b. $\tan x = 1$
c. $\sin^2(2x) = \cos^2(x)$
d. $\cos(12x) - \cos(2x) = \sqrt{3}\sin(5x)$

Ex. 7.11 [*] Résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E) \quad \cos(5x) - 3\cos(3x) + 5\cos(x) = 0$$

Ex. 7.12 Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan x$.

Ex. 7.13 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{6}$

b. $\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) = \pi$

c. $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} x$

d. $\operatorname{Arcsin}(2x-1) = \alpha \in \mathbb{R}$

e. $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) - \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)$

Ex. 7.14 (Cor.) $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$: donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité, puis étudier et tracer la fonction.

Ex. 7.15 Donner une expression de Arcsin et de Arccos ne faisant intervenir que Arctan.

Ex. 7.16 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}(x) + 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$$

Que vaut $\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}-1)$? Que vaut $\operatorname{Arctan}(2-\sqrt{3})$?

III. Fonctions hyperboliques

Ex. 7.17 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer $\operatorname{ch}(3x)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$.

b. Linéariser $\operatorname{sh}^2(x)\operatorname{ch}(x)$ (c'est-à-dire l'exprimer comme combinaison linéaire de fonctions du type $x \mapsto \operatorname{ch}(kx)$ ou $x \mapsto \operatorname{sh}(kx)$ avec $k \in \mathbb{N}$).

c. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$.

Ex. 7.18 (Cor.) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(2\alpha) = 2\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\alpha)$.

b. On pose $p_n(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Calculer $\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) p_n(x)$ pour $x \neq 0$ et en déduire une expression simplifiée de $p_n(x)$.

c. On pose $p(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n(x)$.

Déterminer $p(x)$ pour $x \neq 0$.

d. Vérifier que p est continue en 0.

Ex. 7.19

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)} = \dfrac{\operatorname{ch}(x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)} - \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Simplifier $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{sh}(2^k x)}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

IV. Divers, études de fonctions

Ex. 7.20

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

b. En déduire l'existence et la valeur de $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)\dots\left(1 + \dfrac{n}{n^2}\right)$.

Ex. 7.21 Montrer que $\forall t \in]1;+\infty[, \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t < e < \left(1 + \dfrac{1}{t-1}\right)^t$.

Ex. 7.22 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b$.

Corrections

Cor. 7.2 : $\forall x\in\mathbb{R}, u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))} = f(x)$ est bien définie car $\forall x\in\mathbb{R}, u(x)>0$.
Par ailleurs, c'est une fonction dérivable comme composée et produit de fonctions qui le sont et :
$f'(x) = \left[v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\times\frac{u'(x)}{u(x)}\right]e^{v(x)\ln(u(x))}$ d'où $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x) = v'(x)\ln(u(x))\,u(x)^{v(x)} + v(x)u'(x)u(x)^{v(x)-1}$$

Cor. 7.10 : a. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lll} x & = & \frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \texttt{ou} & & \\ x & = & \frac{-\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$S_a = \left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{-\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, résultat donné par la propriété 7.14 du cours.
b. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x\in S_b = \left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ car $\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$

c. $\sin^2(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow 4\cos^2 x\sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lll} \cos x & = & 0 \\ \texttt{ou} & & \\ \sin^2 x & = & \frac{1}{4}\end{array}\right.$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$$\sin x = \pm\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{array}{lll} x & = & \frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \texttt{ou} & & \\ x & = & \pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \texttt{ou} & & \\ x & = & -\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \texttt{ou} & & \\ x & = & \pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \texttt{ ou } x = -\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right)$

$S_c = \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi, -\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$
d. $\forall a,b\in\mathbb{R}, \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
Donc $\cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin a\sin b$.
On cherche $a+b = 12x$ et $a-b = 2x$ et on obtient $a = 7x$ et $b = 5x$.
Donc l'équation équivaut à

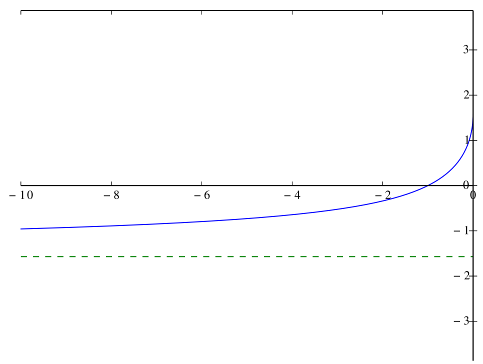
$$-2\sin(7x)\sin(5x) = \sqrt{3}\sin(5x) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lll} \sin(5x) & = & 0 \\ \texttt{ou} & & \\ \sin(7x) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

$S_d = \left\{\frac{k\pi}{5}, -\frac{\pi}{21}+\frac{2k\pi}{7}, \frac{4\pi}{21}+\frac{2k\pi}{7}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Cor. 7.14 : $f(x)$ est définie si et seulement si

- $\frac{1+x}{1-x}$ est défini d'une part ;
- et $-1\leqslant\frac{1+x}{1-x}\leqslant 1$ d'autre part.

Étudions donc $g : x\mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$.
g est définie (et dérivable) sur $G = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et sur cet ensemble
$g(x) = \dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{2+x-1}{1-x} = \dfrac{2}{1-x} - 1$.
Donc $-1\leqslant g(x)\leqslant 1 \Leftrightarrow 0\leqslant \dfrac{2}{1-x}\leqslant 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1\leqslant 1-x \\ 1-x>0\end{cases} \Leftrightarrow x\leqslant 0$.
f est donc définie sur $\mathbb{R}_-$ et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ (l'étude précédente restant valable en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes).
On a alors $f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}\times\dfrac{1}{\sqrt{1-1-\frac{4}{(1-x)^2}+\frac{4}{1-x}}}$. Après simplification, on obtient donc en tenant compte du fait que $x<0$ et que par conséquent $1-x>1>0$
$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$. Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{-\pi}{2}$ (asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{-\pi}{2}$) et $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.



Cor. 7.18 :

a. $\forall\alpha\in\mathbb{R}, \operatorname{sh}(2\alpha) = \dfrac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{2} = \dfrac{(e^{\alpha}-e^{-\alpha})(e^{\alpha}+e^{-\alpha})}{2} = 2\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\alpha)$.

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $n\geq 1$

$$p_n(x)\operatorname{sh}\left(\tfrac{x}{2^n}\right) = \prod_{k=0}^{n}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\prod_{k=0}^{n-1}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) =$$

$\dfrac{p_{n-1}(x)\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $q_n(x) = p_n(x)\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Or son premier terme vaut $q_0(x) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, p_n(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)}{2^n\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

c. On écrit pour $x \neq 0$:

$2^n\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = x\dfrac{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x\,\mathrm{sh}'(0) = x\,\mathrm{ch}(0) = x$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, p(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)}{x}$.

De plus, pour $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n(0) = 1 = p(0)$.

d. Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} p(x) = p(0)$.

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \mathrm{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(0) = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} p(x) = 1 = p(0)$. p est bien continue.

Équations différentielles et calcul intégral

I. Intégrales et primitives

Ex. 8.1 Déterminer les primitives suivantes en précisant le (ou les) intervalle(s) de validité de la primitive obtenue :

$$F_1(x) = \int^x t(t^2-1)^7 \mathrm{d}t \qquad F_2(x) = \int^x (t^2-1)^7 \mathrm{d}t$$

$$F_3(x) = \int^x \sqrt{5t+4}\,\mathrm{d}t \qquad F_4(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+5}$$

$$F_5(x) = \int^x \frac{2}{\sqrt{6-6t^2}}\mathrm{d}t \qquad F_6(x) = \int^x \frac{2t+5}{(t^2+5t+8)^4}\mathrm{d}t$$

$$F_7(x) = \int^x \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \qquad F_8(x) = \int^x \frac{1}{e^t+1}\mathrm{d}t$$

$$F_9(x) = \int^x \frac{2t}{(t-1)(3-t)}\mathrm{d}t \qquad F_{10}(x) = \int^x \sin^2(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$$

Ex. 8.2 Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^\pi e^x \cos(nx)\mathrm{d}x$.

Ex. 8.3 En effectuant une intégration par partie, donner l'ensemble des primitives de Arccos, Arcsin et Arctan (avec le ou les intervalles sur lesquels ces primitives sont valables).

Ex. 8.4 Donner l'ensemble des primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$, $g : x \mapsto \dfrac{1+2x}{x^2-6x+9}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{x^2-2x-1}$ ainsi que le (ou les) intervalle(s) sur le(s)quel(s) ces primitives sont valables.

Ex. 8.5 En effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, calculer

$$F(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$$

et précisez les intervalles sur lesquels cette primitive est définie.
En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ en précisant les intervalles sur lesquels elle est définie.

Ex. 8.6 Soit $I = \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout entier naturel n, on pose $F_n : x \in I \mapsto \displaystyle\int_0^x \tan^n(t)\mathrm{d}t$.

a. Donner, pour $x \in I$, l'expression de $F_0(x)$, $F_1(x)$ et $F_2(x)$.
b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, F_n(x) + F_{n+2}(x) = \dfrac{\tan^{n+1}(x)}{n+1}$.
c. Donner, pour $x \in I$, l'expression de $F_3(x)$ et $F_4(x)$.
d. Déduire de la question b. que, pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier n,

$$F_{2n}(x) = (-1)^n x + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{\tan^{2k-1}(x)}{2k-1}$$

e. Donner une formule similaire pour F_{2n+1}.

Ex. 8.7 Soient $f : x \in]0;+\infty[\mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ et $F : x \in]0;+\infty[\mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que F est bien définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.
b. Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
c. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F(x) \geq 0$.
d. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$.

e. Montrer que $\forall x \in]0;1]$,
$$\frac{1+x\ln(x)-x}{2} \leqslant F(x) \leqslant 1+x\ln(x)-x.$$

Ex. 8.8 Calculer chacune des intégrales suivantes, à l'aide du changement de variable indiqué :

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)\cos(t)}{2+\cos(t)}\mathrm{d}t$ en posant $u = \cos(t)$;

$J = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1+e^t+e^{2t}}{1+e^t}\mathrm{d}t$ en posant $u = e^t$;

$K = \displaystyle\int_1^{64} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$ en posant $t = x^6$.

II. Équations différentielles

Ex. 8.9 Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$

$$(E) : y' - 2xy = \mathrm{sh}(x) - 2x\,\mathrm{ch}(x)$$

Ex. 8.10 Résoudre pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$$(E) : y' + \tan(t)y = \sin(2t)$$

puis donner l'unique solution telle que $y(0) = 1$.

Ex. 8.11 Résoudre les équations différentielles suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

a. $(E_1) : y'' + 9y = x + 1, y(0) = 0$

b. $(E_2) : y'' - 2y' + y = e^x \cos(x)$

c. $(E_3) : y'' + y' - 2y = \sin^3(x)$.

Ex. 8.12 Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant le ou les intervalles de résolution choisis :

a. $ty' + y = \cos(t)$

b. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$

c. $xy'\ln(x) - y = 3x^2\ln^2(x)$

d. $y'' - y = \mathrm{sh}(x)$

e. $y'' + y' = 4x^2e^x$ avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$.

III. Compléments

Ex. 8.13 (Cor.) [*] Trouver les fonctions $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ telles que

$$\begin{cases} x'' &= x' + y' - y \\ y'' &= x' + y' - x \end{cases}$$

Indication : poser $u = x + y$ et $v = x - y$.

Ex. 8.14 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Indication : poser $g(t) = f(e^t)$.

Corrections

Cor. 8.13 : On suit l'indication ! Posons $u = x + y$ et $v = x - y$ et cherchons des équations différentielles satisfaites par u et v.
En sommant les deux équations du système proposé : $u'' = 2u' - u$
En faisant la différence des deux équations : $v'' = v$.
La première conduit à $u = (At + B)e^t, (A, B) \in \mathbb{R}^2$.
La seconde conduit à $v = Ce^t + De^{-t}, (C, D) \in \mathbb{R}^2$.
Et on conclut en écrivant $x = (u + v)/2$ et $y = (u - v)/2$.

Maths - Feuille d'exos n° 9

Nombres réels et suites numériques

I. L'ensemble $\mathbb{R}$

Ex. 9.1 Pour les ensembles suivants, donner lorsqu'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, le plus grand et le plus petit élément, la borne inférieure et la borne supérieure.
$A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $B = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
$C = \left\{\frac{x^2-3x+6}{x-2}, x \in [3;7]\right\}$ $D = \mathbb{Q} \cap [0;\pi]$
$(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$:
$E = \left\{a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $F = \left\{(-1)^n a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
$G = \left\{a + \frac{(-1)^n b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Ex. 9.2 (Cor.) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A, x \leq \alpha$.
Montrer que $\sup A \leq \alpha$.
Que peut-on dire si $\forall x \in A, x < \alpha$?

Ex. 9.3 (Cor.) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \left\{k + \frac{n}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

- Montrer que E_n admet une borne inférieure ***réelle*** et que $\inf E_n = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \left(k + \dfrac{n}{k}\right)$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \geq \sqrt{4n}$.
  Dans quel(s) cas a-t-on $\inf E_n = \sqrt{4n}$?

Ex. 9.4 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.
En déduire la valeur de $\left\lfloor \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{100} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor$.

II. Introduction aux suites

Ex. 9.5 Étudier la monotonie des suites définies par :
$u_n = \frac{1}{1+n^2}$ $v_n = \frac{n!}{2^n}$ $w_n = \frac{n^3}{5^n}$ $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1+(-1)^n}}$

Ex. 9.6

a. Montrer que pour tous réels x et y, on a :
$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

b. Montrer que pour tout réel x on a : $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

c. Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= n - u_n \end{cases}$.
Calculer u_n en fonction de n (on demande une formule explicite).

Ex. 9.7 Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, u_0 \in \mathbb{R}$.

a. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle définie ?

b. Étudier alors sa monotonie.

c. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle bornée ?

Ex. 9.8 Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2 \\ u_{n+2} &= \sqrt{u_{n+1} u_n} \end{cases}$.
Étudier la suite u, préciser notamment sa limite si elle existe.

Ex. 9.9 Soient a, b deux constantes réelles, u une suite réelle vérifiant $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$ et v une suite réelle vérifiant $v_{n+2} + a v_{n+1} + b v_n = 0$.

a. Montrer sans calculer son terme général que u est périodique de période 3.

b. Calculer le terme général u_n en fonction de n et retrouver le résultat précédent.

c. On suppose que la suite v est **non nulle** et périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il existe un nombre complexe $Z = \rho e^{i\theta}$ vérifiant à la

fois l'équation caractéristique $(E_c) : Z^2 + aZ + b = 0$ et l'équation $Z^p - 1 = 0$.
Indication : on envisagera plusieurs cas possibles suivant la nature des solutions de (E_c).

d. Exhiber une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui soit périodique de plus petite période 5.
Indication : en posant $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or, on pourra commencer par montrer que
$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2 + \phi X + 1)\left(X^2 - \frac{X}{\phi} + 1\right)$.

Ex. 9.10 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{1...1}_{n \text{ chiffres } 1}$

Ex. 9.11 Soit a et b deux réels strictement positifs. Pour les deux suites ci-dessous, on demande de montrer l'existence puis de ***donner une formule explicite*** pour le n-ième terme de la suite :

a. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{a + bu_n^2}$;

b. $v_0 = v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \dfrac{1}{\frac{a}{v_n} + \frac{b}{v_{n+1}}}$.

III. Limite d'une suite réelle

Ex. 9.12 Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n + 2\sin\left(n^2\right) \qquad \lim_{n\to+\infty} 2n + (-1)^n n \qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, a \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Ex. 9.13

a. Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

b. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)}$.

c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$ est finie et en donner un encadrement d'amplitude 1.

Ex. 9.14 (Cor.)

a. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$.

b. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = +\infty$.

Ex. 9.15 Montrer que la suite u définie par $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{4}, u_0 \in \mathbb{R}$ est croissante quelle que soit la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$.
Faire une représentation graphique de la suite récurrente.
Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 la suite est-elle majorée ?
Montrer l'existence de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ puis donner sa valeur.

Ex. 9.16 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + ... + \lfloor nx\rfloor}{n^2}$.

Ex. 9.17 Montrer en utilisant des suites extraites que $\left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
Faire de même pour $\left(\cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ puis pour $\left(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex. 9.18 On considère les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.
Montrer que u et v convergent vers une même limite.

Ex. 9.19 Soit u définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{n}e^{-u_n}$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

b. Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

Ex. 9.20 [*] Soit u définie par $u_0 \in]0;1[$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$.

a. Montrer que la suite u est bornée, convergente et calculer sa limite.

b. Les résultats de la questions précédentes restent-ils valables si l'on choisit u_0 réel quelconque ?

Ex. 9.21 Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

a. Donner une construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n.

b. Étudier cette suite dans les cas où $z_0 = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $z_0 \in \mathbb{R}_-^*$.

c. Montrer que $z_0 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z_n \notin \mathbb{R}$.

d. On suppose que $z_0 \notin \mathbb{R}$. Étudier la convergence de (z_n).
[Indication : écrire les termes de la suite sous forme exponentielle.]

IV. Révisions

Ex. 9.22 Donner une formule explicite pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ ou $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ en envisageant successivement les deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

a. $y' = y - 1$ et $u_{n+1} = u_n - 1$

b. $y'' = -y' + y$ et $u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$.

Ex. 9.23 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (-1)^i \binom{j}{i}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n \\ i \texttt{ pair}}} \binom{j}{i}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n \\ i \texttt{ impair}}} \binom{j}{i}$.

Ex. 9.24 [*]***Mines Telecom MP 2018***

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \displaystyle\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède-t-elle une limite ? Peut-on calculer cette limite ?

Ex. 9.25 [*] En remarquant que $\forall x \in [0;1], x^2 \leqslant x$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} |\cos(k)| \geqslant \frac{n}{4}$$

Corrections

Cor. 9.2 : Par définition, α est un majorant de A. Donc A, non vide et majoré, possède une borne supérieure qui est le plus petit de ces majorants, en particulier inférieure ou égale à α. Si $\forall x \in A, x < \alpha$, on a encore $\sup A \le \alpha$. Le même raisonnement que précédemment reste valable.
Attention cependant, il est possible que $\sup A = \alpha$. L'inégalité stricte n'est donc pas vérifiée pour la borne supérieure. Par exemple, si $A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, on a $\forall x \in A, x < 1$, mais $\sup A = 1$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$.

Cor. 9.3 :

- E_n est minoré par 0 et admet donc une borne inférieure. De plus, si $k \ge n+1$, alors $k + \frac{n}{k} > k \ge n+1$. Or pour $k = n$, on a $k + \frac{n}{k} = n+1$.
  Donc la borne inférieure est atteinte pour $k \le n$, c'est-à-dire :
  $\inf E_n = \displaystyle\inf_{1\le k\le n} \left(k + \frac{n}{k}\right)$.
- Étudions la fonction $f(x) = x + \frac{n}{x}$. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 1 - \frac{n}{x^2}$.
  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{n}{x^2} \Leftrightarrow x > \sqrt{n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Donc f passe par un minimum en $x = \sqrt{n}$, valeur pour laquelle $f(x) = f\left(\sqrt{n}\right) = 2\sqrt{n}$.
  Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \ge \sqrt{4n}$.
  Pour qu'il y ait égalité, dans la mesure où $\inf E_n = \displaystyle\inf_{1\le k\le n} \left(k + \frac{n}{k}\right)$ est la borne inférieure d'un ensemble fini et qu'elle est donc atteinte, il faut que le minimum de la fonction f soit atteint c'est-à-dire que n soit un carré.

Cor. 9.14 :

a. Lemme : $\forall x \in]-1;+\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.
En effet, en définissant la fonction $f : x \in]-1;+\infty[\mapsto \ln(1+x) - x$ qui est dérivable et continue sur son intervalle de définition, on a :
$\forall x \in]-1;+\infty[, f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$ qui est du signe de $-x$.
Donc f est croissante sur $]-1;0]$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle passe donc par un maximum en 0 qui vaut $f(0) = \ln(1) = 0$ ce qui achève la démonstration du lemme.
Or $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) = \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \leqslant \dfrac{1}{p}$ (qui appartient bien à $]-1;+\infty[$).
De même $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) = -\ln\left(\frac{p}{p+1}\right) = -\ln\left(\frac{p+1-1}{p+1}\right) = -\ln\left(1+\frac{-1}{p+1}\right)$.
Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) \geqslant -\dfrac{-1}{p+1}$ (car $\dfrac{-1}{p+1} \in]-1;+\infty[$).

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.
Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.
En utilisant le théorème des gendarmes on obtient donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

c. D'après la première question, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \geqslant \sum_{p=1}^{n} \ln(p+1) - \ln(p) = \ln(n+1)$ (télescopage).
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = +\infty$.

Calcul matriciel

I. Ensembles de matrices

Ex. 10.1 Calculer
$$M=-3\begin{pmatrix}5&7&-2\\3&3&-3\\1&2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&3\\2&-5\\1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&4&1\\-2&1&0\end{pmatrix}.$$

Ex. 10.2 Soient $x,y,z\in\mathbb{K}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et

$Y=\begin{pmatrix}5x+2y-z\\x+z\\x-y+3z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

Trouver une matrice A telle que $Y=AX$.

Ex. 10.3 Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Soit $C\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne donné. Quels peuvent être les dimensions d'une matrice X telle que $AX=C$?

b. Montrer que l'équation $AX=C$ de la question précédente possède des solutions si et seulement si les coefficients de C sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique.

c. Résoudre l'équation $AX=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\\3&0\end{pmatrix}$.

Ex. 10.4 Soient $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\8&1&-5\\4&3&-3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&-1\\-5&0&3\end{pmatrix}$.

On note L_1,L_2 et L_3 les trois lignes de A.

a. Quels peuvent être les dimensions d'une matrice X telle que $XB=L_1$?
b. Trouver toutes les solutions de $XB=L_1$.
c. Faire de même pour $XB=L_2$ et $XB=L_3$.
d. Résoudre l'équation $MB=A$ d'inconnue M.

Ex. 10.5 Soient $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$. En écrivant $A=I_3+J$, calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}$ puis pour $n\in\mathbb{Z}$.

Ex. 10.6 Soit $x\in\mathbb{R}^*$ et $M=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{x}&\frac{1}{x^2}\\x&0&\frac{1}{x}\\x^2&x&0\end{pmatrix}$.

Calculer M^2 et montrer que M^2 est une combinaison linéaire de I_3 et de M.
En déduire M^n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Ex. 10.7 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Déterminer A^n.

II. Méthode du pivot et calcul matriciel

Ex. 10.8 Soient $A=\begin{pmatrix}1&0&2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $B=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On définit de plus les matrices $P=AB$ et $Q=BA$.

a. Calculer les matrices P et Q.

b. En effectuant le minimum de calculs, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $Q^n = 0_3$.

c. Étant donné une matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on définit la matrice $R = CA$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R^n = \alpha^{n-1} R$$

où α est un réel dont on donnera une expression.

d. Donner un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ne soit ni la matrice nulle, ni la matrice identité et telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M^n = M$$

Ex. 10.9 (Cor.) Discuter suivant les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{K}$ l'inversibilité des matrices suivantes et calculer leur inverse lorsqu'elle existe :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & a+c & b+c \\ ab & ac & bc \end{pmatrix}$$

Généralisation aux dimensions $n > 3$?

Ex. 10.10 Discuter suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{K}$ l'inversibilité de $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

III. Divers

Ex. 10.11 On considère les deux suites u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 6u_n - v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 4v_n \end{cases}$.

a. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b. Montrer que $A = 5I_2 + J$ où $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est à déterminer.

c. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Ex. 10.12 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$ puis pour $k \in \mathbb{Z}$.

Ex. 10.13 Montrer que $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A^{\mathrm{T}}A$ et AA^{T} sont des matrices carrées symétriques.
Peuvent-elles être simultanément inversibles ?
Application numérique : calculer $A^{\mathrm{T}}A$ et AA^{T} pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. L'une de ces deux matrices est-elle inversible ?

Ex. 10.14 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice ***antisymétrique*** et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur colonne.

a. À quel espace de matrices appartient le produit $X^{\mathrm{T}}AX$?

b. Montrer que $X^{\mathrm{T}}AX = 0$.

Cor. 10.9 : En supposant $a \neq b$, $a \neq c$ et $b \neq c$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 1 & b & b^2 & y \\ 1 & c & c^2 & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & y-x \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & z-x \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 0 & 1 & a+b & \frac{y-x}{b-a} \\ 0 & 1 & a+c & \frac{z-x}{c-a} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 0 & 1 & a+b & \frac{y-x}{b-a} \\ 0 & 0 & c-b & \frac{z-x}{c-a} - \frac{y-x}{b-a} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 0 & 1 & a+b & \frac{y-x}{b-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(b-a)(z-x)-(y-x)(c-a)}{(c-a)(b-a)(c-b)} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \frac{x(c-a)(b-a)(c-b)-a^2\big((c-b)x+(a-c)y+(b-a)z\big)}{(c-a)(b-a)(c-b)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(y-x)(c-a)(c-b)-(a+b)\big((c-b)x+(a-c)y+(b-a)z\big)}{(c-a)(b-a)(c-b)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(c-b)x+(a-c)y+(b-a)z}{(c-a)(b-a)(c-b)} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{bc(c-b)x+ac(a-c)y+ab(b-a)z}{(c-a)(b-a)(c-b)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(c+b)(c-b)x+(a+c)(a-c)y+(a+b)(b-a)z}{(c-a)(b-a)(c-b)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(c-b)x+(a-c)y+(b-a)z}{(c-a)(b-a)(c-b)} \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{bc}{(c-a)(b-a)} & \frac{ac}{(b-a)(b-c)} & \frac{ab}{(c-a)(c-b)} \\ \frac{b+c}{(c-a)(b-a)} & \frac{a+c}{(b-a)(b-c)} & \frac{a+b}{(c-a)(c-b)} \\ \frac{1}{(c-a)(b-a)} & \frac{1}{(b-a)(b-c)} & \frac{1}{(c-a)(c-b)} \end{pmatrix}$$

La comparaison entre la matrice A^{-1} et la matrice B permet par ailleurs d'inférer, sans calcul, que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} & \frac{c}{(c-a)(c-b)} & \frac{1}{(c-a)(c-b)} \\ \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} & \frac{b}{(b-a)(b-c)} & \frac{1}{(b-a)(b-c)} \\ \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} & \frac{a}{(a-b)(a-c)} & \frac{1}{(a-b)(a-c)} \end{pmatrix}$$

Maths - Feuille d'exos n° 11

Développements limités

I. Développements limités : calcul

Ex. 11.1 Donner le développement limité à l'ordre 5 des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto e^x$ au voisinage de 1 ;

b. $x \mapsto \cos(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$;

c. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de $\dfrac{1}{2}$.

Ex. 11.2 DL en 0 des expressions suivantes :

1. $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 4
2. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3
3. $\dfrac{\sin(x)}{x}$ à l'ordre 7
4. $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 4
5. $\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$ à l'ordre 2
6. $\operatorname{Arccos}(x)$ à l'ordre 5
7. $e^{\cos x}$ à l'ordre 4
8. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}$ à l'ordre 7

Ex. 11.3 (Cor.)

a. Donner un DL en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

$x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$ $\qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \dfrac{2}{1-x} - 1$

$x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \dfrac{x+1}{1-x}$ $\qquad x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{e^x-1}{x}$

$x \in]-\infty;1[\mapsto -\ln(1-x)$ $\qquad x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

$x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$ $\qquad x \neq \frac{\pi}{2}[\pi] \mapsto \tan(x)$

b. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\sin^2(x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Ex. 11.4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1+x+x^2+x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0)=1$.

a. Vérifier que f possède un $\mathrm{DL}_2(0)$.

b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas $C^1(\mathbb{R})$.

Ex. 11.5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^x = n - x$ admet une unique solution positive que l'on note x_n.
Déterminer un équivalent u_n de x_n puis un équivalent de $x_n - u_n$ lorsque $n \to +\infty$.

Ex. 11.6 Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-\sin x}{\cos x - 1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \operatorname{ch} x - 2}{x^4}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

II. Développements limités : utilisation

Ex. 11.7 Soit f définie sur $]-\pi;\pi[\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

a. Déterminer un $DL_3(0)$ de f.

b. En déduire que f peut être prolongée en 0 en une fonction dérivable.
On note g ce prolongement.

c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Ex. 11.8 ***CCP MP 2019 - n°1***

a. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

b. Déterminer le signe, au voisinage de $+\infty$, de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ex. 11.9 ***D'après CCP MP 2019 - n°46*** On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

a. Prouver que $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

b. Donner la limite, puis un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

Ex. 11.10

a. Prouver que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x = \tan(x)$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $I_n = \left]n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

b. Exprimer $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ en fonction de $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

c. En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où on explicitera a et b.

Ex. 11.11 Asymptote et position par rapport à la courbe en $+\infty$

1. $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ en $\pm\infty$
3. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$
4. $f(x) = (x+1)\operatorname{Arctan}\left(1+\frac{2}{x}\right)$

Méthode : Recollement de solutions d'une EDL1

Lorsqu'une équation différentielle linéaire à l'ordre 1 est de la forme $u(t)y' + v(t)y = w(t)$, on commence par la diviser par $u(t)$ sur des intervalles où $u(t)$ ne s'annule pas pour obtenir une EDL1 de la forme $y' + a(t)y = b(t)$.
Une fois cette équation résolue (avec des constantes différentes sur chaque intervalle où $u(t)$ ne s'annule pas), on cherche à savoir si les solutions peuvent être ***recollées*** aux points où $u(t)$ s'annule pour obtenir des fonctions dérivables (donc continues).
Pour effectuer ce recollement, on utilise les développements limités grâce à la proposition 11.13 du cours sur les développements limités.

Ex. 11.12 Trouver l'ensemble des fonctions $f :]-\infty; 1[\to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in]-\infty; 1[, t(t-1)f'(t) - (t-2)f(t) = 0$.

Ex. 11.13

a. Donner les solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de $(1+t)y' + y = (1+t)\sin t$.

b. Même question pour $x(1-x)y' + y = x - 1$.

Corrections

Cor. 11.3 : Exemple de calcul de la première limite :

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} \underset{x\to0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \underset{x\to0}{o}(1).$$

Remarque importante : ici, par définition, $\epsilon(x) = \underset{x\to0}{o}(1)$ est une fonction vérifiant $\lim\limits_{x\to0} \frac{\epsilon(x)}{1} = 0$.

À retenir : $\underset{x\to0}{o}(1)$ représente une ***expression tendant vers 0 lorsque x tend vers 0***.

D'une manière générale, $\underset{x\to x_0}{o}(1)$ représente une ***expression tendant vers 0 lorsque x tend vers x_0***.

Autrement dit, une fonction est négligeable devant 1 lorsqu'elle tend vers 0 (au voisinage d'un point).

Retour au calcul de limite :

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} \underset{x\to0}{=} -\frac{1}{2} + \underset{x\to0}{o}(1) \text{ donc } \lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Maths - Feuille d'exos n° 12

Espaces vectoriels

I. Définition, sous-espaces vectoriels

Ex. 12.1 (Cor.) On considère $F = \{x + ix, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$.
Montrer que $(F, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Ex. 12.2 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$?

1) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
2) $\left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$
3) $\{f \in E, f(0) = f(1) + 1\}$
4) $\{f \in E, f(0) = 2f(1)\}$
5) $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f'(0) = 0\}$

Ex. 12.3

a. On se place sur $E = \mathbb{R}^3$ et on définit
$F = \text{Vect}\,((1;0;1);(1;1;0))$ et $G = \text{Vect}\,((0;1;1))$.
- Déterminer $F \cap G$.
- Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

b. On se place sur $E_2 = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on définit
$F_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et
$G_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
- Déterminer $F_2 \cap G_2$.
- Montrer que $E_2 = F_2 \oplus G_2$.

Ex. 12.4 Soit $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère le sous-espace vectoriel de E défini par
$H = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$ (voir exercice 12.2).
Trouver un supplémentaire de H dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Ex. 12.5 (Cor.) Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F + G$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.
Montrer que $E = F' \oplus G$.

Ex. 12.6 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E tels que A et B sont supplémentaires dans E et $A \subset C$.
Montrer que A et $B \cap C$ sont supplémentaires dans C.

Ex. 12.7 (Cor.) Soient $\vec{u}_1 = (1;0;0)$, $\vec{u}_2 = (1;1;1)$, $\vec{e}_1 = (3;2;2)$ et $\vec{e}_2 = (0;1;1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $\text{Vect}\,(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \text{Vect}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Ex. 12.8

a. Montrer que $\text{Vect}\,((1;2))$ et $\text{Vect}\,((3;4))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que $\text{Vect}\,(X)$ et $\text{Vect}\,(1 + X^2; X - 3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

II. Applications linéaires

Ex. 12.9

a. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?
$f : (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x - 2y + 3z \in \mathbb{R}$
$g : (x;y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y; 1) \in \mathbb{R}^2$
$h : (x;y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y; x + y) \in \mathbb{R}^2$

b. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires précédentes.

Ex. 12.10 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des formes linéaires sur $\mathcal{F}(\mathbb{R})$?

(1) $f \mapsto f(0)$ (2) $f \mapsto f(1) - 1$ (3) $f \mapsto f''(3)$
(4) $f \mapsto (f'(2))^2$ (5) $f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Ex. 12.11 Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0); P(1)) \end{array} \right.$.
Montrer que ϕ est linéaire, déterminer son noyau et son image.

Ex. 12.12 Soient $n \in \mathbb{N}$ et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $P \mapsto P - P'$. Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\phi^{-1}(Q) = \sum_{k=0}^{\deg Q} Q^{(k)}$.

Ex. 12.13 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, et
$\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl} E \times E & \to & E \times E \\ (x; y) & \mapsto & (x + y; x + f(x + y)) \end{array} \right.$.
Montrer que Φ est un automorphisme de $E \times E$.

Ex. 12.14

a. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
Montrer qu'il existe $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ tels que
$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \phi(x; y) = (ax + by; cx + dy)$.

b. Donner des énoncés similaires pour
- $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$;
- $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$;
- $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Ex. 12.15 Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u : E \to G$, $v : F \to G$ linéaires tels que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} v$.

a. Montrer que si v est injective alors il existe une application linéaire $w : E \to F$ telle que $u = v \circ w$.

b. Montrer que si il existe un sous-espace vectoriel A de F tel que $\operatorname{Ker} v \oplus A = F$, alors il existe une application linéaire $w : E \to F$ telle que $u = v \circ w$.

Ex. 12.16 (Cor.) E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $F = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u$.

III. Applications linéaires particulières

Ex. 12.17 Montrer que $s : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \mapsto & (x - 2y; -y) \end{array} \right.$ est une symétrie de $\mathbb{R}^2$.
Préciser alors les espaces F et G tels que s soit la symétrie autour de F parallèlement à G.

Ex. 12.18 On se place sur $E = \mathbb{R}^3$.
$F = \operatorname{Vect}((1; 0; 1); (1; 1; 0))$ et $G = \operatorname{Vect}((0; 1; 1))$ de sorte à ce que $E = F \oplus G$ (cf. exercice 12.3).
Déterminer l'expression de la symétrie autour de F parallèlement à G.

Ex. 12.19 Donner l'expression de la projection sur $\operatorname{Vect}\big((-1; 1)\big)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}\big((2; 1)\big)$.

Ex. 12.20 Déterminer la nature des applications linéaires suivantes :

a. $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-x; y - 2x) \in \mathbb{R}^2$

b. $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\frac{x-y}{2}; \frac{y-x}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$

Ex. 12.21 Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $f : M \in E \mapsto M^{\mathrm{T}} \in E$ et $g : M \in E \mapsto \dfrac{M - M^{\mathrm{T}}}{2}$.

a. Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.

b. Donner la nature géométrique de f et g.
On précisera notamment les sous-espaces caractéristiques des deux applications.

Ex. 12.22 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $g \circ f$ est un projecteur et déterminer la décomposition de E associée (voir exercice 12.16...).

Ex. 12.23 (Cor.) Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E.

a. Montrer que $p+q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

b. Montrer qu'on a alors $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$.

Corrections

Cor. 12.1 : En considérant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $F = \text{Vect}(1+i)$ est donc un sous-espace vectoriel donc un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$).
En considérant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, le vecteur $1+i$ par exemple est un vecteur de F mais $i(1+i) = -1+i \notin F$: donc F n'est pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Cor. 12.5 : F' est le supplémentaire de $F \cap G$ (qui est un s.e.v. de $(E,+,.)$) dans F. Donc $F = F' \oplus (F \cap G)$.
Nous devons démontrer que $F' \cap G = \{0\}$ et $F' + G = E$.

- Soit $x \in F' \cap G$. $x \in F' \Rightarrow x \in F$ et $x \in G \Rightarrow x \in F \cap G$. Donc $x \in F'$ et $x \in (F \cap G)$ donc $x = 0$.
  Donc $F' \cap G = \{0\}$.
- Soit $x \in E$. $E = F + G$ donc $\exists (u,v) \in F \times G$, $x = u + v$.
  $u \in F$ et $F = F' \oplus (F \cap G)$ donc $\exists (u_1, u_2) \in F' \times (F \cap G)$ tels que $u = u_1 + u_2$.
  Donc $x = u_1 + u_2 + v$ avec $u_1 \in F'$ et $u_2 + v \in G$ (car G est un e.v.).
  Donc $E = F' + G$.

Finalement on a démontré que $E = F' \oplus G$.

Cor. 12.7 : Notons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Démontrons que $F = G$ par double inclusion :

- $F \subset G$: soit $u = \lambda u_1 + \mu u_2 \in F$. Montrons que $u \in G$, c'est-à-dire montrons qu'il existe $(x;y) \in G$ tels que $u = xe_1 + ye_2$. Cherchons donc $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\lambda(1;0;0) + \mu(1;1;1) = x(3;2;2) + y(0;1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3x \\ \mu = 2x + y \\ \mu = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\lambda + \mu}{3} \\ y = \dfrac{\mu - 2\lambda}{3} \end{cases}$$
  Donc tout vecteur de F est un vecteur de G : $F \subset G$.
- $G \subset F$: soit $e = xe_1 + ye_2 \in G$, montrons qu'il existe $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $e = \lambda u_1 + \mu u_2$. Cherchons donc $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\lambda(1;0;0) + \mu(1;1;1) = x(3;2;2) + y(0;1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3x \\ \mu = 2x + y \\ \mu = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - y \\ \mu = 2x + y \end{cases}$$
  Donc tout vecteur de G est un vecteur de F : $G \subset F$.
  Comme $F \subset G$ et $G \subset F$, on conclut que $F = G$.

Cor. 12.16 : Nous devons démontrer que $\text{Ker}\, v \cap \text{Im}\, u = \{0\}$ et $\text{Ker}\, v + \text{Im}\, u = F$.

- Soit $y \in \text{Ker}\, v \cap \text{Im}\, u$. $y \in \text{Ker}\, v$ donc $v(y) = 0$. Or $y \in \text{Im}\, u$, donc $\exists x \in E, y = u(x)$.
  On a alors, $v \circ u(x) = v(y) = 0 = x$ car $v \circ u = \text{Id}_E$. Donc $y = u(0) = 0$.
  On a démontré que $\text{Ker}\, v \cap \text{Im}\, u = \{0\}$.
- Soit $y \in F$. Soit $y_1 = u(v(y)) = u \circ v(y)$.
  ATTENTION : on sait que $v \circ u = \text{Id}_E$ mais on ne sait rien sur $u \circ v$. En particulier, il est tout à fait possible que $y_1 \neq y$.
  Posons de plus, $y_2 = y - y_1$ de sorte à ce que $y = y_1 + y_2$.
  Par définition, $y_1 = u(v(y)) \in \text{Im}\, u$. De plus, comme $v \circ u = \text{Id}_E$
  $v(y_2) = v(y - y_1) = v(y) - v(y_1) = v(y) - v \circ u \circ v(y) = v(y) - v(y) = 0$
  Donc $y_2 \in \text{Ker}\, v$.
  On a démontré que $\text{Ker}\, v + \text{Im}\, u = F$.

Finalement, $F = \text{Ker}\, v \oplus \text{Im}\, u$.

Cor. 12.23 :

a. $p + q$ est un projecteur si et seulement si $(p+q) \circ (p+q) = p + q$.
Or $(p+q) \circ (p+q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p + q + p \circ q + q \circ p$.
Donc $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = -q \circ p$.
Sens direct : on compose à gauche par p :
$p \circ q = -q \circ p \Rightarrow p \circ p \circ q = p \circ q = -p \circ q \circ p = -(-q \circ p) \circ p = q \circ p$.
Or $p \circ q = -q \circ p = q \circ p \Rightarrow q \circ p = 0 = p \circ q$.
Réciproquement : $p \circ q = q \circ p = 0 \Rightarrow p \circ q = 0 = -0 = -q \circ p$.
On a donc bien $p + q$ est un projecteur de $E \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0$.

b. Soit $x \in \text{Ker}(p+q)$. Alors $p(x) + q(x) = 0$ donc $p(x) = -q(x)$. On compose par p :
$p \circ p(x) = p(x) = -p \circ q(x) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}\, p$.
De même en composant par q :
$q \circ p(x) = 0 = -q \circ q(x) = -q(x)$. Donc $x \in \text{Ker}\, q$.
Donc $x \in \text{Ker}(p+q) \Rightarrow x \in \text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q$.
Réciproquement, de façon évidente, si $x \in \text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q$, alors $(p+q)(x) =$

$p(x) + q(x) = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.

Continuité

I. Fonctions : généralités, limites, équivalents

Ex. 13.1 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.
Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R} \to]-1;1[$ et exprimer $f^{-1}(y)$ pour $y \in]-1;1[$.

Ex. 13.2 [∗] Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0 et f bijective et impaire de I dans $J \subset \mathbb{R}$. Montrer que f^{-1} est impaire.

Ex. 13.3 Déterminer les limites suivantes

a. $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$ en $+\infty$ pour $a, b \in \mathbb{R}$

b. $\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ en 0

c. $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0

d. $\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$ en $+\infty$

Ex. 13.4 Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)x$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)x$

Ex. 13.5 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}+\dfrac{\pi}{6}\right)$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe-t-elle ? Si oui, quelle est sa valeur ?

Ex. 13.6 Soit $a > 0$, $a \neq 1$.
Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $f(x) = (a+x)^a - a^{a+x}$.

Ex. 13.7 (Cor.) Donner un équivalent simple des expressions suivantes :

- $f(x) = x^x - \sin(x)^{\sin(x)}$ au voisinage de 0^+ ;
- $g(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Ex. 13.8

a. Montrer que l'équation $x = \lfloor x\rfloor + \dfrac{1}{x}$ admet une unique racine sur l'intervalle $[n;n+1[$ pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $x_n \in [n;n+1[$ cette racine.

b. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ puis trouver un équivalent u_n de $x_n - n$ au voisinage de $+\infty$.

c. Trouver un équivalent de $x_n - n - u_n$ au voisinage de $+\infty$.

Ex. 13.9 Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et toutes les asymptotes à leurs représentations graphiques :

- $f(x) = \ln(1+3e^x)$;
- $g(x) = \sqrt{x^2-x-1}$;
- $h(x) = \dfrac{x^3}{x^2+x}$;
- $k(x) = \ln(\mathrm{sh}(x))$;
- $l(x) = \ln(\mathrm{ch}(x))$.

II. Continuité

Ex. 13.10 Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ la fonction
$\begin{cases} x \neq 0 & \mapsto & ax\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \\ 0 & \mapsto & a^2 \end{cases}$ est-elle continue en 0 ?

Ex. 13.11 Étudier la définition et la continuité des fonctions suivantes :

(1) $x \overset{f}{\mapsto} \sqrt{|x-1|}$

(2) $x \overset{g}{\mapsto} \lfloor x\rfloor$

(3) $x \overset{h}{\mapsto} \lfloor x\rfloor + (x-\lfloor x\rfloor)^2$

(4) $\begin{cases} x \neq 0 & \overset{k}{\mapsto} & k(x) = \frac{|x|}{x} \\ 0 & \mapsto & k(0) = 0 \end{cases}$

Ex. 13.12 La fonction $x \neq 0 \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Étudier cette fonction (ou son prolongement par continuité s'il existe) et tracer sa représentation graphique.

III. Théorème des valeurs intermédiaires

Ex. 13.13 Montrer que l'équation $x^2\cos(x)+x\sin(x)+1=0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Ex. 13.14 Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Ex. 13.15 Soit a et b deux réels strictement positifs, $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(0)\neq f(1)$.
Montrer qu'il existe $c\in]0;1[$ tel que $af(0)+bf(1)=(a+b)f(c)$.

Ex. 13.16 [**Problème du moine**]Un moine part de son monastère à $7h00$ du matin et se rend au sommet du Mont Sinaï. Il y arrive à midi. Il passe la nuit sur place, puis le lendemain repart du sommet à $7h00$, suit exactement le même chemin que la veille et arrive au monastère à midi.
Existe-t-il un endroit se situant sur son chemin où il serait passé à la même heure à l'aller et au retour ?

Ex. 13.17 [**Problème du cycliste**]Un cycliste parcourt 20km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il a effectué exactement 10km.

Ex. 13.18 [**] Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y)$.
On note $\alpha=f(1)$.
Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\alpha x$.

Ex. 13.19 [**] Refaire l'exercice 13.18 en ne supposant plus que la continuité de f en 0.

Ex. 13.20 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0;1]$ telles que $f<g$.
Montrer qu'il existe $m\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x\in[0;1], f(x)+m\leq g(x)$.

IV. Divers

Ex. 13.21 Soit f définie par $f(x)=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

a. Domaine de définition de f ?
b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$.
c. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Ex. 13.22 (Cor.) Soient $r\in\mathbb{R}_+^*$, $f:x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto\dfrac{x+\frac{r}{x}}{2}$ et u la suite définie par $\begin{cases}u_0&=1\\u_{n+1}&=f(u_n)\end{cases}$.

a. Montrer que $\left[\sqrt{r};+\infty\right[$ est stable par f et en déduire que la suite u est bien définie et que $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\geqslant\sqrt{r}$.
b. Montrer que $g:x\mapsto f(x)-x$ est négative sur $\left[\sqrt{r};+\infty\right[$.
c. En déduire que u est décroissante à partir du rang 1 et que u converge.
d. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
e. Donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-6} près de $\sqrt{2}$.

V. Correction

Cor. 13.7 :

a. $x^x=e^{x\ln(x)}=1+x\ln(x)+\dfrac{x^2\ln^2(x)}{2}+\dfrac{x^3\ln^3(x)}{6}+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)$ car $x\ln(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ d'une part, et car le terme suivant $\dfrac{x^4\ln^4(x)}{24}$ est négligeable devant x^3 au voisinage de 0.
De même, comme $\sin(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$,

$$\sin(x)^{\sin(x)}=1+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\ln\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2\ln^2\left(x-\frac{x^3}{6}\right)}{2}+$$

$$\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3\ln^3\left(x-\frac{x^3}{6}\right)}{6}+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

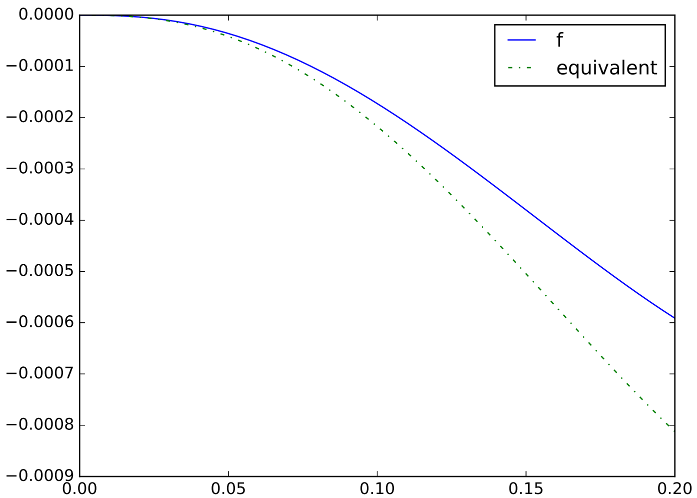
Or $\ln\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)=\ln(x)-\dfrac{x^2}{6}+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)$, donc :

$$\sin(x)^{\sin(x)} = 1+\underbrace{\left[x\ln(x)-\frac{x^3\ln(x)}{6}-\frac{x^3}{6}\right]}_{\text{issu du terme }\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\ln\left(x-\frac{x^3}{6}\right)}+\frac{x^2\ln^2(x)}{2}+\frac{x^3\ln^3(x)}{6}+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit que :

$x^x-\sin(x)^{\sin(x)}=\dfrac{x^3\ln(x)}{6}+\dfrac{x^3}{6}+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)$.

Donc $x^x-\sin(x)^{\sin(x)}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{x^3\ln(x)}{6}$



Cor. 13.22 :

a. f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

$\forall x>0, f'(x)=\dfrac{1-\frac{r}{x^2}}{2}=\dfrac{x^2-r}{2x^2}$.

Donc $f'(x)>0\Leftrightarrow x^2>r\Leftrightarrow(x>\sqrt{r}\ \text{ ou }\ x<-\sqrt{r})$.

Sur $]0;\sqrt{r}]$, f est donc décroissante et f est croissante sur $[\sqrt{r};+\infty[$.

Or $f(\sqrt{r})=\sqrt{r}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et f est continue, donc

$$f\left([\sqrt{r};+\infty[\right)=[\sqrt{r};+\infty[$$

De plus f passe par son minimum (sur $\mathbb{R}_+^*$) $\sqrt{r}$ en $\sqrt{r}$. Donc $\forall x>0, f(x)\geqslant\sqrt{r}$.

Donc $u_1=f(u_0)\geqslant\sqrt{r}$, et $[\sqrt{r};+\infty[$ est stable par f, donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\geqslant\sqrt{r}$.

b. Soit $g:x\mapsto f(x)-x$.

$\forall x>0, g(x)=\dfrac{\frac{r}{x}-x}{2}=\dfrac{r-x^2}{2x}$ est négatif sur $[\sqrt{r};+\infty[$.

c. $g(u_n)=f(u_n)-u_n=u_{n+1}-u_n$.

Or pour $n\geqslant1$, $u_n\in[\sqrt{r};+\infty[$ donc $g(u_n)\leqslant0$.

Donc u est décroissante à partir du rang 1.

De plus $\forall n\geqslant1, u_n\geqslant\sqrt{r}$: u est décroissante et minorée à partir du rang 1, donc elle converge.

d. Soit $l=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

f est continue, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=f(l)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$.

Donc $f(l)=l$: l est un point fixe de f.

Or l'équation $f(x)=x\Leftrightarrow x^2=r$ possède une unique solution positive, c'est $\sqrt{r}$.

Donc $l=\sqrt{r}$.

e. Pour donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-6} près de $\sqrt{2}$, on calcule les termes de u - qui sont rationnels - jusqu'à obtenir une approximation suffisante.

$u_1=\dfrac{3}{2}$.

$u_2=\dfrac{17}{12}$.

$u_3=\dfrac{577}{408}$ qui est déjà une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ à 2.10^{-6} près.

$u_4=\dfrac{665857}{470832}$ est une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ qui convient puisqu'elle est non seulement valable à 10^{-6} près, mais en fait approxime $\sqrt{2}$ à 10^{-11} près.

Polynômes

I. Structure d'espace vectoriel, exemples

Ex. 14.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soit $P_1 = 1$, $P_2 = X - \alpha$ et $P_3 = (X-\alpha)^2$.
Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3)$.

Ex. 14.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, tous deux à deux distincts.
Soit $P_1 = (X-\alpha)(X-\beta)$, $P_2 = (X-\alpha)(X-\gamma)$ et $P_3 = (X-\beta)(X-\gamma)$.
Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3)$.
Ce résultat reste-t-il valable si au moins deux des trois réels α, β, γ sont égaux ?

Ex. 14.3 On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = X \quad , \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Les polynômes P_n sont appelés **Polynômes de Tchebychev**.

a. Calculer les polynômes P_2, P_3, P_4.
b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, le polynôme P_n est bien défini, qu'il est de degré n et que son coefficient dominant est 2^{n-1}.
c. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \;,\; \forall x \in \mathbb{R} \;,\; \cos(nx) = P_n(\cos x)$
d. En déduire que le polynôme P_n admet n racines simples distinctes qui sont :

$$\alpha_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \qquad \text{avec} \qquad k \in [\![0, n-1]\!]$$

En déduire que le polynôme P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et donner sa factorisation.

Ex. 14.4 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.
On note ϕ l'application définie sur E par $\phi(P) = X^3 P\left(\frac{1}{X}\right)$.

a. Montrer que $\forall P \in E, \phi(P) \in E$.
b. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
c. Montrer que ϕ est une symétrie.
d. Donner les sous-espaces caractéristiques de ϕ.

II. Division euclidienne, racines

Ex. 14.5 À quelle condition le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Ex. 14.6 Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^3 + 7X^2 - 2$ par $B(X) = X^2 + X + 1$. En déduire les éventuelles asymptotes de $x \mapsto f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

Ex. 14.7 Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $(a; b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$. Exprimer en fonction de $P(a)$ et de $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
Cette formule reste-t-elle valable si $a = b$?

Ex. 14.8 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont les restes dans la division euclidienne par $(X-1)$, $(X-2)$ et $(X-3)$ sont respectivement 3, 7 et 13.
Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.

a. Déterminer les valeurs de $R(1)$, $R(2)$ et $R(3)$.
b. En déduire l'expression de $R(X)$.

Ex. 14.9 (Cor.) Déterminer les polynômes P dont le reste dans la division euclidienne par $(X-1)^3$ est 11 et le reste dans la division euclidienne par $(X+1)^3$ soit -5.

Ex. 14.10 $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est divisible par B pour :

- $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = X - 1$;
- $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$;
- $A = \cos\left((n-1)\theta\right) X^{n+1} - \cos(n\theta)X^n - \cos\theta X + 1$ et $B = X^2 - 2\cos\theta X + 1$.

Ex. 14.11 Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Ex. 14.12 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0)^2 + P(1)^2 + P(8)^2 + P(15)^2 = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

Ex. 14.13 Montrer que $\forall (m;n;p;q) \in \mathbb{N}^4$, $X^3 + X^2 + X + 1$ divise $X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$.

Ex. 14.14 (Cor.) Déterminer $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ de sorte à ce que $P = X^6 - 5X^4 + aX^2 + bX + c$ admette une racine d'ordre 4 dans $\mathbb{R}$.

Ex. 14.15 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
Indication : en posant $Q = P - X$, on a $P = Q + X$...

III. Factorisation, relations coefficients/racines

Ex. 14.16

a. Développer $(X-a)(X-b)(X-c)$.

b. Montrer que pour tout $(a;b;c) \in \mathbb{C}^3$,
$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc$.

c. Résoudre les systèmes suivants en considérant les inconnues réelles, puis en les considérant complexes :

$$(S_1)\begin{cases} x+y &= 1 \\ x^2+y^2 &= 13 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+y+z &= -2 \\ x^2+y^2+z^2 &= 0 \\ x^3+y^3+z^3 &= 1 \end{cases}$$

Ex. 14.17 (Cor.) Factoriser $P = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Ex. 14.18 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:
$P = X^4 - 1 \qquad Q = X^4 - 3X^2 - 4 \qquad R = X^5 - 1$

Ex. 14.19 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:
$P = 16X^4 - 32X^3 + 24X^2 - 8X + 1 \qquad Q = X^4 + 18X^2 + 81$

Ex. 14.20 (Cor.) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Ex. 14.21 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Déterminer les racines de $P = (X+1)^n - e^{2in\alpha}$.

b. En déduire la valeur de $T_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right)$

Ex. 14.22 ***Centrale MP 1999*** Soit $P = nX^{n+1} - (n+1)aX^n + a^{n+1}$ où $a \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 2$.
Montrer que $(X-a)^2$ divise P et calculer le quotient de P par $(X-a)^2$.

Ex. 14.23 ***CCP PC 1998*** Quel est le reste de la division de $(X^n+1)^2$ par $(X+1)^2$?

Corrections

Cor. 14.9 : Si le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^m$ est R alors $P^{(k)}(a) = R^{(k)}(a)$ pour tout $k \in [\![0;m-1]\!]$.
Appliquée aux deux hypothèses de départ et à une division de P par $(X+1)^3(X-1)^3 = (X^2-1)^3$, cette propriété nous permet d'obtenir directement le résultat demandé.
Écrivons $P = (X^2-1)^3Q + aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$. Les hypothèses de l'énoncé se réécrivent

$$\begin{cases} P(1) = 11 &= a+b+c+d+e+f \\ P'(1) = 0 &= 5a+4b+3c+2d+e \\ P''(1) = 0 &= 20a+12b+6c+2d \\ P(-1) = -5 &= -a+b-c+d-e+f \\ P'(-1) = 0 &= 5a-4b+3c-2d+e \\ P''(-1) = 0 &= -20a+12b-6c+2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+d+f &= 3 \\ a+c+e &= 8 \\ 5a+3c+e &= 0 \\ 2b+d &= 0 \\ 6b+d &= 0 \\ 10a+3c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} f & = & 3 \\ a+c+e & = & 8 \\ 2a+c & = & -4 \\ b & = & 0 \\ d & = & 0 \\ 10a+3c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f & = & 3 \\ e & = & 15 \\ a & = & 3 \\ b & = & 0 \\ d & = & 0 \\ c & = & -10 \end{array}\right.$$

Donc $P = (X^2-1)^3 Q + 3X^5 - 10X^3 + 15X + 3$ où Q est un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$.

Cor. 14.14 : P admet une racine $r \in \mathbb{R}$ d'ordre 4 si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(r) & = & 0 \\ P'(r) & = & 0 \\ P''(r) & = & 0 \\ P'''(r) & = & 0 \\ P^{(4)}(r) & \neq & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} r^6-5r^4+ar^2+br+c & = & 0 \\ 6r^5-20r^3+2ar+b & = & 0 \\ 30r^4-60r^2+2a & = & 0 \\ 120r^3-120r & = & 0 \\ 3r^2-1 & \neq & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} r^6-5r^4+ar^2+br+c & = & 0 \\ 6r^5-20r^3+2ar+b & = & 0 \\ 30r^4-60r^2+2a & = & 0 \\ r(r-1)(r+1) & = & 0 \\ r & \neq & \frac{\pm\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Il y a donc 3 racines possibles : $r=0$, $r=1$ ou $r=-1$.
Si $r=0$, $a=b=c=0$.
Si $r=1$, $a=15$, $b=-16$ et $c=5$.
Si $r=-1$, $a=15$, $b=16$ et $c=5$.

Cor. 14.17 : $P = 8X^3-12X^2-2X+3$ possède 3 racines dans $\mathbb{C}$ qui sont, par hypothèse, en progression arithmétique.
Donc, il existe $r \in \mathbb{C}$ tel que les trois racines puissent s'écrire x_0, $x_1 = x_0 + r$ et $x_2 = x_1 + r = x_0 + 2r$.
L'idée est d'utiliser le théorème de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ pour obtenir un système vérifié par x_0 et r.
Ou de manière équivalente par x_1 et r : ce second système est beaucoup plus facile à résoudre que le premier.
Plus précisément :
$P = 8X^3-12X^2-2X+3 = 8(X-x_1+r)(X-x_1)(X-x_1-r)$
Donc $P = 8X^3 + 8X^2(-3x_1) + 8X\left(3x_1^2 - r^2\right) - 8\left(x_1^3 - r^2x_1\right)$.
On en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ 8\left(3x_1^2-r^2\right) & = & -2 \\ 8\left(x_1^3-r^2x_1\right) & = & -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ r^2 & = & 1 \end{array}\right. \text{ en remplaçant } x_1 \text{ par sa valeur...}$$

Donc $r = \pm 1$, ce qui donne (dans les deux cas) $x_0 = \dfrac{-1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3}{2}$ en classant les racines par ordre croissant.

Cor. 14.20 : $P \in \mathbb{C}[X]$ donc P est scindé. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de multiplicité $m > 0$ c'est-à-dire a telle que $P = (X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$.
$P' = m(X-a)^{m-1}Q + (X-a)^m Q'$ divise P si et seulement si $mQ + (X-a)Q'$ divise $(X-a)Q$. Or, pour $X = a$, on a $mQ(a) + (a-a)Q'(a) = mQ(a) \neq 0$ et $(a-a)Q(a) = 0$ donc le quotient s'annule en a. De plus, les termes dominants de mQ et $(X-a)Q'$ ne s'annulent pas donc le quotient est de degré 1.
Le quotient de $(X-a)Q$ par $mQ + (X-a)Q'$ est donc de la forme $k(X-a)$ avec $k \in \mathbb{C}^*$.
On a donc $(X-a)Q = k(X-a)(mQ + (X-a)Q') \Leftrightarrow (1-km)(X-a)Q = k(X-a)^2Q' \Leftrightarrow (1-km)Q = k(X-a)Q'$ et comme $Q(a) \neq 0$, la seule possibilité est $Q' = 0$, $k = \frac{1}{m}$.

Donc les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P sont les polynômes de la forme $P = q(X-a)^m$, avec $a, q \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}^*$.
Remarque : si P est un polynôme constant, $P' = 0$ ne divise pas P sauf si $P = 0$. Ce cas est pris en compte dans le résultat donné puisqu'on interdit $m = 0$ (polynômes constants non nuls) mais qu'on autorise $q = 0$ (polynôme nul).

Maths - Feuille d'exos n° 15

Dimension des espaces vectoriels

I. Rappels

Ex. 15.1 On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles et l'ensemble F des suites réelles convergeant vers 0. Montrer que $(F, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de E.
Est-ce aussi le cas des suites réelles convergeant vers 1 ?

Ex. 15.2 (Cor.) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à n lignes et n colonnes et $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques à n lignes et n colonnes.

a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Montrer que $E = F \oplus G$.
F et G étant supplémentaires dans E, on peut définir
- la projection p_F sur F parallèlement à G ;
- la projection p_G sur G parallèlement à F ;
- la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

c. Soit $M \in E$ une matrice quelconque. Exprimer $p_F(M), p_G(M)$ et $s(M)$ à l'aide de M et M^{T}.

d. Dans cette question, on suppose que $n = 3$.
Résoudre l'équation $P_F(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

II. Familles

Ex. 15.3 Exhiber une famille génératrice des sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = 2y\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + 2z = y - 3t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.
Sont-ils supplémentaires ?

Ex. 15.4 (Cor.) Soient $\vec{u}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; 1)$, $\vec{e}_1 = (3; 2; 2)$ et $\vec{e}_2 = (0; 1; 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Ex. 15.5 Déterminer dans chaque cas si les familles sont libres ou non :
- dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = \big((9; -3; 7); (1; 8; 8); (5; -5; 1)\big)$;
- dans $\mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel,
  $\mathcal{G} = \big((1 + i; i); (1 - i; 1)\big)$.

Ex. 15.6 Montrer que les fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ $x \mapsto 1$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont linéairement indépendantes (c'est-à-dire qu'elles forment une famille libre).

Ex. 15.7 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{e}_1 = (0; 1; 1)$, $\vec{e}_2 = (2; 0; -1)$ et $\vec{e}_3 = (2; 1; 1)$.

a. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Quelles sont les coordonnées dans cette base de $\vec{u} = (4; -1; 1)$?

c. Quelles sont les coordonnées dans cette base de $\vec{v} = (x, y, z)$?

Ex. 15.8 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer que les polynômes $P_1 = 1$, $P_2 = X - \alpha$ et $P_3 = (X - \alpha)^2$ forment une base de E.

Ex. 15.9 Justifier que $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y = 3z + 2t\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Ex. 15.10 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in E, m_{1,1} + m_{1,2} + m_{2,1} + m_{2,2} = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

III. Espaces vectoriels de dimension finie

Ex. 15.11 (Cor.) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.
On note F l'ensemble des fonctions de E qui sont bornées, G l'en-

semble des fonctions de E qui sont monotones et H l'ensemble des combinaisons linéaires des trois fonctions ch, sh, exp.

a. Examiner si F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Quelle est la dimension de H ?

Ex. 15.12 Après avoir démontré que c'est une famille libre, compléter $(X^2; (X+1)^2)$ en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Ex. 15.13 (Cor.)

a. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = \big((i; 1+i); (-1; -1+i); (2-i; 1-3i)\big)$.

b. Dans $\mathbb{R}^2$, étant donné $m \in \mathbb{R}$, déterminer le rang de la famille $\mathcal{G} = \big((m-1; 1); (-2; m-4)\big)$.

Ex. 15.14 On considère l'équation différentielle

$$(E) : (x-1)^3 y' - 2y = 0$$

a. Résoudre (E) sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

b. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2 dont on donnera une base.

Ex. 15.15 On considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ (avec $p \leqslant n$, $q \leqslant n$).

a. Rappeler la formule de Grassmann.

b. Montrer que $\max(p; q) \leqslant \dim(F+G) \leqslant \min(n; p+q)$.

c. Montrer que $\max(p+q-n; 0) \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant \min(p; q)$.

IV. Applications linéaires en dimension finie

Ex. 15.16 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes de E et déterminer leur noyau et leur image :
(1) $P \mapsto X.P'$ (2) $P \mapsto P - P'$ (3) $P \mapsto P(X+1) - P(X)$

Ex. 15.17 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 de vecteurs de base $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par $\begin{cases} f(\vec{\imath}) &= 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) &= 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} \end{cases}$.

Déterminer $f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$, le noyau et l'image de f.

Ex. 15.18 (Cor.) Soit
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) & \mapsto (x+2y+3z; 4x+5y+6z; 7x+8y+9z) \end{cases}$.

a. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

b. En déduire $\operatorname{rg} f$.

c. Déterminer $\operatorname{Im} f$.

Ex. 15.19 Soient $n \in \mathbb{N}$ et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$P \mapsto (X+1)P'$$

Montrer que ϕ est linéaire et préciser une base de son image et de son noyau.

Ex. 15.20 Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto (P(0); P(1)) \end{cases}$.
Montrer que ϕ est linéaire, déterminer son noyau et son image.

Ex. 15.21 **Extrait d'oral Centrale PSI**
Soient $p : x \mapsto e^x \cos x$, $q : x \mapsto e^x \sin x$, $r : x \mapsto e^{-x} \cos x$ et $s : x \mapsto e^{-x} \sin x$.
On considère $E = \operatorname{Vect}(p, q, r, s)$ et $D : \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto D(f) = f' \end{cases}$.

- Montrer que D est une application linéaire.
- Déterminer le noyau et l'image de D.
  D est-elle injective ? surjective ?
- Montrer que la restriction de D à E est un endomorphisme.
- Quels sont le noyau et l'image de $D_{|E}$? Est-elle bijective ?
- Obtenir l'ensemble des primitives de p, q, r et s.
- Résoudre $y'' - y = e^x \sin(x) + 2e^{-x} \cos(x)$.

Ex. 15.22 Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,G)$.
Le but de cet exercice est de montrer que

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v) \Longleftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F,G), v = w \circ u.$$

a. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

b. On suppose que $\dim E = n$, $\dim \mathrm{Ker}(u) = n-p$ et $\dim F = r$.

i. Justifier l'existence d'une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E telle que $(e_{p+1}, ..., e_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
Quelle est alors la dimension de $\mathrm{Im}(u)$?

ii. Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

iii. On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ soit une base de F.
On définit alors $w \in \mathcal{L}(F,G)$ par

$$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si} \quad 1 \leq i \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que, si $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$, alors $v = w \circ u$.

Corrections

Cor. 15.2 :

a. F et G sont bien inclus dans E. La matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique.
Enfin, étant donnés $A, B \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$\lambda A + \mu B^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} + \mu B^{\mathrm{T}} = \lambda A + \mu B$, qui est donc symétrique - par caractérisation à l'aide de la transposition.
On fait de même pour G.

b. Par analyse-synthèse : on souhaite montrer que $\forall M \in E \exists ! S \in F, \exists A \in G, M = S + A$ (définition de deux espaces supplémentaires)
Analyse : supposons que S et A existent, alors
$M^{\mathrm{T}} = S^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}} = S - A$
et $M = S + A$
Donc $S = \dfrac{M + M^{\mathrm{T}}}{2}$ et $A = \dfrac{M - M^{\mathrm{T}}}{2}$.
Donc si S et A existent, alors elles sont uniques.
Synthèse : En reprenant les deux expressions obtenues ci-dessus, on montre que $M = S + A$, S est symétrique et A antisymétrique.
F et G étant supplémentaires dans E, on peut définir
- la projection p_F sur F parallèlement à G ;
- la projection p_G sur G parallèlement à F ;
- la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

c. $p_F(M) = \dfrac{M + M^{\mathrm{T}}}{2}, p_G(M) = \dfrac{M - M^{\mathrm{T}}}{2}$ et $s(M) = M^{\mathrm{T}}$ d'après la question précédente.
En particulier, nous venons de montrer que la transposition est la symétrie par rapport à l'espace vectoriel matrices symétriques, parallèlement à l'espace vectoriel des matrices antisymétriques.

d. On cherche les matrices $M \in E$, telles que $P_F(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ que nous noterons S.
Par définition de p_F, on a donc $M = S + A$ où A est antisymétrique. Donc les solutions de cette équation sont les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2+x & 3+y \\ 2-x & 4 & 5+z \\ 3-y & 5-z & 6 \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Cor. 15.4 : Notons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Démontrons que $F = G$ par double inclusion :

- $F \subset G$: soit $u = \lambda u_1 + \mu u_2 \in F$. Montrons que $u \in G$, c'est-à-dire montrons qu'il existe $(x;y) \in G$ tels que $u = xe_1 + ye_2$. Cherchons donc $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1;0;0) + \mu(1;1;1) = x(3;2;2) + y(0;1;1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu & = & 3x \\ \mu & = & 2x + y \\ \mu & = & 2x + y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = & \dfrac{\lambda + \mu}{3} \\ y & = & \dfrac{\mu - 2\lambda}{3} \end{cases}$$

Donc tout vecteur de F est un vecteur de G : $F \subset G$.

- $G \subset F$
  1ère méthode : en utilisant les dimensions.
  On vérifie facilement que les familles (u_1, u_2) et (e_1, e_2) sont libres - les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\dim F = \dim G = 2$. ***Or*** $F \subset G$ ***donc*** F ***est un sous-espace vectoriel de*** G. Et comme leurs dimensions sont égales, $F = G$.
  2ème méthode : on démontre l'inclusion réciproque.
  Soit $e = xe_1 + ye_2 \in G$, montrons qu'il existe $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $e = \lambda u_1 + \mu u_2$. Cherchons donc $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1;0;0)+\mu(1;1;1) = x(3;2;2)+y(0;1;1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda+\mu & = & 3x \\ \mu & = & 2x+y \\ \mu & = & 2x+y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & x-y \\ \mu & = & 2x+y \end{array}\right.$$

  Donc tout vecteur de G est un vecteur de F : $G \subset F$.
  Comme $F \subset G$ et $G \subset F$, on conclut que $F = G$.

Cor. 15.11 :

a. F est un sous-espace vectoriel de E : l'inclusion est évidente, la fonction nulle est bornée, et toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée.
G ***n'est pas un sous-espace vectoriel de*** E : en effet, $f : x \mapsto x^3$ est croissante donc monotone, $g : x \mapsto x$ aussi mais $f-g : x \mapsto x^3 - x$ n'est pas monotone puisque sa dérivée $f'-g' : x \mapsto 3x^2-1$ est négative en 0 et positive en 1.
$H = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \exp\big)$ donc est un sous-espace vectoriel de E.

b. La famille (sh) est libre car composée d'un unique vecteur non nul.
La famille (sh; ch) est libre aussi : en effet, cherchons λ, μ tels que $\lambda\,\mathrm{sh} + \mu\,\mathrm{ch} = 0$.
Alors, évalué en $x = 0$, on a $\mu = 0$.
Et en $x = 1$, on obtient $\lambda = 0$. La famille est donc bien libre.
Enfin $\exp = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$ donc la famille $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \exp)$ est liée.
Donc $\dim H = 2$.

Cor. 15.13 :

a. $(i;1+i) \neq (0;0)$ donc $\big((i;1+i)\big)$ est une famille libre.
Or $(-1;-1+i) = i(i;1+i)$ donc $(i;1+i)$ et $(-1;-1+i)$ sont colinéaires.
De même, $(2-i;1-3i) = (-1-2i)(i;1+i)$ donc $(i;1+i)$ et $(2-i;1-3i)$ sont colinéaires.
Donc la famille $\mathcal{F} = \big((i;1+i);(-1;-1+i);(2-i;1-3i)\big)$ est de rang 1 dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$.

b. $(m-1;1)$ est non nul quel que soit la valeur de $m \in \mathbb{R}$. Donc la famille $\big((m-1;1)\big)$ est libre.
Cherchons si la famille $\mathcal{G} = \big((m-1;1);(-2;m-4)\big)$ est libre : soit $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$\lambda(m-1;1)+\mu(-2;m-4) = (0;0)$. Ceci équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{llcl} (m-1)\lambda & -2\mu & = & 0 \\ \lambda & +(m-4)\mu & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llcl} & \big[-2-(m-1)(m-4)\big]\mu & = & 0 \\ \lambda & +(m-4)\mu & = & 0 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow L_1-(m-1)L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llcl} & \big[-m^2+5m-6\big]\mu & = & 0 \\ \lambda & +(m-4)\mu & = & 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que :
- si $-m^2+5m-6 = 0$, c'est-à-dire si $m \in \{2;3\}$, la famille $\mathcal{G} = \big((m-1;1);(-2;m-4)\big)$ est liée donc $\mathrm{rg}\,\mathcal{G} = 1$;
- sinon, c'est-à-dire si $m \neq 2$ et $m \neq 3$, la famille $\mathcal{G} = \big((m-1;1);(-2;m-4)\big)$ est libre donc $\mathrm{rg}\,\mathcal{G} = 2$.

Cor. 15.18 :

a. Calculons $\mathrm{Ker}\, f$: soit $(x;y;z) \in \mathrm{Ker}\, f$. Alors :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 0 \\ 4x+5y+6z & = & 0 \\ 7x+8y+9z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 0 \\ -3y-6z & = & 0 \\ -6y-12z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2-4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-7L_1 \end{array}$$

Les deux dernières équations sont proportionnelles donc

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -7z \\ y & = & 2z \end{array}\right.$$

Finalement $\mathrm{Ker}\, f = \{(-7z;2z;z), z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big((-7;2;1)\big)$

b. $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}\, f = 3-1 = 2$.

c. $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension 2. Il suffit donc de trouver deux vecteurs de $\mathrm{Im}\, f$ non colinéaires pour obtenir une base.
Or $f(1;0;0) = (1;4;7)$ et $f(-1;1;0) = (1;1;1)$ ne sont pas colinéaires.
Donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big((1;4;7);(1;1;1)\big)$.

Dérivabilité

I. Dérivabilité

Ex. 16.1 (Cor.) Déterminer $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\sqrt{x} - e^{\frac{1}{2}}}{\ln x - 1}$.

Ex. 16.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la classe de la fonction f définie par $\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \in [-1;1] & \mapsto & (1-x^2)^n \\ x \notin [-1;1] & \mapsto & 0 \end{cases}$

Ex. 16.3 (Cor.) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$.

a. Calculer $f^{(n)}(x)$.

b. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Ex. 16.4 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x > 0 & \mapsto & e^{\frac{-1}{x^2}} \\ x \leqslant 0 & \mapsto & 0 \end{cases}$

a. Montrer que f est continue, puis qu'elle est dérivable, sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$$

c. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 16.5 On souhaite montrer que Arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ sans utiliser le théorème (16.25) donnant la classe d'une bijection réciproque.

a. Rappeler l'ensemble de définition, l'ensemble de continuité, l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée de Arcsin.

b. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in]-1;1[, \mathrm{Arcsin}^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$

c. En déduire que Arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.

d. ***Bonus*** : montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(Q_n) = n-1$ et que Q_n possède au plus une racine réelle.

II. Éléments de calcul différentiel

Ex. 16.6 Trouver les extrema des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ sur $[3;+\infty[$
- $g : x \mapsto (x^2-3x)\,e^x$ sur $\mathbb{R}$
- $h : x \mapsto (x^2-3x)\,e^x$ sur $[1;2]$
- $k : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{(3+x)^2}\right)$ sur $\mathcal{D}_k$

Ex. 16.7 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique qui admet n zéros sur $[0;1[$.
Montrer que f' admet au moins n zéros sur $[0;1[$.

Ex. 16.8 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que f définie par $f(x) = x^n + ax + b$ admet au plus 3 racines réelles distinctes.

Ex. 16.9 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f(x)$.
Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Ex. 16.10

a. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$.
Montrer que $g(a) \neq g(b)$ et qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

b. Application : soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$ et $\forall x \in]a;b[, |f'(x)| \leq g'(x)$.
   Montrer que $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Ex. 16.11 Soit $g : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto & x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array} \right.$.

a. Montrer que g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) = 1$.
b. Montrer qu'il n'existe aucun voisinage de 0 sur lequel g est croissante.

III. Divers

Ex. 16.12 (Cor.) ***Méthode de Newton***
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que f' est à signe constant et que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\operatorname{Im} f$.
b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x coupe l'axe des abscisses en un point dont on précisera l'abscisse $X(x)$.
c. On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = X(u_n)$. On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f'' est à signe constant.
   Montrer que la suite u est bien définie et est monotone à partir du second terme.
d. En déduire les comportements asymptotiques possibles de la suite u. Préciser sa limite.

Ex. 16.13 ***Règle de l'Hospital*** Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'annulant en $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que si $g'(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

Ex. 16.14 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'annulant en 0.

Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Ex. 16.15 Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que $f(a) = 0$ et $f(b)f'(b) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ex. 16.16 On note $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n \operatorname{Arctan} x}{\mathrm{d}x^n}$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$,
   $f_{n+2}(x)\left(1 + x^2\right) + 2(n+1)x f_{n+1}(x) + n(n+1)f_n(x) = 0$.
b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(x) = f_n(x)\left(1 + x^2\right)^n$ est un polynôme et donner une relation de récurrence vérifiée par ces polynômes.
c. Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4.
d. Montrer que pour $n > 1$, P_n admet $n - 1$ racines distinctes.

IV. Suites récurrentes et convexité

Ex. 16.17 Soit u la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
Étudier la suite u et montrer qu'elle converge.
Indication : on pourra d'abord traiter le cas où $u_0 \leqslant \frac{1}{2}$, puis conclure dans le cas général...

Ex. 16.18 Soit v la suite définie par $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n + 2}{2v_n + 1}$.
Montrer que la suite est bien définie puis étudier sa convergence.
Indication : on pourra, par exemple mais cela n'a rien d'obligatoire, introduire la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \dfrac{1 - v_n}{1 + v_n}$.

Ex. 16.19 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et x et y les suites définies par $x_0 = a$, $y_0 = b$ et
$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lll} x_{n+1} & = & \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} & = & \sqrt{x_{n+1} y_n} \end{array} \right.$

Montrer que ces suites convergent vers une même limite.
Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = b\cos(\theta)$.
Donner la limite commune des suites x et y en fonction de b et θ.

Ex. 16.20 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et x et y les suites définies par $x_0 = a$, $y_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} &= \sqrt{x_n y_n} \end{cases}$$

(***attention***, la définition de ces deux suites est différente de celle donnée dans l'exercice précédent)

a. Montrer que $a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$.

b. Montrer que x est décroissante à partir du rang 1, et y croissante à partir du rang 1.

c. Montrer que ces suites convergent vers une même limite.
Remarque : la limite commune de ces deux suites est appelée ***moyenne arithmético-géométrique de*** a ***et*** b. Il n'y a pas d'expression simple connue en fonction de a et b de cette moyenne.

Ex. 16.21 **Centrale MP 2000**

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ et u la suite définie par $u_0 \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que u converge et donner sa limite.

c. Montrer que $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{2}$.

Ex. 16.22 **Inégalité de Hölder**

a. Montrer que la fonction exp est convexe.

b. En déduire que $\forall p \in]1;+\infty[, \forall u \in \mathbb{R}_+^*, \forall v \in \mathbb{R}_+^*$, en notant $q = \dfrac{1}{1-\frac{1}{p}}$, on a :

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1; a_2; ...; a_n)$ une famille de n réels strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^p = 1$.
Soit $(b_1; b_2; ...; b_n)$ une famille de n réels strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i^q = 1$.
Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant 1$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1; a_2; ...; a_n)$ et $(b_1; b_2; ...; b_n)$ deux familles de n réels strictement positifs.
Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

e. L'inégalité de la question précédente reste-t-elle valable pour des familles de réels positifs ou nuls ?

Corrections

Cor. 16.1 : À l'aide de DL : $x = e(1+h)$ où $h \underset{x \to e}{\longrightarrow} 0$.
$\sqrt{x} - e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e(1+h)} - \sqrt{e} = \sqrt{e}(h/2 + o(h))$.
$\ln x - 1 = \ln(e) + \ln(1+h) - 1 = h + o(h)$.
Donc $\displaystyle\lim_{x \to e} \frac{\sqrt{x} - e^{\frac{1}{2}}}{\ln x - 1} = \frac{\sqrt{e}}{2}$.

Cor. 16.3 :

a. On pose $g(x)=(x-a)^n$ et $h(x)=(x-b)^n$.

$g^{(k)}(x)=n(n-1)...(n-k+1)(x-a)^{n-k}=\dfrac{n!(x-a)^{n-k}}{(n-k)!}$.

En utilisant la formule de Leibniz, on obtient :

$f^{(n)}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{(n!)^2}{k!(n-k)!}(x-a)^{n-k}(x-b)^k$.

b. En prenant $a=b$, on obtient ainsi deux expressions de $f^{(n)}$:

$f^{(n)}(x)=\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{(n!)^2}{k!(n-k)!}\right](x-a)^n$ et

$f^{(n)}(x)=\dfrac{(2n)!}{n!n!}(x-a)^n$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right)$$

Cor. 16.12 :

a. f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc f' est continue. Or f' ne s'annule pas, donc f' est de signe constant.
f est donc strictement monotone et injective.
Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\operatorname{Im} f$.

b. Soit $x_0\in\mathbb{R}$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 a pour équation $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.
Comme f' ne s'annule pas, la tangente coupe l'axe des abscisses au point (d'ordonnée 0...) d'abscisse :

$$X(x_0)=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

c. La fonction $F: x\mapsto x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Donc la suite u définie par $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=F(u_n)$ est bien définie ($\mathbb{R}$ est un intervalle stable par F).
On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f'' est à signe constant.
Supposons, par exemple, $f''\geqslant 0$ et $f'>0$ (les autres cas se traitent de même).
Notamment, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Si $f(u_0)=f(0)<0$, alors $u_1=u_0-\dfrac{f(u_0)}{f'(u_0)}=\dfrac{-f(0)}{f'(0)}>0$.
  De plus, f' est croissante (car $f''\geqslant 0$). Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis,

  $$f(u_1)-f(u_0)\geqslant(u_1-u_0)f'(u_0)$$

  On en déduit que $f(u_1)\geqslant f(0)+\dfrac{-f(0)}{f'(0)}\times f'(u_0)=0$.
  Notamment, f étant continue et strictement croissante, $\exists! l\in\mathbb{R}, f(l)=0$.
  Enfin, on vérifie que $I=[l;+\infty[$ est stable par F puisque $F(l)=l$ et $F'(x)=\dfrac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}>0$ pour $x\in]l;+\infty[$.
  Donc à partir du rang 1, $u_n\geqslant l$ et u est monotone.
  Enfin, $u_2=u_1-\dfrac{f(u_1)}{f'(u_1)}\leqslant u_1$, donc u est décroissante à partir du rang 1.
- Si $f(u_0)\geqslant 0$, on étudie deux cas : 1er cas $f>0$ ne s'annule jamais, 2ème cas f s'annule en $l\in\mathbb{R}$ unique.
  Le deuxième cas est similaire à ce que nous venons de faire, le premier cas est encore plus simple puisqu'on obtient directement pour tout réel x, $F\leqslant x$.

d. La suite u est monotone à partir du rang d'après la question précédente.
Donc, elle est soit bornée et convergente, soit non bornée et divergente vers $\pm\infty$.
Plus précisément, dans le cas convergent, F étant continue, u converge vers une solution de $F(x)=0$, c'est-à-dire vers l'unique solution de $f(x)=0$.

Ensembles, applications, dénombrement

I. Ensembles et applications

Ex. 17.1 (Cor.) Soient $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ 0 \mapsto 0 \\ n > 0 \mapsto n-1 \end{cases}$

a. Injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles de f et g.

b. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$, puis étudier leur injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles.

Ex. 17.2 (Cor.) Soit E un ensemble et $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$. Montrer que si p est injective ou surjective, alors $p = \mathrm{Id}_E$.

II. Dénombrement

Ex. 17.3 Quel est le nombre de couples $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ tels que :

a. $i < j$?

b. $i \leq j$?

c) $i = j^2$?

Ex. 17.4 (Cor.)

a. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MATHS, puis du mot EUCLIDE.

b. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot BANANE, puis du mot MISSISSIPI.

Ex. 17.5 Déterminer le nombre d'anagrammes des mots ABAISSER, RESSASSER, ASSASSINAT.

Ex. 17.6 Soient n et p deux entiers naturels.

a. Combien y a-t-il de mots formés de n lettres A et p lettres B ?

b. Dénombrer les ensembles suivants en les représentant par des ensembles de mots :

i. Deux joueurs s'affrontent dans un match en n sets gagnants. On appelle ***partie*** la liste des scores du début jusqu'à la fin du match. Par exemple, $\big((0;0);(1;0);(2;0);(2;1);(3;1)\big)$ est une partie possible dans un match en 3 sets gagnants (et cette partie a été remportée par le premier joueur).
Combien y a-t-il de parties possibles remportées par le premier joueur ?
Combien y a-t-il de parties possibles ?
Combien y a-t-il de parties possibles remportées par le premier joueur avec au moins deux sets d'écart ?

ii. On appelle ***décomposition de*** n ***en*** p ***entiers*** toute p-liste d'entiers positifs ou nuls $(a_1; a_2; ...; a_p)$ dont la somme $\sum_{k=1}^{p} a_k$ vaut n.
Par exemple $(5; 0; 2; 1)$ est une décomposition de 8 en 4 entiers.
Combien y a-t-il de décomposition de n en p entiers ?

Ex. 17.7 Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

a. Combien y a-t-il de parties A de E de cardinal $p \in [\![0; n]\!]$?

b. Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$?

c. Combien y a-t-il de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$?

d. Combien y a-t-il de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que :

i. $A \cup B = E$?

ii. $A \cap B = \emptyset$?

iii. $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$?

Ex. 17.8 ***Permutations de couples*** On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes, n femmes, qui constituent n couples. On considère que deux tables sont identiques si on peut passer de l'une à l'autre par une rotation, une symétrie axiale ou la composée d'une rotation et d'une symétrie axiale.

a. Combien y a-t-il de tables possibles ?

b. Combien y a-t-il de tables possibles respectant l'alternance des sexes ?

c. Combien y a-t-il de tables possibles ne séparant pas les couples ?

d. Combien y a-t-il de tables possibles respectant les deux conditions précédentes ?

Ex. 17.9 On appelle opération interne sur un ensemble E toute application de $E \times E$ dans E.
Par exemple $*$ définie par $0 * 0 = 1$, $0 * 1 = 1$, $1 * 0 = 0$ et $1 * 1 = 1$ est une opération interne sur $[\![0;1]\!]$.

a. Combien existe-t-il d'opérations internes sur un ensemble à n éléments ?

b. Combien sont commutatives ?

c. Combien possèdent un élément neutre ?

d. Combien sont commutatives et possèdent un élément neutres ?

Ex. 17.10 On appelle ***marche aléatoire*** dans $\mathbb{Z}$ toute famille (finie) $\mathcal{M} = (m_1; m_2; ...; m_n)$ d'entiers telle que

- $m_1 = 0$;
- $\forall i \in [\![2;n]\!], |m_i - m_{i-1}| = 1$.

Un couple $(m_i; m_{i+1})$ est alors appelé ***pas*** de la marche aléatoire.

a. Combien y a-t-il de mots de $2n$ lettres formés de n lettres D et de n lettres G ?

b. Combien y a-t-il de marches aléatoires de $2n$ pas se terminant sur 0 ?

III. Calculs de sommes finies

Ex. 17.11 Pour tout entier $n \geq 3$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par : « il existe $(u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ tel que $u_1 < u_2 < ... < u_n$ et $1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$. »

a. Analyse du cas $n = 3$: on suppose qu'il existe $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $u_1 < u_2 < u_3$ et $1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}$.
   i. Montrer que $u_1 < 3$. En déduire la valeur de u_1.
   ii. Trouver les valeurs de u_2 et u_3.

b. Montrer que $\mathcal{P}(4)$ est vraie et trouver tous les quadruplets qui satisfont cette propriété.

c. Montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

Ex. 17.12 (Cor.) ***Formule d'inversion*** Soient $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels (ou complexes).

On pose pour tout entier n, $y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$.

Montrer que pour tout entier n, $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$.

Existe-t-il une suite z vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_k = (-1)^n$? Si oui, donner z_n en fonction de n.

Ex. 17.13 [$*$] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $q \in [\![0; p-1]\!]$ on a :

$$\sum_{k=q}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} = 0$$

b. On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$.
   i. Que dire de $S_{n,p}$ si $n < p$?
   ii. Déterminer $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$.

iii. Calculer $S_{n,2}$.

iv. Montrer que pour tout $p \in [\![1;n]\!]$, $S_{n,p} = p^n - \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} S_{n,k}$.

v. En déduire que $S_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

c. On note D_n le nombre de bijections de $[\![1;n]\!]$ dans lui-même sans point fixe. On pose $D_0 = 1$.

i. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.

ii. En déduire que $D_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k!$.

(Voir exercice 17.12 concernant le lien entre les deux questions précédentes)

Corrections

Cor. 17.1 :

a. f est injective mais pas surjective : en effet

- soit n, m tels que $f(n) = f(m)$. Alors $n+1 = m+1$ donc $n = m$: f est injective.
- 0 n'a pas d'antécédent pas f : $f(n) = 0 \Rightarrow n+1 = 0 \Rightarrow n = -1$. Or $-1 \notin \mathbb{N}$.

g est surjective mais pas injective. En effet :

- Soit $m \in \mathbb{N}$, on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(n) = m$. Supposons $n > 0$: $m = n - 1 \Leftrightarrow n = m + 1$.
  Donc m possède au moins un antécédent par g, c'est $m + 1$.
- $g(0) = 0 = g(1)$ donc g n'est pas injective.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$: $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n+1) = n$ (car $n + 1 > 0$).
Donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ qui est bijective.

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = \left| \begin{array}{lll} f(n-1) = n & \text{si} & n > 0 \\ f(0) = 1 & \text{si} & n = 0 \end{array} \right.$$

Notamment, $f \circ g(n) > 0$ pour tout entier n : donc $f \circ g$ n'est pas surjective (0 n'est jamais atteint),
et $f \circ g(0) = 1 = f \circ g(1)$: donc $f \circ g$ n'est pas injective.

Cor. 17.2 :

- Si p est surjective, alors $\forall y \in E, \exists x \in E, p(x) = y$.
  Soit $y \in E$ et x un antécédent.
  Alors $p(y) = p(p(x)) = p \circ p(x) = p(x)$ par $p \circ p = p$.
  Donc $p(y) = y$.
  Finalement $\forall y \in E, p(y) = y$ c'est-à-dire $p = \mathrm{Id}_E$.
- Si p est injective, on a $\forall x \in E, p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x)$ et comme p injective, $p(x) = x$. A nouveau $p = \mathrm{Id}_E$.

Cor. 17.4 :

a. MATHS est composé de 5 lettres ***distinctes***.
Il y a donc autant d'anagrammes du mot MATHS que de ***permutations de ses lettres***.
Il y a donc $5! = 120$ anagrammes du mot MATHS.
Au contraire, dans EUCLIDE, il y a deux lettres E. Échanger ces deux E ne change pas le mot.
On adopte alors une autre méthode pour compter le nombre d'anagrammes d'EUCLIDE.
Choisir un anagramme d'EUCLIDE, c'est :

- Choisir la position des deux E parmi sept positions possibles : $\binom{7}{2} =$ 21 positions pour les deux E.
- ***PUIS*** choisir la position du U : 5 choix restants.
- ***PUIS*** choisir la position du C : 4 choix restants.
- ***PUIS*** choisir la position du L : 3 choix restants.
- ***PUIS*** choisir la position du I : 2 choix restants.
- ***PUIS*** placer le D dans la seule position restante.

En tout, il y a donc $5! \times 21 = 2520$ anagrammes du mot EUCLIDE.

b. De la même manière que dans la question précédente :
Choisir un anagramme de BANANE, c'est :

- Choisir la position des deux A parmi six positions possibles : $\binom{6}{2} =$ 15 positions pour les deux A.
- ***PUIS*** la position des deux N parmi quatre positions restantes : $\binom{4}{2} = 6$ positions pour les deux N.
- ***PUIS*** choisir la position du B : 2 choix restants.
- ***PUIS*** placer le E dans la seule position restante.

En tout, il y a donc $15 \times 6 \times 2 = 180$ anagrammes du mot BANANE.
Choisir un anagramme de MISSISSIPI, c'est :

- Choisir la position des quatre S parmi dix positions possibles : $\binom{10}{4} = 210$ positions pour les quatre S.
- ***PUIS*** la position des quatre I parmi six positions restantes : $\binom{6}{4} =$ 15 positions pour les quatre I.
- ***PUIS*** choisir la position du M : 2 choix restants.
- ***PUIS*** placer le P dans la seule position restante.

En tout, il y a donc $210 \times 15 \times 2 = 6300$ anagrammes du mot MISSISSIPI.

Cor. 17.12 : Montrons-le par ***récurrence forte***.
Initialisation :
Pour $n = 0$, par définition, $y_0 = x_0$ donc $x_0 = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{-k} \binom{0}{k} y_k$ (la somme ne comporte qu'un seul terme, et c'est y_0).
Hérédité :
Supposons la propriété vraie ***pour tout entier*** k ***inférieur à un rang*** $n \in \mathbb{N}$ ***donné***.
Par définition, $y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x_k = x_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x_k$.
Donc, $x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x_k$.

Or, par hypothèse de récurrence, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $x_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} y_i$.

Donc :

$$x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} y_i$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} y_i$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} y_i$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = y_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{1-i} y_i \left[\sum_{k=i}^{n} \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^k \right]$$

Il s'agit donc de montrer que $\sum_{k=i}^{n} \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^k = (-1)^n \binom{n+1}{i}$.

Or $\binom{n+1}{k} \binom{k}{i} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \times \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$

puis $\binom{n+1}{k} \binom{k}{i} = \dfrac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} \times \dfrac{(n+1-i)!}{(n+1-k)!(k-i)!}$.

Donc $\binom{n+1}{k} \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i} \binom{n+1-i}{k-i}$.

Finalement :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n} \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^k &= \sum_{k=i}^{n} \binom{n+1}{i} \binom{n+1-i}{k-i} (-1)^k \\
&= \binom{n+1}{i} \sum_{k=i}^{n} \binom{n+1-i}{k-i} (-1)^k \\
&= \binom{n+1}{i} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n+1-i}{k} (-1)^{k+i} \\
&= \binom{n+1}{i} (-1)^i \left((-1)^{n-i} + \sum_{k=0}^{n+1-i} \binom{n+1-i}{k} (-1)^k \right) \\
&= \binom{n+1}{i} (-1)^i \left((-1)^{n-i} + (1-1)^{n+1-i} \right) \\
&= \binom{n+1}{i} (-1)^n
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.
Conclusion : ça marche !
La seconde question est une application immédiate de cette formule.

Matrices

I. Interprétations géométriques des matrices

Ex. 18.1 Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (3x-y;-x) \end{array} \right.$ et $\mathcal{B} = \big((1;1);(-1;2)\big)$.

a. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et que $\mathcal{B}$ en est une base.

b. Donner la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}$.

Ex. 18.2 Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Montrer que s est une symétrie dont on déterminera les sous-espaces caractéristiques.

Ex. 18.3 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\Delta : P \in E \mapsto P'$ et $\phi : P \in E \mapsto P - P'$.

a. Montrer que Δ et ϕ sont des endomorphismes de E et donner leur matrice dans la base canonique.
On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\Delta)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$ ces matrices.

b. Que peut-on dire de $\Delta^4 = \Delta \circ \Delta \circ \Delta \circ \Delta$?

c. Déduire de la question précédente que :
- A n'est pas inversible ;
- B est inversible - on donnera l'inverse de B sans utiliser la méthode du pivot de Gauss.

II. Isomorphismes et changements de bases

Ex. 18.4 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme $f : E \to E$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$.

Ex. 18.5 [**] $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent. Ce résultat se généralise-t-il aux matrices telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda AB = A + B$?

Ex. 18.6 Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à N.

a. Déterminer la nature géométrique de ψ.

b. En déduire N^k pour $k \in \mathbb{Z}$.

Ex. 18.7 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension n rapportés aux bases $\mathcal{B} = (e_1; e_2; ...; e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1; f_2; ...; f_n)$.
Soit $\phi : E \to F$ dont la matrice est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \ddots & & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Exprimer, pour $j \in [\![1;n]\!]$, $\phi(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

b. On pose $S_j = \sum_{k=1}^{j} f_k$. Montrer que pour tout $j \in [\![1;n-1]\!]$ on a $\phi(e_{j+1}) = \phi(e_j) + S_{j+1}$.

c. En déduire une expression de $\phi(e_j)$ comme une somme double.

d. Montrer que $\phi(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F.

e. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

III. Matrices de changement de bases

Ex. 18.8 Soit $E = \mathbb{C}_2[X]$, $\mathcal{C}$ sa base canonique et $\mathcal{B} = \left(X^2+1; X^2+iX; X^2-iX\right)$.

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

b. Donner les matrices $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Ex. 18.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{C}$ sa base canonique et $\mathcal{B} = \left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$.
On note P_k les polynômes de $\mathcal{B}$.

a. Simplifier $S_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$ puis $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} P_k$.

b. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

c. Donner les matrices $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Ex. 18.10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{-7}{2}u_n + 6v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + 5v_n \end{cases}$$

a. Calculer u_1, u_2, v_1, v_2.

b. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Exprimer W_{n+1} en fonction de W_n.

c. Soit $Q = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et ϕ l'endomorphisme canoniquement associé à Q.
Soit $\mathcal{B} = \big((3;2);(4;3)\big)$.
- Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.
- En déduire une expression simple de Q^n.

d. À l'aide des deux questions précédentes, expliciter W_n en fonction de n.

e. Montrer que les suites u et v convergent et donner leurs limites.

IV. Noyau, image et rang

Ex. 18.11

a. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$, une base de $\operatorname{Im} f$ et le rang de A.

b. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à

$$B = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base et un système d'équations de $\operatorname{Ker} g$, une base et une équation de $\operatorname{Im} g$ et le rang de B.

Ex. 18.12 Soit A une matrice réelle d'ordre n et de rang 1.

a. Montrer qu'il existe X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = XY^{\mathrm{T}}$.

b. En déduire A^k en fonction de A pour $k \geq 1$.

c. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $A+I_n$ soit inversible et exprimer alors son inverse en fonction de A.

Ex. 18.13 (Cor.) Soient $p \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le rang de la matrice $\left((i+j+p)^2\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$?

Ex. 18.14 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{C}$ sa base canonique, $\mathcal{B} = \big(1; X; X(X-1); X(X-1)(X-2)\big)$ et

$$\phi : \begin{cases} E & \to & E \\ P & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{3} P(k)X^k = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 + P(3)X^3 \end{cases}$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et que $\phi \in \mathcal{L}(E)$.

b. Donner $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$.

c. Donner $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

d. Donner $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi)$.

e. Quelle formule relie les matrices A, B et P ?

f. Déduire des questions précédentes que ϕ est bijective.

g. Ce résultat peut-il se généraliser ?

Ex. 18.15 ***Extrait écrit Centrale Math 1 2018*** Soient n un entier supérieur à 2, $(t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$A(t_1, t_2, ..., t_n) = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} & t_n \\ t_n & \ddots & \ddots & & t_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ t_3 & & \ddots & & \vdots \\ t_2 & t_3 & \cdots & t_n & t_1 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

a. Calculer M^2, ..., M^n. Montrer que M est inversible, donner M^{-1}.

b. Donner un polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $P(M) = 0$.

c. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q_A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A(t_1, t_2, ..., t_n) = Q_A(M)$.

d. Réciproquement, soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, montrer à l'aide d'une division euclidienne de Q par un polynôme bien choisi qu'il existe $(t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $Q(M) = A(t_1, t_2, ..., t_n)$.

e. Montrer que $\mathcal{D}_n = \{A(t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), (t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit et transposition.

f. Donner une base de $\mathcal{D}_n$ ainsi que sa dimension.

Ex. 18.16 (Cor.) On considère l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_{X-1}^{X} P(t)\mathrm{d}t \end{cases}.$$

a. Montrer que Φ est linéaire.

b. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \deg \Phi(P) = \deg P$.

c. En déduire Φ est un automorphisme d'espaces vectoriels.

d. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on note Φ_n la restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$.
On note $(P_0, P_1, ..., P_n)$ l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par Φ_n. Les polynômes P_k sont appelés ***polynômes de Bernoulli***.
Calculer les quatre premiers polynômes de Bernoulli.

e. Démontrer que pour tout $n, N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{P_{n+1}(N) - P_{n+1}(0)}{n+1}.$$

f. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^3$?

Cor. 18.13 : Soit $A = \left((i+j+p)^2\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.
Soient i et j deux entiers vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.
$(i+j+p)^2 = i^2+2\times i\times j+j^2+2(i+j)p+p^2 = \left(j^2+2jp+p^2\right)+i\times(2j+2p)+i^2$.
Notons $A_1, ..., A_j, ..., A_n$ les colonnes de A de sorte que $A = (A_1|...|A_n)$.

Notons $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ la matrice à une colonne et n lignes composée de 1.

Notons $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = (i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n^2 \end{pmatrix} = \left(i^2\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Le développement $(i+j+p)^2 = \left(j^2+2jp+p^2\right)+i\times(2j+2p)+i^2$ se réécrit pour les colonnes de A de la façon suivante :

$$A_j = \left(j^2+2jp+p^2\right)C_1 + (2j+2p)\,C_2 + C_3$$

Donc la famille $\mathcal{F} = (C_1; C_2; C_3)$ est une famille génératrice des colonnes de A, c'est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im} A$.
Or il s'agit d'une famille libre (ce que nous savons car nous avons déjà traité le cas $n = 3$).
Donc

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A = 3$$

Cor. 18.16 :

a. $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$\Phi(\lambda P + Q) = \int_{X-1}^{X} \lambda P(t) + Q(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_{X-1}^{X} P(t)\mathrm{d}t + \int_{X-1}^{X} Q(t)\mathrm{d}t = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q)$.
Ce qui s'énonce aussi plus simplement : Φ est linéaire par linéarité de l'intégrale.

b. $\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists n \in \mathbb{N}, P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Or Φ étant linéaire, on a alors
$\Phi(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi\left(X^i\right)$. Il suffit donc de montrer que Φ conserve le degré des polynômes de la base canonique, la somme de deux polynômes de degrés distincts étant égale au plus grand des degrés des deux polynômes.
Or

$$\begin{aligned}
\Phi\left(X^i\right) &= \int_{X-1}^{X} t^i \mathrm{d}t \\
&= \frac{X^{i+1} - (X-1)^{i+1}}{i+1} \\
&= \frac{-\sum_{k=0}^{i} \binom{i+1}{k} X^k (-1)^{i+1-k}}{i+1} \qquad \text{est de degré } i.
\end{aligned}$$

Donc $\forall i \in \mathbb{N}, \deg \Phi\left(X^i\right) = \deg X^i \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}[X], \deg \Phi(P) = \deg P$.

c. $\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie, ce qui pose quelques soucis supplémentaires que l'on aimerait éviter. On se restreint donc à $\Phi_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \Phi_n(P) = \Phi(P)$ qui est aussi un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question précédente. Démontrer que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ revient donc à démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme Φ_n est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on peut alors utiliser le théorème :
Φ_n est bijective$\Leftrightarrow$ Φ_n est injective$\Leftrightarrow$ Φ_n est surjective.
La question devient alors simple : on montre que Φ_n est injective en calculant son noyau :

$$\begin{aligned}
\ker \Phi_n &= \{P \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P) = 0\} \\
&= \{P \in \mathbb{R}_n[X], \deg \Phi(P) = -\infty\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \deg P = -\infty\} \\
&= \{0\}
\end{aligned}.$$

Donc Φ est un automorphisme d'espace vectoriel.

d. $P_0 = 1, P_1 = \frac{1}{2} + X, P_2 = \frac{1}{6} + X + X^2, P_3 = \frac{X}{2} + \frac{3X^2}{2} + X^3$ (ces résultats n'étant pas tout à fait immédiats puisqu'il faut pour les obtenir inverser une matrice $(4,4)$ triangulaire supérieure de diagonale égale à 1).

e. D'une part, $\Phi\left(P_n(X) - P_n(X-1)\right) = X^n - (X-1)^n$ par linéarité de Φ et définition des polynômes de Bernoulli.
D'autre part, $\Phi\left(nX^{n-1}\right) = n\frac{X^n - (X-1)^n}{n} = X^n - (X-1)^n$ par définition de Φ.
Φ étant par ailleurs bijective, on en déduit que $P_n(X) - P_n(X-1) = nX^{n-1}$ d'où,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k^n &= \frac{\sum_{k=1}^{N} P_{n+1}(k) - P_{n+1}(k-1)}{n+1} \\
&= \frac{P_{n+1}(N) - P_{n+1}(0)}{n+1} \qquad \text{par télescopage}
\end{aligned}$$

f. Après calcul de P_4, on obtient la formule classique $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$.

Maths - Feuille d'exos n° 19

Probabilités

I. Espaces probabilisés

Ex. 19.1 On lance deux fois de suite un dé honnête.

a. Déterminer l'univers Ω ainsi que son cardinal.

b. Trouver le libellé pour l'événement
$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

c. A quelle partie de Ω correspond l'événement B : *"la somme des deux nombres est inférieure strictement à 5"*?

d. Calculer la probabilité des événements A, B, $A \cap B$, $A \cup B$.

Ex. 19.2 Soient A et B deux événements tels que $P(A) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{2}{3}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$. Soient E *« au moins un des deux événements A, B se produit »* et F *« un seul des deux événements A, B se produit »*. Calculer $P(E)$ et $P(F)$.

Ex. 19.3 [$*$] Soit (Ω, P) un espace probabilisé et A, B, C trois événements.

a. Montrer que

$$P(A \cup B \cup C) = \begin{array}{l} P(A) + P(B) + P(C) \\ -P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ +P(A \cap B \cap C) \end{array}$$

et que

$$P(A \cup B \cup C) \leqslant P(A) + P(B) + P(C)$$

b. On suppose que $P(A) = P(B) = P(C) = p$ et $P(A \cap B \cap C) = 0$. Montrer que $p \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

Est-il possible que $p = \dfrac{2}{3}$?

c. On reprend les hypothèses de la question précédente en rajoutant que A, B, C sont deux à deux incompatibles. Calculer la valeur maximale de p et montrer sur un exemple que cette valeur est atteinte.

Ex. 19.4

a. Soient a, b, c, d quatre réels. Montrer que
$\max(a;b) - \min(c;d) = \max(a-c; a-d; b-c; b-d)$.

b. On lance deux dés non truqués et on effectue la somme de ces dés. Pour $n \in [\![2;12]\!]$, on note $S_2 = n$ l'événement « la somme des deux dés vaut n ».
Montrer que $P(S_2 = n) = \dfrac{\min(6; n-1; 13-n)}{36}$ puis que

$$P(S_2 = n) = \left| \begin{array}{lll} n \in [\![2;7]\!] & \mapsto & \frac{n-1}{36} \\ n \in [\![7;12]\!] & \mapsto & \frac{13-n}{36} \end{array} \right.$$

c. On lance trois dés non truqués et on effectue la somme de ces dés. Pour $n \in [\![3;18]\!]$, on note $S_3 = n$ l'événement « la somme des trois dés vaut n ».

Montrer que $P(S_3 = n) = \left| \begin{array}{lll} n \in [\![3;8]\!] & \mapsto & \frac{(n-1)(n-2)}{2\times 216} \\ n \in [\![8;13]\!] & \mapsto & \frac{-n^2+21n-83}{216} \\ n \in [\![13;18]\!] & \mapsto & \frac{(19-n)(20-n)}{2\times 216} \end{array} \right.$

II. Probabilités conditionnelles, indépendance

Ex. 19.5 De la population canadienne, 30% sont Québécois, 28% parlent français et 24% sont Québécois et parlent français. On choisit une personne au hasard, quelle est la probabilité que cette personne :

a. soit Québécoise **ou** parle français ?

b. ne soit pas Québécoise **et** ne parle pas français ?

c. parle français mais ne soit pas Québécoise ?

Ex. 19.6 Un avion possède $n \geqslant 2$ places, toutes numérotées.
Le vol est complet, comporte donc n passagers, chacun affecté à l'une des places numérotées.
Cependant, le premier passager qui rentre dans l'avion s'assoit sur une place « au hasard » (avec équiprobabilité) sans vérifier si c'est bien la sienne.
Puis chacun des passagers suivants s'assoit

- à sa place si elle est libre ;
- sur une place « au hasard » (avec équiprobabilité) si sa place est déjà prise.

On numérote les passagers par leur ordre d'arrivée dans l'avion.
On note, pour $k \in [\![2; n]\!]$, P_k la probabilité que le passager k trouve sa place prise en rentrant dans l'avion.
On note aussi, pour $k \in [\![2; n]\!]$ et $i \in [\![1; k-1]\!]$, $A_{k,i}$ l'événement « la place du passager k a été prise par le passager i ».

a. Exprimer P_{k+1} comme une somme, puis trouver une formule de récurrence donnant P_{k+1} en fonction de P_k, n et k.

b. Calculer la probabilité que le dernier passager s'assoit sur la place qui lui est réservée.

Ex. 19.7 Pour se rendre au travail, un automobiliste dispose de deux itinéraires A et B. Le premier jour, il prend l'itinéraire A, puis, chaque jour, il prend le même itinéraire que la veille s'il n'y a pas eu d'embouteillage, et change d'itinéraire s'il y a eu des embouteillages.
La probabilité que l'automobiliste se trouve dans un embouteillage en prenant l'itinéraire A est notée a, celle correspondant à l'itinéraire B est notée b. On suppose que les événements successifs sont indépendants. On note p_n la probabilité que l'automobiliste emprunte l'itinéraire A le n-ième jour où il se rend au travail.

a. Calculer p_1, p_2 et p_3.

b. Calculer p_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Ex. 19.8 On considère n urnes numérotées (de 1 à n) telles que dans l'urne numéro k se trouve k boules noires et $n-k+1$ boules blanches.
On effectue l'expérience aléatoire suivante : on choisit une urne au hasard, puis on tire une boule, on choisit à nouveau une urne au hasard puis on tire une boule.
On fait l'hypothèse d'équiprobabilité sur tous les tirages.
Quelle est la probabilité que les deux boules soient blanches :

a. lors d'un tirage sans remise ?

b. lors d'un tirage avec remise ?

Ex. 19.9 On considère une famille comportant n enfants. On note M l'événement *« la famille a des enfants des deux sexes »* et F l'événement *« la famille a au plus une fille »*.

a. Si $n = 2$, les événements M et F sont-ils indépendants ?

b. Même question pour $n = 3$.

Ex. 19.10 On reprend les hypothèses et notations de la question b) de l'exercice 19.3,
notamment $P(A \cap B \cap C) = 0$ et on rajoute l'hypothèse que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants.
Montrer que $P(A \cup B \cup C) \leqslant \frac{3}{4}$ puis que $p \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Peut-on avoir $p = \dfrac{1}{2}$?

Ex. 19.11 On considère les points de la droite réelle dont les abscisses sont des entiers relatifs. On part de l'origine et à chaque tour, on se déplace sur l'entier immédiatement à gauche (inférieur) ou immédiatement à droite (supérieur) de façon équiprobable.
Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de se retrouver à l'origine après $2n$ tours de jeu vaut

$$P = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\text{produit des } n \text{ plus petits nombres impairs}}{\text{produit des } n \text{ plus petits nombres pairs}}$$

Corrections

Déterminant

I. Déterminant d'une matrice, d'une famille de vecteurs

Ex. 20.1 Calculer et factoriser les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a^p & a^n \\ b & b^p & b^n \\ c & c^p & c^n \end{vmatrix}$$

Ex. 20.2 Calculer et factoriser les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \sin a \\ 1 & \cos b & \sin b \\ 1 & \cos c & \sin c \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{vmatrix}$$

Ex. 20.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Calculer $\det_{\mathcal{B}}(e_2 + e_3; e_3 + e_1; e_1 + e_2)$ puis
$\det_{\mathcal{B}}(e_1 + \lambda e_2; e_2 + \lambda e_3; e_3 + \lambda e_1)$.

Ex. 20.4 On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$.
Soient $P_1 = (X+1)^2$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = 9X - 5$.

a. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (P_i)_{i \leq 3}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$.

On pourra éventuellement traiter les deux question en même temps.

Ex. 20.5 Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille $((m+1; m-1); (4; -4+2m))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Ex. 20.6 Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique est nul en dimension 3.
Est-ce le cas en dimension $n = 2$?
Généraliser aux matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 20.7 On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer A^n en fonction des termes de la suite de Fibonacci.

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Ex. 20.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n+1} = 0_{2n+1}$.
Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_2 = 0_2$ puis une matrice $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0_{2n}$.

Ex. 20.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1; n]\!]^2$, $a_{ij} = \pm 1$.
Montrer que 2^{n-1} divise $\det A$.

Ex. 20.10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2$, $a_{i,j} = (-1)^{\max(i,j)}$.
Calculer $\det A$.

Ex. 20.11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i; j) \in [\![1; n]\!]^2$, $a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
On note $\Delta_n = \det(A_n)$.

a. Exprimer Δ_n en fonction de n et montrer que A_n est inversible.

b. Soit $X = (x_i)_{i \in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On suppose que $A_n X$ est constitué de coefficients positifs ou nuls.

i. Montrer que $x_n \geqslant 0$.

ii. Montrer que $\forall i \in [\![1; n]\!]\,, x_i \geqslant 0$.

c. Montrer que A_n^{-1} est composée de coefficients positifs ou nuls.

d. Soit $B_n = A_n - I_n$. On note $D_n = \det(B_n)$.
Montrer que $D_{n+3} = -D_n$.
En déduire que B_n est inversible si et seulement si $n+1$ n'est pas un multiple de 3.

Ex. 20.12 ***Centrale 2017 PSI Maths 1 - Extrait***
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute matrice M de E, on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.
On dit que f_M est ***cyclique*** s'il existe un vecteur $u \in \mathbb{C}^n$ tel que $\left(u; f_M(u); \dots; f_M^{n-1}(u)\right)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$. u est alors appelé ***vecteur cyclique*** de f_M.
On dit que f_M est ***diagonalisable*** s'il existe une base $(e_1; \dots; e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et un n-uplet $(\lambda_1; \dots; \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\forall i \in [\![1; n]\!]\,, f_M(e_i) = \lambda_i e_i$$

Autrement dit, f_M est diagonalisable si et seulement si f_M est une composée d'affinités.
On suppose dans la suite que f_M est diagonalisable et on note $(e_1; \dots; e_n)$ la base de diagonalisation et $(\lambda_1; \dots; \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ les scalaires associés.
Soit $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i e_i \in \mathbb{C}^n$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u_1; \dots; u_n; \lambda_1; \dots; \lambda_n)$ pour que $\left(u; f_M(u); \dots; f_M^{n-1}(u)\right)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

b. Soit $A(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ où $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont des nombres complexes.

i. Montrer que $A(x)$ est un polynôme en x dont on précisera le degré.

ii. Montrer que $\forall i \in [\![1; n-1]\!]\,, A(x_i) = 0$.

iii. En déduire que
$A(x) = a(x_1, \dots, x_{n-1})(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}) = a(x_1, \dots, x_{n-1}) \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)$
où $a(x_1, \dots, x_{n-1})$ est un complexe ne dépendant que de la valeur de $x_1, \dots, x_{n-1}$.

iv. Soit $x_n \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$A(x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

c. Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Caractériser alors ses vecteurs cycliques.

II. Déterminant d'un endomorphisme, divers

Ex. 20.13 On se place dans $\mathbb{R}$.
Déterminer le rang des systèmes suivants puis les résoudre :

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+a)y + z = 0 \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y - 2z = b \\ x + y - 3z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + t = 1 \\ x + z + t = 2 \\ y + z + t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Ex. 20.14 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f(P) = (X+1)^2 P'' + (X-1)P' + P$$

f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

Variables aléatoires

I. Variables aléatoires

Ex. 21.1 On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à $n \geqslant 2$.

a. On tire deux boules dans l'urne ***sans remise***. Soit X_n la variable aléatoire indiquant le plus grand des deux numéros tirés. Calculer la loi de X_n.

b. On tire deux boules dans l'urne ***avec remise***. Soit Y_n la variable aléatoire indiquant le plus grand des deux numéros tirés. Calculer la loi de Y_n.

Ex. 21.2 (Cor.) Un système de communication comporte n composants. Chaque composant a une probabilité p d'être en bon état de fonctionnement, indépendamment des autres.
Le système lui-même fonctionne si au moins la moitié de ses composants est en bon état de fonctionnement.

a. Pour quelles valeurs de p un système à 5 composants a-t-il une probabilité de fonctionner supérieure à un système à 3 composants ?

b. D'une manière générale, dans quels cas un système à $2k+1$ composants est-il préférable à un système à $2k-1$ composants ?

Ex. 21.3 ***Problème des allumettes de Banach*** Un mathématicien se trouve être également fumeur de pipe. Il a dans ses deux poches une boîtes d'allumettes. Quand il a besoin d'allumer sa pipe, il a une chance sur deux de chercher une allumette dans sa poche gauche, et une chance sur deux de la chercher dans sa poche droite.
Il découvre subitement que la boîte d'allumette qu'il a choisie est vide. Les deux boîtes contenaient N allumettes au départ.
Quelle est la probabilité qu'il lui reste k allumettes dans l'autre boîte ($k \in [\![1;n]\!]$) ?

II. Couples de variables aléatoires

Ex. 21.4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé (Ω, P) et suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n, 1/4)$ et $\mathcal{B}(n, 3/4)$.
Soit pour tout événement élémentaire $\omega \in \Omega$, on note
$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}$.

a. Calculer la probabilité que A soit inversible.

b. Calculer la probabilité que A^{-1} soit à coefficients entiers, sachant que A est inversible.

Ex. 21.5 Dans un sac il y a $n-2$ boules noires et 2 boules blanches ($n \geqslant 3$). On tire successivement et sans remise toutes les boules du sac et on note X le rang de la première boule blanche tirée et Y le rang de la seconde.

a. Loi du couple (X, Y).

b. Loi de X, espérance et variance. Même question pour Y.

Ex. 21.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p, r \in]0;1[$. Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ et Y une variable aléatoire telle que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, la loi de Y sachant que $(X=k)$ est $\mathcal{B}(k,r)$.
Donner la loi de Y.

III. Espérance, variance

Ex. 21.7 Soit A_1, A_2, ..., A_n des événements quelconques et C_i :« au moins i événements de la famille $(A_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ se produisent ».
Montrer que $\sum_{i=1}^n P(C_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$
Indication : introduire une v.a. dont les deux membres sont l'espérance.

Ex. 21.8 On considère $p \geqslant 2$ boîtes B_1, B_2, ..., B_p. Dans l'une d'entre elles se trouve un objet O. On ouvre successivement et au hasard les boîtes jusqu'à trouver l'objet O.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de boîtes ouvertes.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Ex. 21.9 Pour allumer un feu, on dispose de n allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette est égale à $p \in]0;1[$.
On finit par allumer le feu.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'allumettes restantes.
Calculer la loi de X, son espérance et sa variance.

Corrections

Cor. 21.2 :

a.

b. Mise en équations : un système à $2k+1$ composants est fonctionnel si au moins $k+1$ composants fonctionnent. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de composants fonctionnels : X suit une loi binomiale de paramètre p. Le système est fonctionnel avec une probabilité $\sum_{i=k+1}^{2k+1} P(X=i) = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i(1-p)^{2k+1-i}$.
Pour qu'un système à $2k+1$ composants soit préférable à un système à $2k-1$ composants il faut donc que

$$(E) : \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i(1-p)^{2k+1-i} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} p^i(1-p)^{2k-1-i} > 0$$

Soit
$$P = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} X^i(1-X)^{2k+1-i} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} X^i(1-X)^{2k-1-i}$$
$$\text{et } Q = \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1}{i} X^i(1-X)^{2k+1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i} X^i(1-X)^{2k-1-i}$$
$$\begin{aligned} P+Q &= \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} X^i(1-X)^{2k+1-i} - \sum_{i=0}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} X^i(1-X)^{2k-1-i} \\ &= (X+1-X)^{2k+1} - (X+1-X)^{2k-1} = 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, $P = X^k \left(\sum_{i=1}^{k+1} \binom{2k+1}{i+k} X^i(1-X)^{k+1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i+k} X^i(1-X)^{k-1-i} \right)$
donc $X^k | P$.
De même, $(1-X)^k | Q$.
Comme $P+Q=0$, c'est-à-dire $P=-Q$, $(1-X)^k | P$.
Montrons enfin que $\frac{1}{2}$ est racine de P :

$$\begin{aligned} P\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ &= \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{2k+1-i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{2k-1-i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ &= Q\left(\tfrac{1}{2}\right) = -Q\left(\tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
Or $\deg(P) \leqslant 2k+1$ (somme de polynômes de degrés inférieurs à $2k+1$) donc
$P = aX^k(1-X)^k(2X-1)$ où $a \in \mathbb{R}$.
Plus précisément,
$$a = \frac{\sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-1)^{k+1-i}}{2} = \frac{\sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1}{i+k+1} (-1)^i}{2} > 0 \text{ car pour}$$
tout $i \in [\![0; k-1]\!]$, $\binom{2k+1}{i+k+1} > \binom{2k+1}{i+k+2}$.

Finalement, $(E) \Leftrightarrow P(p) > 0 \Leftrightarrow ap^k(1-p)^k(2p-1) > 0 \Leftrightarrow p > \dfrac{1}{2}$.
Les valeurs de p pour lesquelles un système à $2k+1$ composants est préférable à un système à $2k-1$ composants sont donc $\left]\frac{1}{2}; 1\right]$.

Produit scalaire

I. Définition de produits scalaires

Ex. 22.1 On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on note $\mathcal{C}$ sa base canonique. On se donne les formes suivantes de $E \times E$:

- $(.|.) : (P,Q) \mapsto (P|Q) = \sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k)$
- $\langle.|.\rangle : (P,Q) \mapsto \langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{3} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$

a. Montrer que $(.|.)$ et $\langle.|.\rangle$ sont deux produits scalaires sur E.

b. Montrer que $\mathcal{C}$ est une famille orthogonale pour l'un de ces produits scalaires.
Est-elle orthonormale ?

c. Trouver une base orthonormale $\mathcal{B}$ pour l'autre produit scalaire.

d. Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

e. Calculer P^{-1} (on pourra se montrer astucieux...).

Ex. 22.2 On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on munit E du produit scalaire $(.|.) : (P,Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

a. Calculer les produits scalaires mutuels des polynômes de la base canonique de E.

b. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ de E.

c. Simplifier l'expression de $\sin(\theta)P_i(\cos\theta)$ pour $i \in [\![0;2]\!]$.

Ex. 22.3 On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on définit les applications $s_n : E \times E \to \mathbb{R}$ qui à deux suites u et v associent

$$s_n(u,v) = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k$$

a. Les applications s_n sont-elles des produits scalaires sur E ?

b. On note $F = \left\{u \in E, \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \in \mathbb{R}\right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

c. Montrer que $s : \left\{\begin{array}{lcl} F \times F & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & s(u,v) = \lim_{n\to+\infty} s_n(u,v) \end{array}\right.$ est bien définie.

d. Montrer que s est un produit scalaire sur F.

e. s peut-elle être prolongée en un produit scalaire sur E ?

Ex. 22.4 Soient $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On donne $\phi : (P,Q) \in E \times E \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$.

a. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

b. Expliciter une base orthonormée de E pour ϕ.

II. Normes associées

Ex. 22.5 Soit E un espace euclidien, u_1, u_2, ..., u_n des vecteurs unitaires de E vérifiant

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|u_i)^2$$

Montrer que la famille $(u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base orthonormale de E.

Ex. 22.6 Soit E un espace préhilbertien réel muni de sa norme associée $\|.\|$. Montrer que

$$\forall u, v \in E, |\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\|$$

Rappeler le nom de cette inégalité.

III. Orthogonalité

Ex. 22.7 Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in E, x + y + z + t = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E puis donner une base orthonormée de F.

Ex. 22.8 Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Ex. 22.9 Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Soient E_1 et E_2 les parties de E formées des fonctions paires et impaires respectivement.

a. Montrer que quel que soit $f \in E$, il existe un unique couple $(g, h) \in E_1 \times E_2$ tel que $f = g + h$.
b. Écrire la propriété précédente en terme de sous-espaces supplémentaires dans E.
c. Montrer que $E_1^\perp = E_2$.

Corrections

Séries

I. Séries à termes positifs, séries absolument convergentes

Ex. 23.1 Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

a. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ sur le segment $[0; x]$ pour les fonctions cos, sin, ch et sh.

b. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

$$A = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad B = \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad C = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$D = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

c. Les résultats des questions précédentes se généralisent-ils à $x < 0$?

Ex. 23.2 Nature des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^n}$ et $v_n = 3^{\frac{1}{n}}$.

Ex. 23.3 Calculer, si existence, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Ex. 23.4 Déterminer la nature, et éventuellement calculer la somme, de la série $\displaystyle\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Ex. 23.5 Nature de la série $\sum n^n e^{-n^2}$.

Ex. 23.6 Nature de la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$.

Ex. 23.7

a. Montrer que $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, 2ab \leqslant a^2 + b^2$.

b. On suppose que la série à termes positifs $\sum u_n$ converge.

Que peut-on dire de la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$?

Ex. 23.8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. Pour tout entier n, on pose $b_n = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$.
Comparer la nature des séries de terme général a_n et b_n.

Ex. 23.9 On pose pour tout entier n, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^n(t)}{1 + t^n} \mathrm{d}t$.

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

II. Autres séries

Ex. 23.10

a. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$ diverge.

b. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers une limite dont on donnera le signe.

c. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $H_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.
En déduire un encadrement de H_N.

d. Déduire de la question précédente que $H_N - \ln(N)$ converge. On note γ la limite.

e. Exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ à l'aide de la suite H.

f. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Ex. 23.11 En utilisant la question d. de l'exercice précédent, montrer que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)(2k+1)}$ existe et donner sa valeur.

Ex. 23.12 Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\sin(n)}$.

III. Pour aller plus loin

Ex. 23.13 Soit u la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.
b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
c. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?
d. Donner un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
e. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Ex. 23.14 (Cor.) Soient u et w définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \begin{array}{lcl} u_n & = & \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \\ v_n & = & \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}} \end{array} \right.$$

On note $S = \sum u_n$ et $T = \sum v_n$ les séries associées à ces deux suites.

a. Les séries S et T sont-elles absolument convergentes ?
b. Les séries S et T sont-elles à termes positifs ?
c. Montrer que S est une série convergente.
d. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
e. Soit $w = u - v$. Montrer qu'elle est de signe constant et donner un équivalent (simple) de w_n au voisinage de $+\infty$.
f. Montrer que T est une série divergente.

Ex. 23.15 (Cor.) Étant donnés $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$$

a. Donner les valeurs de a, b, c pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge.
b. Calculer $\displaystyle\sum_1^{+\infty} u_n$ en cas de convergence ou donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ en cas de divergence.

Ex. 23.16 (Cor.) Soit u la suite définie par $u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{1+n^2}\right)$ et $S = \sum u_n$.

a. Énoncer ***précisément*** le théorème sur la nature de séries à termes équivalents.
b. Donner un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$.
c. En déduire que S est une série à termes ***positifs à partir d'un certain rang***.
d. Nature de $\sum u_n$?

Cor. 23.14 :

a. Non, par critère de Riemann.
b. Non plus, c'est évident, un terme sur deux est négatif, un terme sur deux est positif.
c. On étudie $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (deux suites extraites des sommes partielles) et on montre qu'elles sont adjacentes.
En conséquence, elles convergent vers une même limite, et, S qui est la réunion de ces deux suites extraites, converge aussi.

d. Évident en étudiant la limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$.

e. Soit $w = u - v$.
$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n}+(-1)^{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^{n+1}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^{n+1}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{1}{n} \times \left(1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

De plus, w est positive puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} + (-1)^{n+1} > 0$ et que $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^{n+1}\right)}$.

f. D'après ce qui précède :
$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - w_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} w_k.$

Donc $T_n = S_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$.

Or S est une série convergente d'après la question 3, et $\displaystyle\sum_n w_n$ est une série à termes positifs vérifiant $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$: par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on peut donc conclure que $\displaystyle\sum_n w_n$ diverge vers $+\infty$.
Donc T diverge vers $-\infty$.

Cor. 23.15 :

a. Une condition ***nécessaire*** (mais ***non suffisante***) pour qu'une série converge est que son terme général tende vers 0.
Cherchons donc tout d'abord les valeurs de a, b, c pour lesquelles u converge vers 0.
$u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2) = a\ln(n) + b\ln\left(n\left[1+\frac{1}{n}\right]\right) + c\ln\left(n\left[1+\frac{2}{n}\right]\right)$.
Donc $u_n = (a+b+c)\ln(n) + b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + c\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$.
Dans cette dernière expression, les deux derniers termes tendent vers 0.
Pour que la série converge, il est donc ***nécessaire*** que $a+b+c=0$.
Cherchons alors, sous cette hypothèse, un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.
$u_n = \dfrac{b}{n} - \dfrac{b}{2n^2} + \dfrac{2c}{n} - \dfrac{2c}{n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- Si $b+2c \neq 0$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{b+2c}{n}$, notamment u_n est du même signe que $b+2c$ à partir d'un certain rang.
$\sum u_n$ est donc une série dont les termes sont de signe constant à partir d'un certain rang : la règle des équivalents s'applique et on peut affirmer que $\sum u_n$ diverge par comparaison avec la série $\sum \dfrac{1}{n}$ divergente.
- Si $b + 2c = 0$, c'est-à-dire si $b = -2c$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-c}{n^2}$ donc $u_n = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ étant convergente, $\sum u_n$ converge.

Finalement, les valeurs de $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge sont les valeurs vérifiant

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0 \\ b+2c &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& c \\ b &=& -2c \end{array}\right.$$

$\sum u_n$ converge si et seulement si $(a;b;c) \in \mathrm{Vect}\big((1;-2;1)\big)$.

b.
- Cas de convergence : $(a;b;c) = c(1;-2;1)$.
$u_n = c\big(\ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)\big) = c\big(\ln(n) - \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(n+1)\big)$.
Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = c\sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(k+1) + \ln(k+2) - \ln(k+1)$
ou encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = c\left(\ln(1) - \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(2)\right)$ par télescopage.
Or $\ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -c\ln(2)$$
- Cas de divergence :
Si $a+b+c \neq 0$, la série diverge grossièrement et
$$\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} (a+b+c)\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = (a+b+c)\ln(n!)$$

Si $a+b+c=0$ mais $b \neq -2c$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} (b+2c)\ln(n)$ par comparaison avec la série harmonique divergente.

Cor. 23.16 :

a. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes ***positifs***.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

b.
$$\begin{array}{rcl} u_n & = & \sin\left(2\pi\sqrt{1+n^2}\right) \\ & = & \sin\left(2\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) \\ & = & \sin\left(2\pi n\left[1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right) \\ & = & \sin\left(2\pi n+\frac{2\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ & = & \sin\left(\frac{\pi}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ & \underset{+\infty}{=} & \frac{\pi}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \end{array}$$

Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n}$.

c. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n}$ d'après la question précédente.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{\pi}{n}} = 1$.

Notamment, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_n}{\frac{\pi}{n}} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Donc, à partir d'un certain rang, u_n et $\dfrac{\pi}{n}$ sont de même signe : u_n est donc positive à partir d'un certain rang.

d. La série $\sum u_n$ est donc une série à termes positifs (à partir d'un certain rang) : ceci suffit à utiliser le théorème sur la nature des séries à termes équivalents.
Or $\sum \dfrac{\pi}{n}$ diverge (série de Riemann divergente), donc $\sum u_n$ diverge.

Maths - Feuille d'exos n° 24

Intégration

I. Cours

Théorème 24.1 (Linéarité de l'intégrale)

L'intégrale sur le segment $[a;b]$ est une forme linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues :

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Théorème 24.2 (Positivité et croissance)

Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_{[a;b]} f = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

Corollaire 24.3

Si $f \geq g$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_{[a;b]} f \geq \int_{[a;b]} g$.

Corollaire 24.4

$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leq \int_{[a;b]} |f|$

Théorème 24.5 (Relation de Chasles)

Si f est continue sur I et si $(a;b;c) \in I^3$ (*quel que soit leur ordre*) alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Théorème 24.6 (Inégalité de la moyenne)

Si $b > a$, $\displaystyle\min_{[a;b]} f \leq \frac{\int_{[a;b]} f}{b-a} \leq \max_{[a;b]} f$

Définition 24.7 (Valeur moyenne)

On appelle ***valeur moyenne*** de f sur $[a;b]$ le nombre $\frac{\int_{[a;b]} f}{b-a}$.

Théorème 24.8

Si f est continue sur $[a;b]$ alors $\exists c \in [a;b], f(c) = \frac{\int_{[a;b]} f}{b-a}$

Théorème 24.9 (Intégrale d'une fonction continue positive)

Pour une fonction f continue positive, l'intégrale de f sur un segment est nulle si et seulement si f est la fonction nulle. Autrement dit,

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a;b];\mathbb{R}_+),\ \int_{[a;b]} f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a;b], f(x) = 0$$

On pourra penser aux astuces suivantes :

- dans une intégrale dépendant d'un paramètre entier, une intégration par partie peut permettre d'obtenir une relation de récurrence ;
- lorsqu'on cherche un équivalent d'une intégrale, une intégration par partie peut là encore être utile ;
- ***linéariser les polynômes trigonométriques*** à l'aide des formules d'Euler ;
- ***décomposer les fractions rationnelles en éléments simples*** (voir exercice 24.3) ;

- exprimer $\cos(x), \sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ puis effectuer un changement de variable ;
- exprimer $\mathrm{ch}(x), \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{th}(x)$ en fonction de $u = e^x$ puis effectuer un changement de variable.

Ex. 24.1 (Cor.) Calculer $I_1(x) = \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{sh}\, t}{1 + \mathrm{ch}\, t}\mathrm{d}t$ et $I_2(x) = \displaystyle\int^x \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$

Ex. 24.2 (Cor.) Montrer que $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$.

Ex. 24.3 (Cor.) Calculer $J = \displaystyle\int^x \frac{t^2+1}{(t-1)\left(t^2+2t+5\right)}\mathrm{d}t$

Méthode : Règles de Bioche

Dans une intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^b f\big(\cos(t), \sin(t), \tan(t)\big)\mathrm{d}t$:

- si $t \leftrightarrow -t$ laisse $f\big(\cos(t), \sin(t), \tan(t)\big)\mathrm{d}t$ invariante, le changement de variable $u = \cos(t)$ peut s'avérer intéressant ;
- si $t \leftrightarrow \pi - t$ laisse $f\big(\cos(t), \sin(t), \tan(t)\big)\mathrm{d}t$ invariante, le changement de variable $u = \sin(t)$ peut s'avérer intéressant ;
- si $t \leftrightarrow \pi + t$ laisse $f\big(\cos(t), \sin(t), \tan(t)\big)\mathrm{d}t$ invariante, le changement de variable $u = \tan(t)$ peut s'avérer intéressant.

Dans le cas d'intégrales de fonctions hyperboliques, les mêmes règles s'appliquent en remplaçant cos par ch, etc…

Ex. 24.4 (Cor.) Calculer des primitives de

$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \quad et \quad g : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$

en indiquant l'ensemble de validité des primitives obtenues.

Théorème 24.10

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Méthode

Ce théorème peut servir :

- pour calculer une intégrale ;
- pour déterminer la limite d'une somme.

Ex. 24.5 (Cor.) Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n+k}$.

II. Primitives et intégrales

Ex. 24.6 Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.

b. Montrer que si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.

c. Montrer que si f est T-périodique, alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_b^{b+T} f(t)\mathrm{d}t$.

Ex. 24.7 Linéariser $\cos^3(x)$ et en déduire une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$.

Ex. 24.8 Calculer : $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}(2-t)\mathrm{d}t \quad J = \int_0^3 |t-2|\mathrm{d}t$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2(t)\mathrm{d}t \quad L=\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad M=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+3}}$$
$$N=\int^x\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} \quad P=\int^x\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} \quad Q=\int^x\sin^3(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$$
$$R=\int^x\tan(t)\mathrm{d}t \quad S=\int^x t\operatorname{Arctan}(t)\mathrm{d}t \quad T=\int^x\ln^2(t)\mathrm{d}t$$
$$U=\int^x\operatorname{ch}^2(t)\mathrm{d}t \quad V=\int^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}} \quad W=\int^x\frac{2-t}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$$
$$X=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{\sin t} \quad Y=\int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}t}{5\operatorname{ch}(t)-4\operatorname{sh}(t)} \quad Z=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+\sin(2t)}$$

Ex. 24.9 Soit $n\in\mathbb{N}$ et $I_n=\int_1^e(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I_0 et I_1.

b. Exprimer pour tout $n\in\mathbb{N}$ I_{n+1} en fonction de I_n.

c. Calculer I_2, I_3 et I_4.

d. Montrer qu'il existe une suite d'entiers positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $I_n=(-1)^n(a_ne-n!)$.

e. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive.

f. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_n=\left\lfloor\frac{n!}{e}+\frac{1}{2}\right\rfloor$.

g. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{a_n}$ et en déduire une approximation rationnelle de e à 10^{-3} près.

Ex. 24.10

a. Montrer que $F: x\in\mathbb{R}\mapsto F(x)=\int_0^x\lfloor t\rfloor\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

b. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer les expressions de F sur $[0;2]$.

d. Montrer que F n'est pas partout dérivable.

Ex. 24.11 (Cor.) Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables qui vérifient

$$f'(t)-f(t)=e^t\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$$

Ex. 24.12 (Cor.) Résoudre l'équation différentielle $tf'(t)-f(t)+3t^2f(t)^2=0$ en donnant les intervalles sur lesquels la solution est valable.
[Indication : montrer d'abord que sur tout intervalle où f ne s'annule pas, $g(t)=\frac{t}{f(t)}$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.]

III. Sommes de Riemann, méthodes numériques

Ex. 24.13 Déterminer les limites des suites :

$$u_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k} \qquad v_n=\sum_{k=1}^n\frac{n}{(n+k)^2} \qquad w_n=\sum_{k=1}^n\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$$
$$x_n=\sum_{k=0}^n\frac{k}{k^2+n^2} \qquad y_n=\sum_{k=0}^{n^2}\frac{k}{k^2+n^2}$$

Ex. 24.14 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

a. Démontrer le théorème de convergence des sommes de Riemann.

b. ***Méthode des rectangles***

Majorer l'erreur commise en approximant $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par

$$R_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right).$$

c. ***Méthode des trapèzes***

Majorer l'erreur commise en approximant $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par

$$T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) + f\left(a + (k+1)\frac{(b-a)}{n}\right)}{2}.$$

IV. Pour finir

Ex. 24.15 Soient $f : x \in]0;+\infty[\mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ et $F : x \in]0;+\infty[\mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que F est bien définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

b. Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

c. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F(x) \geq 0$.

d. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$.

e. Montrer que $\forall x \in]0;1]$,
$\dfrac{1 + x\ln(x) - x}{2} \leqslant F(x) \leqslant 1 + x\ln(x) - x$.

Corrections

Cor. 24.1 : On pose $u=\operatorname{ch} t$, $du=\operatorname{sh} t dt$ d'où

$I_1(x)=\displaystyle\int^{\operatorname{ch} x}\frac{1}{1+u}du=\ln(1+\operatorname{ch} x)$.

Pour simplifier la racine carrée on pense à la formule $\operatorname{ch}^2 v=1+\operatorname{sh}^2 v$. On pose $t=\operatorname{sh} v$, $dt=\operatorname{ch} v dv$. Il faut aussi effectuer le changement de borne :

$\operatorname{sh} v=x \Leftrightarrow \dfrac{e^v-e^{-v}}{2}=x \Leftrightarrow (e^v)^2-2xe^v-1=0$. Après calcul du discriminant et en remarquant que $\exp>0$, on a donc $v=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. D'où :

$I_2(x)=\displaystyle\int^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\operatorname{ch}^2 v dv$.

Il suffit alors de simplifier $\operatorname{ch}^2 v$ en utilisant sa définition :

$\operatorname{ch}^2 v=\dfrac{e^{2v}+2+e^{-2v}}{4}=\dfrac{\operatorname{ch}(2v)+1}{2}$ ce qui conduit à

$I_2(x)=\dfrac{\operatorname{sh}\left[2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{4}$.

Cor. 24.2 : On intègre par partie :

$\displaystyle\int_2^x 1\times\frac{dt}{\ln t}=\left[\frac{t}{\ln t}\right]_2^x+\int_2^x\frac{tdt}{t\ln^2(t)}=\frac{x}{\ln x}-\frac{2}{\ln 2}+\int_2^x\frac{dt}{\ln^2(t)}$

Montrons que la partie restant à intégrer est négligeable devant l'intégrale de départ quand $x\to+\infty$. En particulier, on suppose $x>2$ et les deux intégrales sont des intégrales positives de fonctions positives.

Tout d'abord $\forall t>1$, $\dfrac{\frac{1}{\ln^2(t)}}{\frac{1}{\ln(t)}}=\dfrac{1}{\ln t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Donc $\forall\epsilon>0,\exists A\in\mathbb{R}, t>A\Rightarrow 0<\frac{1}{\ln^2(t)}<\frac{\epsilon}{2}\frac{1}{\ln(t)}$.

On découpe l'intégrale en deux morceaux pour $x>A$:

$0\le\displaystyle\int_2^x\frac{dt}{\ln^2(t)}=\int_2^A\frac{dt}{\ln^2(t)}+\int_A^x\frac{dt}{\ln^2(t)}<\int_2^A\frac{dt}{\ln^2(t)}+\frac{\epsilon}{2}\int_A^x\frac{dt}{\ln(t)}\le\int_2^A\frac{dt}{\ln^2(t)}+\frac{\epsilon}{2}\int_2^x\frac{dt}{\ln(t)}$

De plus, $\int_2^x\frac{dt}{\ln(t)}>\int_2^x\frac{dt}{t}=\ln x-\ln 2\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et $\int_2^A\frac{dt}{\ln^2(t)}$ est finie et indépendante de x. Donc :

$\forall\epsilon>0,\exists B\in\mathbb{R}, x>B\Rightarrow\dfrac{\int_2^A\frac{dt}{\ln^2(t)}}{\int_2^x\frac{dt}{\ln(t)}}<\dfrac{\epsilon}{2}$.Donc

$\forall\epsilon>0,\exists C=\max(A,B), x>C\Rightarrow 0\le\displaystyle\int_2^x\frac{dt}{\ln^2(t)}<\frac{\epsilon}{2}\int_2^x\frac{dt}{\ln(t)}+\frac{\epsilon}{2}\int_2^x\frac{dt}{\ln(t)}\le\epsilon\int_2^x\frac{dt}{\ln(t)}$ ce qui signifie que

$$\int_2^x\frac{dt}{\ln^2(t)}=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_2^x\frac{dt}{\ln(t)}\right)$$

On en conclut que $\displaystyle\int_2^x\frac{dt}{\ln(t)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x}{\ln x}$.

Cor. 24.3 : Décomposons $R: t\in\mathbb{R}\backslash\{1\}\mapsto\dfrac{t^2+1}{(t-1)(t^2+2t+5)}$ en éléments simples :

$R(t)=\dfrac{a}{t-1}+\dfrac{bt+c}{t^2+2t+5}$. On peut procéder soit par identification ou tenter d'être un peu plus astucieux :

$(t-1)R(t)=a+\dfrac{(bt+c)(t-1)}{t^2+2t+5}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}1=a+b$ et

$(t-1)R(t)=a+\dfrac{(bt+c)(t-1)}{t^2+2t+5}\underset{t\to1}{\longrightarrow}\dfrac{1}{4}=a$ donc $b=\dfrac{3}{4}$.

Enfin $R(0)=\dfrac{-1}{5}=-a+\dfrac{c}{5}$ donc $c=\dfrac{1}{4}$.

Calculons maintenant $4J$:

$4J=\displaystyle\int^x\frac{1}{t-1}+\frac{3t+1}{t^2+2t+5}dt=\ln|x-1|+\int^x\frac{3t+3-2}{t^2+2t+5}dt$.

La seconde intégrale se décompose en $K=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int^x\frac{2t+2}{t^2+2t+5}dt-2\int^x\frac{1}{t^2+2t+5}dt$.

Le premier terme est la primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$, le second se réduit en passant par la forme canonique :

$$\begin{aligned}\int^x\frac{1}{t^2+2t+5}dt&=\int^x\frac{1}{(t+1)^2+4}dt\\&=\frac{1}{2}\int^{\frac{x+1}{2}}\frac{1}{u^2+1}du\\&=\frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right)}{2}\end{aligned}$$

On a donc $J=\dfrac{\ln|x-1|}{4}+\dfrac{3\ln\left(x^2+2x+5\right)}{8}-\dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right)}{2}$.

Cor. 24.4 : ***Première méthode :***
$\dfrac{\cos(\pi+x)\mathrm{d}(\pi+x)}{\cos(\pi+x)+\sin(\pi+x)} = \dfrac{\cos x}{\cos x+\sin x}$. Posons donc $u=\tan t$ par application des règles de Bioche. On a $\mathrm{d}u = (1+\tan^2 t)\mathrm{d}t = (1+u^2)\mathrm{d}t$ et

$$I(x) = \int^x \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t = \int^{\tan(x)} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)(1+u^2)}.$$

En décomposant en éléments simples on obtient $\dfrac{1}{(1+u)(1+u^2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{1-u}{1+u^2}\right)$.

D'où $I(x) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(1+\tan x)+\mathrm{Arctan}(\tan x)-\frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)\right)$.

Soit après simplifications : $I(x) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(\cos x+\sin x)+x\right)$ valable sur tout intervalle de la forme $\left]\frac{-\pi}{4}+k\pi ; \frac{3\pi}{4}+k\pi\right[$.

Pour la seconde intégrale, il suffit de remarquer que $\dfrac{\cos x}{\cos x+\sin x}+\dfrac{\sin x}{\cos x+\sin x} = 1$ pour conclure que

$$\int^x \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(x-\ln(\cos x+\sin x)\right).$$

Deuxième méthode :
On remarque que les primitives de $f+g$ et $f-g$ sont simples à calculer puis on revient à celles de f et g.

Cor. 24.5 : On reconnaît une forme ressemblant à une somme de Riemann. En effet :

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2.$$

Or $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.
Donc u_n converge vers $\ln 2$.

Cor. 24.11 : **Analyse** : supposons qu'une telle fonction f existe. f est dérivable, donc continue, donc $f'(t)$ et $I = \displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$ sont bien définis. f est solution de l'équation différentielle $f'-f = I\exp$. Résolvons cette équation :
$\exists\lambda\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}, f(t) = \lambda e^t + Ite^t$.

De plus, $I = \displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \lambda e^u + Iue^u\mathrm{d}u = \lambda(e-1)+Ie-I(e-1) \Rightarrow \lambda = 0$.
Donc $\forall t\in\mathbb{R}, f(t) = Ite^t$.
Synthèse : $\forall k\in\mathbb{R}$, la fonction $f_k : t\in\mathbb{R}\mapsto kte^t$ vérifie
$\forall t\in\mathbb{R}, f_k'(t)-f_k(t) = ke^t$ et $\displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = ke-k(e-1) = k$ donc les fonctions de cette forme sont les solutions recherchées.

Cor. 24.12 :

- Sur tout intervalle où f ne s'annule pas, on pose $g(t) = \dfrac{t}{f(t)}$, $g'(t) = \dfrac{f(t)-tf'(t)}{f(t)^2} = 3t^2$ donc $g(t) = \dfrac{t}{f(t)} = t^3-k^3, k\in\mathbb{R}$.
- Sur tout intervalle où f ne s'annule pas, on a donc $f(t) = \dfrac{t}{t^3-k^3}$.
- On suppose maintenant $k=0$: $f(t) = \dfrac{t}{t^3} = \dfrac{1}{t^2}$ ne s'annule jamais et est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
- On suppose $k\neq 0$: $f(t)$ s'annule en $t=0$ et est définie sur chacun des trois intervalles de $\mathbb{R}\backslash\{0;k\}$. En 0, $f(t) = \dfrac{-t}{k^3}+o(t)$, elle est donc prolongeable en une fonction dérivable en 0 en prenant de part et d'autre de 0 la même constante d'intégration.
- Finalement les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $k\in\mathbb{R}, f_k(t) = \dfrac{t}{t^3-k^3}$ définies sur $]-\infty;k[$ et $]k;+\infty[$.

Troisième partie

TD

Maths - TD n° 1

Résolutions de systèmes linéaires

Dans l'ensemble du TD, on note $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Principe général

Notation

Étant donné un système de n équations à p inconnues, pour $i, j \in [\![1; n]\!]$, $i \neq j$, on note
- $L_i \leftrightarrow L_j$ l'opération qui consiste à ***échanger les lignes d'indices*** i ***et*** j ;
- $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ où $\lambda \neq 0, \mu \in \mathbb{K}$, l'opération qui consiste à ***remplacer la ligne d'indice*** i ***par la combinaison linéaire*** $\lambda L_i + \mu L_j$.

Définition 1.1 (Opérations élémentaires)

Les opérations correspondant aux deux notations données ci-dessus sont appelées ***opérations élémentaires sur les lignes*** d'un système linéaire.

Remarque

On ***retiendra*** les remarques suivantes :
- dans l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$, ***il est absolument nécessaire que*** $\lambda \neq 0$;
- deux cas fréquents de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ sont :
  - ⋆ $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ où $\lambda = 1 \neq 0$;
  - ⋆ $L_i \leftarrow \lambda L_i$ où $\lambda \neq 0, \mu = 0$.
- à priori, ***on ne peut effectuer qu'une seule opération élémentaire à la fois*** !

Le principe général de l'algorithme du pivot de Gauss est d'utiliser une ligne L_i du système pour éliminer une des inconnues de ***toutes les autres lignes*** à l'aide d'opérations élémentaires du type $L_j \leftarrow \lambda L_j + \mu L_i$ avec $\lambda \neq 0$.
On recommence cette étape jusqu'à obtenir :
- ou bien un système possédant une équation ne faisant plus intervenir qu'une seule inconnue : dans ce cas, on peut calculer la valeur de cette inconnue puis de proche en proche obtenir la valeur de chacune des inconnues ce qui conduit à ***une unique solution pour le système*** ;
- ou bien un système où certaines inconnues (appelées ***inconnues principales***) peuvent être calculées en fonction des autres inconnues (appelées ***inconnues secondaires***) : ce cas conduit à une infinité de solutions puisque chaque valeur (réelle ou complexe) des inconnues secondaires fournit une solution du système ;
- un troisième cas possible est que la résolution du système fasse apparaître une ligne du type $0 = 1$, sans inconnue, qui conduit à un système sans solution.

Ex. 1.1 Résoudre le système d'inconnues $(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 5 \\ x & + & 4y & + & 9z & + & 16t & = & 1 \\ x & + & 8y & + & 27z & + & 64t & = & -1 \\ x & + & 16y & + & 81z & + & 256t & = & -5 \end{array}\right.$$

Ex. 1.2 Résoudre les systèmes d'inconnues $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 5 \\ x-2y+4z & = & 6 \\ x+7y-5z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 5 \\ x-2y+4z & = & 6 \\ x+7y-5z & = & 3 \end{array}\right.$$

Ex. 1.3 Résoudre suivant la valeur du paramètre $u \in \mathbb{R}$ le système

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccc} (2u-1)x & + & (u+1)y & = & 2u+2 \\ (u-1)x & + & (u+1)y & = & u+1 \end{array} \right.$$

Ex. 1.4 Soient a, b, c et α quatre constantes réelles. Discuter et résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & \alpha \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & \alpha^2 \end{array} \right.$$

Ex. 1.5 [*] Résoudre avec $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $a_i \in \mathbb{R}^*$ et $s \in \mathbb{R}$ le système d'inconnues $x_1, ..., x_n$ réelles suivant

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \dfrac{x_1}{a_1} & = & \dfrac{x_2}{a_2} & = & \cdots & = & \dfrac{x_n}{a_n} \\ x_1 & + & \cdots & + & x_n & = & s \end{array} \right.$$

Ex. 1.6 Soient a, b deux complexes non nuls. Résoudre dans $\mathbb{C}^n$:
$\forall j \in [\![2;n]\!]$, $x_j = ax_{j-1} + b$ et $x_1 = ax_n + b$.

Maths - TD n° 2

Fonctions de référence, espaces vectoriels

Ex. 2.1 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit F l'ensemble des fonctions impaires de E et G l'ensemble des fonctions paires de E.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer, ***par analyse-synthèse***, que F et G sont supplémentaires.
3. Soit f une fonction de E. Que peut-on déduire de la question précédente concernant f ?
4. Soient $\mathcal{P} : \left\{ \begin{array}{lcl} E = F \oplus G & \to & E \\ f = f_1 + f_2 & \mapsto & \mathcal{P}(f) = f_2 \end{array} \right.$ et $\mathcal{I} : \left\{ \begin{array}{lcl} E = F \oplus G & \to & E \\ f = f_1 + f_2 & \mapsto & \mathcal{I}(f) = f_1 \end{array} \right.$.
   Que peut-on dire des applications $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$?

Définition 2.1 (Partie paire, partie impaire d'une fonction)

Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on appelle

- ***partie paire de*** f la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$;
- ***partie impaire de*** f la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Notation

Avec les mêmes hypothèses que dans la définition précédente, on notera

- $\mathcal{P}(f)$ la partie paire de f ;
- $\mathcal{I}(f)$ la partie impaire de f.

Ex. 2.2 Dans chaque cas, expliciter $\mathcal{P}(f)$ et $\mathcal{I}(f)$:

- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$;
- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$;
- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(kx)$ où $k \in \mathbb{Z}$;
- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

Ex. 2.3

1. Montrer que le produit de deux fonctions paires (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est une fonction paire.
2. Démontrer les propriétés similaires concernant le produit de deux fonctions impaires, ou le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Ex. 2.4

1. Exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
   Linéariser $\sin^3(x)\cos^2(x)$.
2. Exprimer en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$:
   •$\mathrm{ch}(2x)$; •$\mathrm{sh}(2x)$; •$\mathrm{ch}(3x)$; •$\mathrm{sh}(3x)$.
3. Exprimer $\mathrm{ch}(a+b)$, $\mathrm{sh}(a+b)$, $\mathrm{ch}(a-b)$ et $\mathrm{sh}(a-b)$ en fonction de $\mathrm{ch}(a)$, $\mathrm{sh}(a)$, $\mathrm{ch}(b)$ et $\mathrm{sh}(b)$.
   Linéariser $\mathrm{sh}^3(x)\,\mathrm{ch}^2(x)$.

Maths - TD n° 3

Suites récurrentes, convexité

Étude des suites récurrentes

Soit $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ une suite définie par récurrence associée à une fonction f réelle de la variable réelle. Les résultats suivants sont ***hors-programme*** : il faut les ***redémontrer*** pour chaque exercice sur les suites récurrentes, mais ils fournissent des ***méthodes*** pour l'étude de ces suites.

- Pour que l'existence de la suite u soit garantie il faut montrer que u_0 appartient à un ***intervalle*** I ***stable par*** f c'est-à-dire tel que $\forall x \in I, f(x) \in I$.
  On considère donc dans ce qui suit que $f : I \to I$.
- Si f est ***croissante*** sur I alors u est ***monotone***. Plus précisément :
  - ⋆ si $u_1 \geqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, et si f est croissante sur I alors u ***est croissante*** ;
  - ⋆ si $u_1 \leqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, et si f est croissante sur I alors u ***est décroissante***.

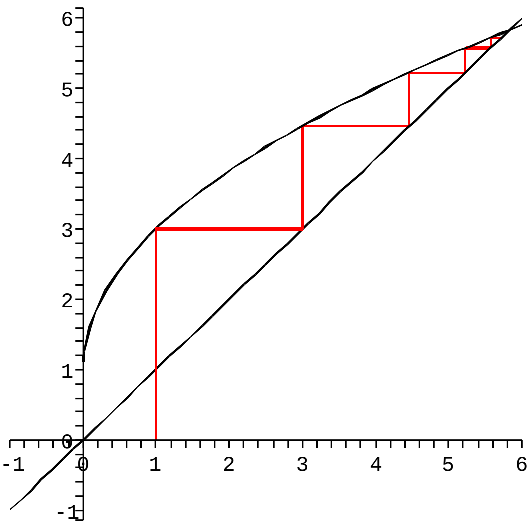
  On peut conclure à la stricte monotonie de u si f est strictement croissante et si $g(u_0) \neq 0$.
- Si f est ***décroissante*** sur I alors u ***n'est en général pas monotone*** (la seule exception venant de la possibilité que u soit constante).
  Cependant $f \circ f$ est alors croissante et on étudie séparément la monotonie des termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite en utilisant le point précédent.
- Si f ***est continue sur*** I et ***si la suite*** u ***converge vers*** l alors l est ***un point fixe de*** f c'est-à-dire vérifie $f(l) = l$.

.1. Exemples d'étude de suites récurrentes

Ex. 3.1 Soit $\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & r(v_n) = 2\sqrt{v_n} + 1 \end{array}\right.$.

1. Étudier la fonction r et montrer que son ensemble de définition est ***stable*** par r.
2. Démontrer que v est bien définie.

Ci-contre la représentation graphique de la suite v.
Pour obtenir une telle représentation graphique, on trace d'abord les représentations graphiques $y = x$ et $y = r(x)$.
On place alors $v_0 = 1$ sur l'axe des abscisses et on obtient $v_1 = r(v_0)$ comme l'ordonnée du point d'abscisse v_0 de la représentation graphique de r.
Pour placer v_1 en abscisse, il suffit de prendre l'abscisse du point d'ordonnée v_1 de la représentation graphique de la droite d'équation $y = x$.
On peut alors recommencer le même processus pour représenter v_2, v_3 etc...



3. Montrer que v est monotone.
4. Étudier la convergence de la suite v.

Ex. 3.2 Soit $\begin{cases} w_0 & = \frac{1}{2} \\ w_{n+1} & = f(w_n) = 1 + \frac{1}{w_n} \end{cases}$.

1. Étudier la fonction f et montrer qu'il existe un intervalle de définition qui contient $\dfrac{1}{2}$ et est ***stable*** par f.
2. Démontrer que w est bien définie.
3. Représenter graphiquement f sur l'intervalle trouvé à la première question, ainsi que les premiers termes de la suite w.
4. w est-elle monotone ?
5. Étudier la convergence de la suite w.

Ex. 3.3 (Cor.) On définit la suite t par $\begin{cases} t_0 & \in \mathbb{R} \\ t_{n+1} & = h(t_n) = \frac{t_n^2}{4} + 1 \end{cases}$

1. Montrer que t est bien définie.
2. Tracer dans un même repère la représentation graphique de h et de la première bissectrice.
3. Résoudre l'équation $h(x) = x$.
4. Montrer que t est croissante et en déduire ses comportements asymptotiques possibles.
5. On suppose $t_0 \in [0; 2]$. Que peut-on en déduire ?
6. Etudier le comportement de t lorsque $t_0 \notin [0; 2]$.

Ex. 3.4 (Cor.) ***Oral Mines*** Étudier la suite s définie par $s_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = 1 - s_n^2$.
[Indication : l'exercice a été donné sans question intermédiaire.
On pourra utiliser comme plan d'étude : étudier $k : x \mapsto 1 - x^2$ et montrer que $k([0; 1]) = [0; 1]$, représenter graphiquement k et la première bissectrice puis étudier les termes de rang pair et impair de la suite s pour parvenir à une conclusion.]

Ex. 3.5 (Cor.) [**] f désigne une application continue et strictement croissante, du segment $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifie : $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0, a], f(x) < x$.
On suppose, en outre, que l'on a au voisinage de 0, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$.
On considère des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $a_1 \in]0, a]$ et $b_1 \in]0, a]$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = f(a_n)$ et $b_{n+1} = f(b_n)$.
Montrer que l'on a $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$.

.2. Convexité

Ex. 3.6 Soient $p \in]1; +\infty[, q \in]1; +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que

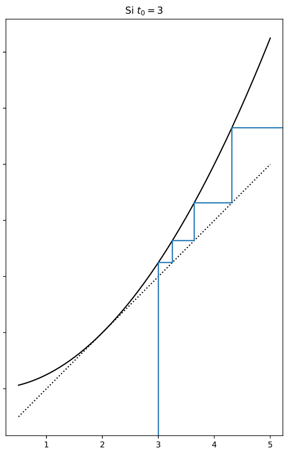
$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

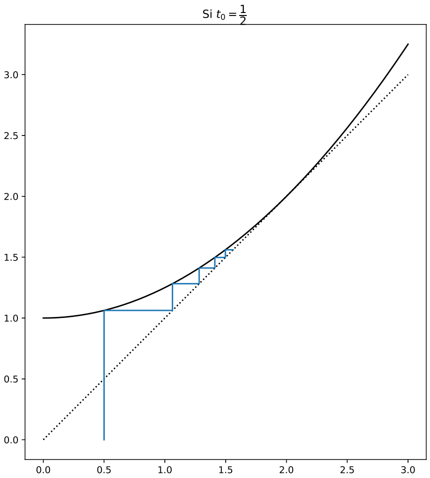
Ex. 3.7 En utilisant le résultat de l'un des exercices du cours, montrer que

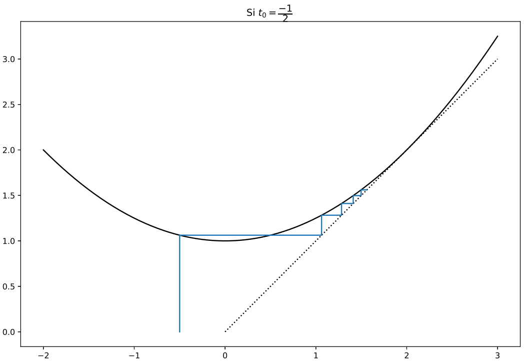
$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} \geqslant \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2}$$

Cor. 3.3 :

1. $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{4} + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R}$ est un intervalle stable. Donc la suite t est bien définie.
2. h est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$ (par affinité et translation d'une fonction de référence). On donne ci-dessous 3 représentations graphiques de h, la première bissectrices et les premiers termes de la suite t pour différentes valeurs de t_0.







3. $h(x) = x \Leftrightarrow x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
4. On a déjà vu que h est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc h passe par un minimum 1 en $x = 0$. Comme h est continue, $h(\mathbb{R}) = [1; +\infty[$. Notamment, $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par h.
   Si $t_0 \leqslant 0$ alors $t_1 \geqslant 0$ et, d'après la remarque précédente, tous les termes de la suites sont alors positifs.
   On peut donc considérer que la suite est à termes positifs quitte à commencer au rang 1.
   Supposons donc $t_0 \geqslant 0$. Comme h est croissante sur $\mathbb{R}_+$, la suite t est monotone.
   Or, d'après la question précédente, $h(x) - x = \dfrac{(x-2)^2}{4} \geqslant 0$. Donc la suite t est croissante.
   Si de plus elle est majorée, alors elle est convergente.
   Si au contraire elle n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
5. On suppose $t_0 \in [0; 2]$.
   h est croissante sur $[0; 2]$, et $h(0) = 1$, $h(2) = 2$. Donc $[0; 2]$ est un intervalle stable.
   Donc la suite t est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.
   Comme de plus h ***est continue*** et possède un unique point fixe 2, on a
   $$\lim_{n \to +\infty} t_n = 2$$
6. Supposons $t_0 > 2$. La suite t est croissante d'après la question 4.
   Montrons ***par l'absurde*** qu'elle n'est pas majorée : supposons qu'elle est majorée. Alors elle serait convergente, et comme h est continue, convergerait vers un point fixe de h.
   Or h possède un unique point fixe 2.
   On aurait donc
   $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 2$ d'une part et
   $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \geqslant t_0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n \geqslant t_0 > 2$ d'autre part, ce qui est absurde.
   Donc t n'est pas majorée et $\lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty$.
   Enfin, par parité de h, si $t_0 < 0$, $t_1 > 0$ et on se ramène à l'un des deux cas précédents suivant que $t_1 \in [0; 2]$ ou $t_1 \in]2; +\infty[$.

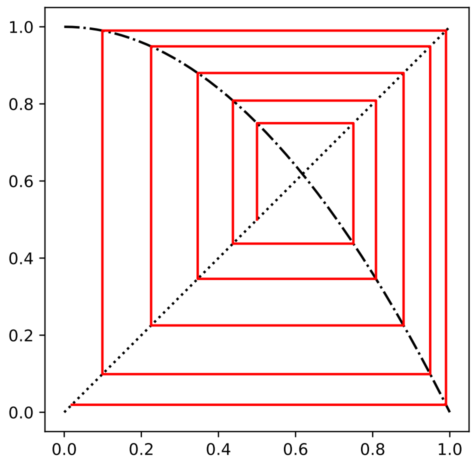
Cor. 3.4 : Soit $f : x \in [0; 1] \mapsto 1 - x^2$.
f est définie, continue et dérivable sur $[0; 1]$ et
$f'(x) = -2x$ donc f est strictement décroissante sur $[0; 1]$.
Or $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ donc $f([0; 1]) = [0; 1]$.
De plus, $s_0 = \dfrac{1}{2} \in [0; 1]$, donc la suite s est bien définie d'une part, et $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \in [0; 1]$ d'autre part.
La suite s est donc bornée.

f étant strictement décroissante on étudie les sous-suites extraites de rang pair et impair et pour cela, on étudie $h = f \circ f$.
$\forall x \in [0;1], h(x) = 1 - \left(1-x^2\right)^2 = 2x^2 - x^4$.
$h'(x) = 4x - 4x^3 = 4x\left(1-x^2\right) = 4xf(x) \geqslant 0$ puisque $x \in [0;1]$ est positif et $f(x) \in [0;1]$ aussi.
Donc $h = f \circ f$ est croissante, donc les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
$s_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
$s_2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} < \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.
$s_3 = 1 - \frac{49}{256} = \frac{207}{256} > \frac{192}{256} = \frac{3}{4}$.
Finalement, $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Ces deux suites étant bornées, elles convergent vers un point fixe de h (car h est continue).

Cherchons les points fixes de h :
$h(x) = x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1) = 0$ avec 1 pour racine évidente du second facteur.
Donc $h(x) = x \Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x-1) = 0$.
$\Delta = 1 + 4 = 5$ ce qui conduit donc aux 4 points fixes $\left\{0; 1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.
La dernière racine n'est pas dans l'intervalle $[0;1]$ donc ne peut pas être limite des deux suites extraites.
De même $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \in \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right[$ ne peut être limite des deux suites extraites.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} = 0$ (décroissante, bornée par 0 et $s_0 = \frac{1}{2}$, la seule limite possible est 0)
et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n+1} = 1$ (croissante, bornée par $s_1 = \frac{3}{4}$ et 1, la seule limite possible est 1).

Les deux suites extraites convergent vers des limites distinctes, donc s diverge.

Bonus : représentation graphique de la suite



Cor. 3.5 : Le cas où $a_1 = b_1$ étant évident, on peut supposer $a_1 < b_1$ (le dernier cas se traitant de manière identique).
f étant strictement croissante et comme $\forall x \in]0;a], 0 < f(x) < x$, on obtient immédiatement que les deux suites sont bien définies et strictement décroissantes.
Comme elles sont de plus minorées par 0, elles convergent. f étant continue, la limite est 0, unique point fixe de f.
Notamment, $\exists p \in \mathbb{N}^*, 0 < b_{p+1} < a_1 < b_1$ (car b converge vers 0).
On démontre alors par récurrence que

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}^*, b_{p+n} < a_n < b_n$$

Or $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(b_n) = b_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.
À nouveau, une récurrence sur p permet de montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+p} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.
La suite b étant strictement positive, on déduit de l'encadrement (E) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{b_{p+n}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < 1$$

puis, de l'équivalent $b_{n+p} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et du théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

c'est-à-dire, par définition, que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$$

Maths - TD n° 4

Introduction aux probabilités

I. La naissance des probabilités : correspondance entre *Blaise Pascal* et *Pierre de Fermat*

L'ensemble de la correspondance connue de **Blaise Pascal** (voir note 1 page 15) peut être consulté sur **Gallica** à l'adresse suivante : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69975r. Nous allons nous intéresser plus particulièrement à la lettre du 29 juillet 1654 à **Pierre de Fermat** (voir note 2 page 267) :
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69975r/f204.image.
Le problème discuté dans la correspondance que nous allons détailler est le suivant : deux joueurs jouent à un jeu de hasard en trois parties gagnantes. C'est-à-dire que celui des deux qui remporte trois parties en premier, remporte la mise. Par suite d'un empêchement, ils doivent arrêter leur jeu avant la fin. Comment doivent-ils alors se répartir la mise suivant le nombre de parties remportées par chacun pour que cette répartition tienne un compte juste de l'avantage que l'un ou l'autre des deux joueurs a pris sur le second ?

De Blaise Pascal à Fermat : le 29 juillet 1654

« Monsieur,
L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis[1] , que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les partis des dés et des parties dans la parfaite justesse ; j'en suis tout satisfait car je ne doute plus maintenant que je sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous[...]
Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à l'idée dans cette recherche ; mais parce que la peine des combinaisons est excessive j'en ai trouvé un abrégé, et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots ; car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.
Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, 3 parties, et chacun a mis 32 pistoles en [jeu].
Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles ; si l'autre la gagne ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.
Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils ne veulent point hasarder cette partie, et se hasarder sans la jouer, le premier doit dire : "*Je suis sûr d'avoir* 32 *pistoles car la perte même me les donne ; mais pour les* 32 *autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ;* ***le hasard est égal*** *; partageons donc ces* 32 *pistoles* ***par la moitié****, et me donnez outre cela, mes* 32 *qui me sont sûres.*" Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.
Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie... »

Questions

1. En suivant le même raisonnement que Pascal, dire comment les deux joueurs doivent se partager la mise de 64 pistoles s'ils arrêtent le jeu alors que le premier joueur gagne 2 parties à 0.
2. Comment les deux joueurs doivent se partager la mise de 64 pistoles s'ils arrêtent le jeu alors qu'il y a égalité 1 partie partout ?
3. Comment les deux joueurs doivent se partager la mise de 64 pistoles s'ils arrêtent le jeu alors que le premier joueur gagne 1 partie à 0 ?

1. Cette lettre ne nous est pas parvenue. ***Parti*** (au masculin) est ici à prendre au sens de ***répartition***.

De Blaise Pascal à Fermat : le 29 juillet 1654 (suite)

« [...] Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une nouvelle partie, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie, donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : “Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 ***par la moitié***. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 ***par la moitié***, prenez en 12 et moi 12, qui, avec 32, font 44.”

Or, par ce moyen, vous voyez, par les simples soustractions, que pour la première partie il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles, pour la seconde autres 12, et pour la dernière 8.

Or, pour ne plus faire de mystère, puisque vous voyez aussi bien tout à découvert, et que je n'en faisais que pour voir si je ne me trompais pas, la valeur (j'entends la valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de deux est double de la dernière partie de trois et quadruple de la dernière partie de quatre et octuple de dernière partie de cinq, etc... »

Questions

1. Que signifie Pascal par la phrase : « ...pour la première partie il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles, pour la seconde autres 12, et pour la dernière 8. » ?
2. Au sens où l'entend Pascal, quelle est la « valeur de la dernière partie de deux », la « valeur de la dernière partie de trois », la « valeur de la dernière partie de quatre » ?
3. Calculer la « valeur de la dernière partie de cinq ».
4. Comment généraliser ce résultat ?

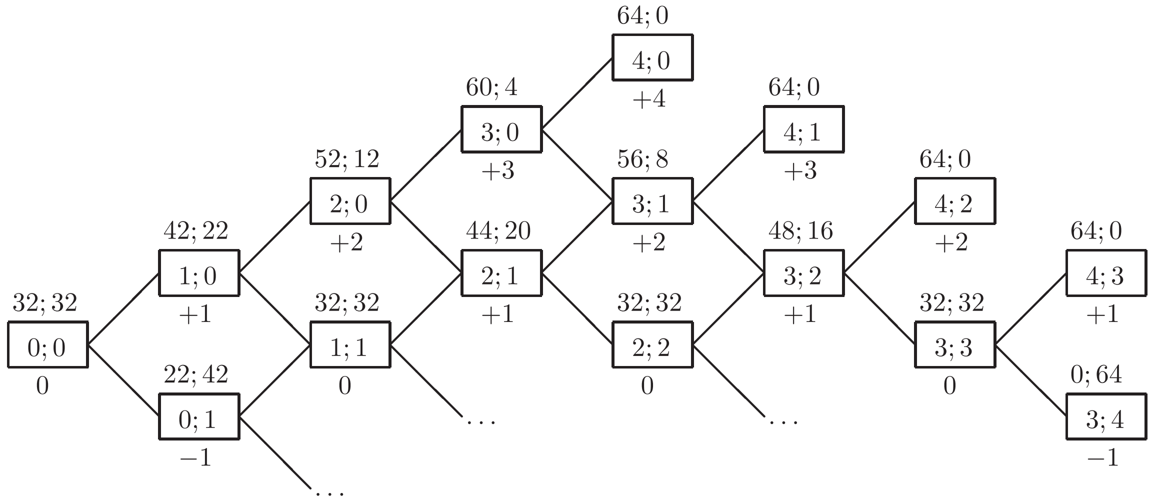
De Blaise Pascal à Fermat : le 29 juillet 1654 (suite)

« Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver : elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser, et voici le problème dont je faisais tant de cas, comme en effet il me plaît fort :

Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première. »

Questions

1. Représenter graphiquement à l'aide d'un arbre tous les scores possibles d'un jeu en 4 parties gagnantes depuis le début à $0-0$ jusqu'à la victoire d'un des deux joueurs.
2. Représenter sur cet arbre la répartition des mises que Pascal préconise en cas d'arrêt précoce du jeu dans le cas où chaque joueur met 32 pistoles en jeu.
3. Expliquer pourquoi cet arbre contient les arbres des jeux en 1, 2 et 3 parties gagnantes.
4. Calculer la valeur de chaque partie au sens où l'entend Pascal dans le cas d'un jeu en 5 parties gagnantes.
5. Quelle est la réponse au problème que Pascal se pose : « Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première. » ?



Légende :

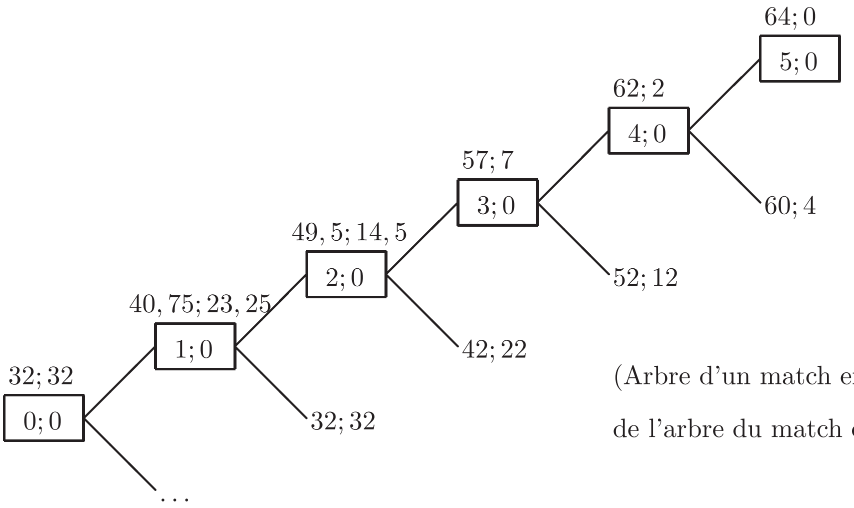
Partis ou ***répartition des gains***

Score

Avantage

L'arbre ci-dessus représente tous les scores possibles lors d'un match en 4 manches gagnantes (la partie inférieure de l'arbre qui est manquante est l'exacte symétrique de la partie supérieure). La répartition des gains en cas d'arrêt prématuré de la partie a été calculée selon la méthode indiquée par Pascal.
Si le score en arrive à $1;1$, il suffit pour qu'un joueur gagne la partie qu'il gagne 3 manches. Autrement dit, à $1;1$, le reste de la partie se joue en 3 manches gagnantes.
De même, à $2;2$, le reste de la partie se joue en 2 manches gagnantes. Et à $3;3$, le reste de la partie se joue en 1 manche gagnante, c'est-à-dire que celui des deux qui gagne la manche suivante a gagné la partie.
Ceci nous permet d'affirmer que l'arbre de la répartition des gains pour un match en 1 manche gagnante se trouve inclus dans l'arbre pour un match en 2 manches gagnantes, qui se trouve inclus dans l'arbre pour un match en 3 manches gagnantes, qui se trouve inclus dans l'arbre pour un match en 4 manches gagnantes etc...

Pour construire l'arbre de la répartition des gains pour un match en 5 manches gagnantes, il suffit donc de construire les bords de l'arbre ci-dessus, et comme l'arbre est symétrique, de construire le bord supérieur.



(Arbre d'un match en 4 manches gagnantes à l'intérieur de l'arbre du match en 5 manches gagnantes.)

Finalement, au sens où l'entend Pascal et pour une mise de 32 pistoles par joueur :

- la première manche d'un match en 1 manche gagnante vaut 32 pistoles ;
- la première manche d'un match en 2 manches gagnantes vaut 16 pistoles ;
- la première manche d'un match en 3 manches gagnantes vaut 12 pistoles ;
- la première manche d'un match en 4 manches gagnantes vaut 10 pistoles ;
- la première manche d'un match en 5 manches gagnantes vaut 8,75 pistoles.

D'une manière générale, pour un match en n manches gagnantes, Pascal propose la formule suivante pour le calcul de la valeur de la première manche lorsque chaque joueur a fait une mise de M :

la première manche d'un match en** n **manches gagnantes vaut $M \times \dfrac{\texttt{produit des } (\texttt{n}-1) \texttt{ premiers nombres impairs}}{\texttt{produit des } (\texttt{n}-1) \texttt{ premiers nombres pairs}}$

Ce qui appliqué aux cas déjà calculés, donne :

- 2 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{M}{2}$
- 3 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1 \times 3}{2 \times 4} = \dfrac{3M}{8}$
- 4 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} = \dfrac{5M}{16}$
- 5 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8} = \dfrac{35M}{128}$

Généralisation :

1. donner une formule explicite pour la valeur de la première manche d'un match en n manches gagnantes à l'aide de factorielles et de puissances de 2 ;
2. combien vaut la $k^{\text{ième}}$ manche d'un match en n manches gagnantes ?

Maths - TD n° 5

Résolution du problème des partis

Le but de ce TD est de donner une formulation moderne au problème des partis discuté par **Blaise Pascal** (voir note 1 page 15) et **Pierre de Fermat** (voir note 2 page 267) que nous avons introduit dans le TD n°4.

On rappelle que ce problème est le suivant : deux joueurs jouent à un jeu de hasard en $n \in \mathbb{N}^*$ manches gagnantes. C'est-à-dire que celui des deux qui remporte n manches en premier, remporte la mise. Par suite d'un empêchement, ils doivent arrêter leur jeu avant la fin. Comment doivent-ils alors se répartir la mise suivant le nombre de manches remportées par chacun pour que cette répartition tienne un compte juste de l'avantage que l'un ou l'autre des deux joueurs a pris sur le second ?

I. Modélisation du problème

I.1. Discussion sur le travail de modélisation d'un problème de probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de manches garantissant la victoire aux joueurs (autrement dit, le jeu est en n manches gagnantes).

L'objet de ce paragraphe est de formaliser le problème posé c'est-à-dire d'en donner un modèle permettant à la fois de décrire correctement les situations qui peuvent survenir, de représenter les différentes notions et grandeurs pertinentes et d'énoncer l'hypothèse d'équiprobabilité (« le hasard est égal » nous dit Pascal) conduisant au calcul des probabilités.
Notamment, il nous faut préciser :

- l'univers, et pour cela s'interroger sur les événements intervenant dans le problème posé ;
- les variables aléatoires intéressantes.

Comme nous le verrons, plusieurs modélisations sont possibles, ***chacune ayant un intérêt***, chacune présentant des avantages et des inconvénients. Notamment certaines modélisations faciliteront le calcul des probabilités, d'autres permettront d'exprimer plus simplement des événements ayant un intérêt particulier.

Commençons par suivre Pascal dans sa modélisation : son raisonnement se fonde sur les ***scores*** respectifs des joueurs. Un premier modèle consiste donc à faire intervenir l'***univers des scores***. En numérotant les deux joueurs, on peut ainsi représenter un événement élémentaire par la suite des couples de scores des deux joueurs du début à la fin de la partie. Un événement élémentaire est donc dans ce modèle une liste de points du plan $\mathbb{N}^2$ vérifiant les conditions suivantes :

- le premier élément de la liste est le point $(0;0)$;
- deux éléments successifs de la liste sont de la forme $(x;y),(x+1;y)$ ou $(x;y),(x;y+1)$;
- le dernier élément de la liste est soit de la forme $(n;y)$ où $y \in [\![0;n-1]\!]$, soit de la forme $(x;n)$ où $x \in [\![0;n-1]\!]$.

Une telle modélisation de la partie s'appelle ***marche aléatoire***.

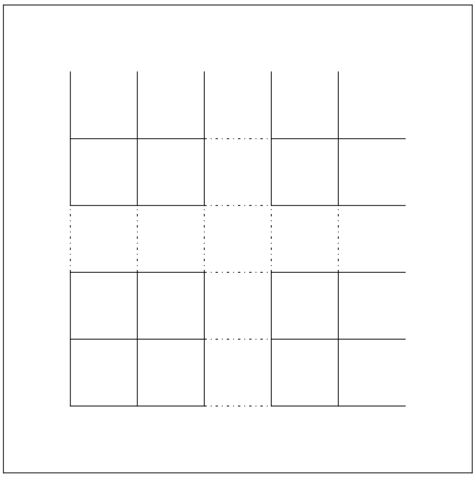
Une seconde modélisation possible consiste à ne donner pour chaque manche que le vainqueur de cette manche, en attribuant par exemple à l'un des joueurs la lettre A et à l'autre la lettre B. Une partie, c'est-à-dire un événement élémentaire, est alors représentée par un ***mot*** formé des lettres A et B et vérifiant les propriétés suivantes :

- un mot contient exactement n lettres A ou exactement n lettres B ;
- si un mot contient n lettres A, il se termine par un A (la partie est terminée dès qu'un joueur a gagné n manches) et contient alors moins de $n-1$ lettres B ;
- réciproquement, si un mot contient n lettres B, il se termine par un B et contient alors moins de $n-1$ lettres A.

Nous allons entrer dans le détail de chacune de ces modélisations.

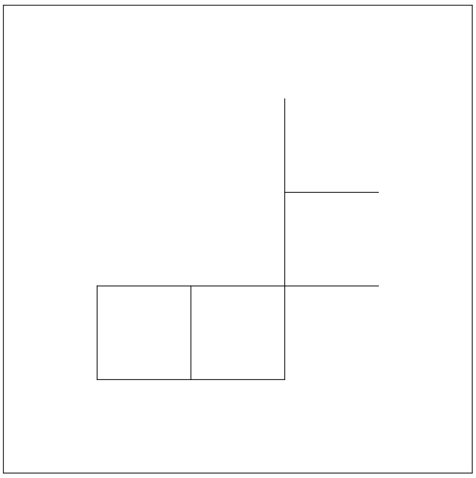
I.2. Modélisation par une marche aléatoire

a) Représentation graphique



Une partie est ici un chemin reliant l'origine au point dont les coordonnées représentent le score final de la partie.
La figure de gauche représente toutes les parties possibles.

b) Notation pour les événements



Nous noterons $(x; y)$ l'événement réunissant toutes les parties pour lesquelles $(x; y)$ est un score ayant été atteint.
Par exemple $(0; 0) = \Omega_n$ et $(n; 0)$ est un événement élémentaire puisqu'une seule partie peut conduire à ce score final.
En revanche $(1; n)$ ***n'est pas un événement élémentaire***.
La représentation graphique ci-contre représente l'événement $(2; 1)$ dans le cas $n = 3$.

c) Variable aléatoire

Nous noterons G_n la variable aléatoire donnant la somme gagnée par le premier joueur en fin de partie lors d'une partie en n manches gagnantes. Nous supposerons que G_n est exprimé en « mise de départ » si bien que G_n n'a que deux valeurs possibles, $G_n : \Omega_n \to \{-1; 1\}$, puisque soit le premier joueur a perdu sa mise, soit il a remporté celle du second joueur.

d) Avantages et inconvénients du modèle des marches aléatoires

Le modèle que nous venons de décrire possède un premier (et énorme) avantage : il est très proche du texte de Blaise Pascal et va nous permettre de formaliser ses arguments.
Par ailleurs, il possède aussi l'avantage d'être associé à une représentation graphique très intuitive pouvant servir de support à la pensée et à l'argumentation. Enfin, les notations $(x; y)$ que nous venons de définir pour les événements sont parlantes et efficaces.

En revanche, le calcul des probabilités n'y est pas aisé ce qui justifie que l'on introduise un second modèle.

I.3. Modélisation par un mot

a) Variables aléatoires

Étant donné un mot représentant une partie (c'est-à-dire, on le rappelle, comportant n lettres A, moins de $n-1$ lettres B et se terminant par A ou réciproquement comportant n lettres B, moins de $n-1$ lettres A et se terminant par B), on notera :

- $X_n : \Omega_n \to [\![0; n]\!]$ la variable aléatoire donnant le nombre de lettres A du mot, c'est-à-dire le score final du premier joueur ;
- $Y_n : \Omega_n \to [\![0; n]\!]$ la variable aléatoire donnant le nombre de lettres B du mot, c'est-à-dire le score final du second joueur ;
- $G_n : \Omega_n \to \{-1; 1\}$ la variable aléatoire donnant le gain du premier joueur, c'est-à-dire valant 1 si le mot se termine par A et -1 s'il se termine par B.

b) Avantages et inconvénients du modèle des mots

Les avantages de ce modèle sont les inconvénients du précédent et réciproquement !

I.4. À propos du travail d'un élève

Dans les problèmes de probabilités un tant soit peu complexes, ***on n'attend pas d'un élève une formalisation aussi précise***. Cependant, ***la plupart des erreurs dans le domaine des probabilités proviennent d'une mauvaise modélisation de l'expérience aléatoire considérée***.
Aussi, il est ***plus que recommandé*** de prendre le temps de formaliser pour soi-même un problème avant même de tenter de répondre aux questions. On prendra ensuite soin de préciser ***rapidement*** les modèles que l'on souhaite utiliser au travers ***des différentes formes*** que prendra l'univers (une simple phrase suffit), les définitions et notations des événements et des variables aléatoires que l'on jugera utiles.
Il est aussi ***plus que recommandé*** de faire des représentations graphiques pour étayer son argumentation. Il est en revanche inutile de les expliquer : le lecteur est à même de les interpréter seul.
Une argumentation claire vaut mieux que des tartines de calculs incompréhensibles. La formalisation n'a pas pour but de remplacer l'argumentation, elle a pour but ***de l'éclairer*** !

On rappelle que la partie se joue en $n \in \mathbb{N}^*$ manches gagnantes : la partie s'arrête lorsque l'un des joueurs gagne sa n-ième manche, ce joueur est déclaré vainqueur et remporte les mises.
Soit $p \in [\![0; n-1]\!]$.

1. Calculer la probabilité que le premier joueur remporte la partie n manches à p.
2. Calculer $\mathbb{E}(G_n)$.
3. Soient $(x; y) \in [\![0; n-1]\!] \times [\![0; p]\!]$. Calculer la probabilité que le premier joueur remporte la partie n manches à p sachant que le score actuel est x manches à y.
4. Soit C un événement de probabilité non nulle.
   Démontrer que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{|C}$ est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega_n)$.

   On définit pour une variable aléatoire Z l'***espérance conditionnelle de*** Z ***sachant*** C par

   $$\mathbb{E}_{|C}(Z) = \sum_{i \in Z(\Omega_n)} i\mathbb{P}_{|C}(Z = i)$$

   Le résultat de la question précédente garantit que l'espérance conditionnelle vérifie toutes les propriétés de l'espérance.
5. Si l'on suit l'argument du TD n°4 selon lequel l'arbre des parties en $p \in [\![1; n-1]\!]$ manches gagnantes est inclus dans celui en n manches gagnantes, qu'est-on en droit d'attendre de l'espérance conditionnelle de G_n sachant que le score est x manches à y ?
   Indication : on pourra supposer ici que $x \geqslant y$.
6. Que vaut l'espérance de G_n sachant que le premier joueur mène n manches à 0 ?
7. Calculer l'espérance de G_n sachant que le premier joueur mène $n-1$ manches à 0.
8. Étant donnés deux entiers positifs q et r, on définit $F_{q,r} = \sum_{p=0}^{q} \left(\frac{1}{2}\right)^p \binom{r+p}{r}$.
   - Montrer que $F_{q,r+1} = 2F_{q+1,r} - \frac{1}{2^q}\binom{q+r+2}{r+1}$.
   - En déduire que $F_{q,r} = 2^{r+1} - \frac{1}{2^q}\sum_{p=0}^{r}\binom{q+r+1}{p}$
9. Calculer, pour $k \in [\![1; n]\!]$, l'espérance, que l'on notera $E_{n-k,n}$, de G_n sachant que le premier joueur mène $n-k$ manches à 0.
   Indication : on exprimera $E_{n-k,n}$ à l'aide des coefficients $F_{q,r}$ définis à la question précédente.
10. En déduire une expression simplifiée, pour $n \geqslant 2$, de l'espérance de G_n sachant que le premier joueur mène 1 manche à 0.
    Indication : on demande ici une expression ne faisant intervenir ni les coefficients $F_{q,r}$, ni signe $\sum$.
11. Et un peu de Python ! En utilisant le module `random`, écrire un code permettant de simuler cette expérience aléatoire et de vérifier les expressions obtenues pour $E_{n-1,n}$ et $E_{1,n}$.
12. Pascal affirme (ici : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69975r/f212.image) que, pour $k \in [\![1; n]\!]$ fixé, $E_{k,n} - E_{k-1,n}$ ***décroît quand*** n ***croît*** pour les valeurs de k comprises entre 1 et 3, mais ***croît quand*** n ***croît*** pour les autres valeurs de k.
    Est-ce vrai ?