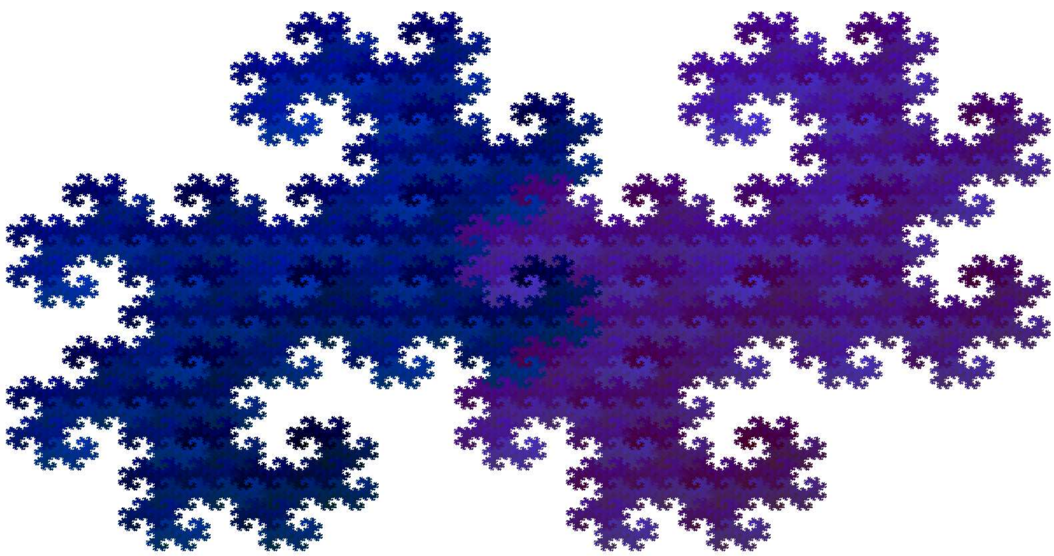
# Programmes de colles, devoirs PCSI


*François Coulombeau*
*coulombeau@gmail.com*
*Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)*

6 juin 2024

# Première partie

# Programmes de colles

Programme de colles n°1

# Du 18 au 22 septembre 2023

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement.

## Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) ***Factoriser deux entiers*** $n$ ***et*** $p$ ***(au choix du colleur) en produit de facteurs premiers.***
   ***Calculer*** $\mathrm{PGCD}(n;p)$ ***et*** $\mathrm{PPCM}(n;p)$.
2) ***Donner la forme simplifiée des sommes*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ ***et*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3) ***Énoncer la proposition concernant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.***
4) ***Énoncer la proposition concernant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.***
5) ***Donner une factorisation pour*** $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$ ***de*** $x^n - y^n$.
6) ***Montrer que pour tout*** $i \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ ***puis simplifier pour*** $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$.
7) ***Donner la définition des coefficients binomiaux.***
   ***Énoncer et démontrer la formule de Pascal.***
8) ***Énoncer et démontrer la formule du binôme.***
9) ***Démontrer que*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
   ***Simplifier*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.
10) ***Démontrer que*** $\sqrt{2}$ ***est irrationnel.***

## Programme pour les exercices : sur 12 points

Calculs de sommes finies, en utilisant notamment les sommes du cours : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique/géométrique, formule du binôme.
Démonstrations par récurrence ou par l'absurde.
***ATTENTION*** : pas encore de nombres complexes, quelques élèves ne les ayant jamais vus en Terminale.
Par ailleurs, on pourra donner des sommes doubles ou triangulaires pour les élèves montrant une bonne maîtrise des sommes simples.

Programme de colles n°2

# Du 25 au 29 septembre 2023

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Factoriser deux entiers $n$ et $p$ (au choix du colleur) en produit de facteurs premiers. Calculer PGCD$(n;p)$ et PPCM$(n;p)$.
2) Donner la forme simplifiée des sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3) Énoncer la proposition concernant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.
4) Énoncer la proposition concernant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.
5) Donner une factorisation pour $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$ de $x^n - y^n$.
6) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ puis simplifier pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$.
7) Donner la définition des coefficients binomiaux. Énoncer et démontrer la formule de Pascal.
8) Énoncer et démontrer la formule du binôme.
9) Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.
10) Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
11) ***Simplifier*** $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |i-j|$.
12) ***Énoncer les propriétés concernant la négation des opérateurs logiques (propriété 2.5 du cours) et la négation des quantificateurs (axiome 2.21 du cours). Donner la négation d'une propriété quantifiée (au choix du colleur).***
13) ***Donner la définition d'une application injective puis la traduction symbolique de cette définition. Faire de même pour les applications surjectives. Donner la définition d'une application bijective.***
14) ***Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues (au choix du colleur).***

## Programme pour les exercices : sur 12 points

Calculs de sommes finies, en utilisant notamment les sommes du cours : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique/géométrique, formule du binôme.

Démonstrations par récurrence ou par l'absurde.

***Étude d'une fonction (niveau spé maths). Résolution d'équations (notamment du troisième degré avec solution évidente) ou de systèmes d'équations, éventuellement paramétrés. On accordera le plus grand soin à l'exactitude des raisonnements lorsqu'une disjonction de cas est nécessaire suivant les valeurs du paramètre.***

***ATTENTION*** : pas encore de nombres complexes, quelques élèves ne les ayant jamais vus en Terminale.

Programme de colles n°3

# Du 2 au 6 octobre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Simplifier $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |i-j|$.
2) Énoncer les propriétés concernant la négation des opérateurs logiques (propriété 2.5 du cours) et la négation des quantificateurs (axiome 2.21 du cours).
   Donner la négation d'une propriété quantifiée (au choix du colleur).
3) Donner la définition d'une application injective puis la traduction symbolique de cette définition. Faire de même pour les applications surjectives.
   Donner la définition d'une application bijective.
4) Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues (au choix du colleur).
5) ***Étant donné un nombre complexe, donner*** $|z|, \mathcal{R}e\,(z)\,, \mathcal{I}m\,(z)$ ***à l'aide de*** $z$ ***et*** $\overline{z}$***. Donner*** $\dfrac{1}{z}$ ***(pour*** $z \neq 0$***) à l'aide de*** $\overline{z}$ ***et*** $|z|$.
6) ***Énoncer les deux inégalités triangulaires.***
7) ***Énoncer les principales propriétés de*** $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ ***(propriété 3.17 du cours).***
8) ***Mettre sous forme trigonométrique un (ou plusieurs) nombre(s) complexe(s) donné(s) sous forme algébrique par le colleur.***
9) ***Énoncer les formules de Moivre et d'Euler.***
10) ***Développer*** $\cos(5x)$ ***ou*** $\sin(5x)$ ***ou linéariser*** $\cos^p(x)\sin^q(x)$ ***avec*** $p+q=5$ ***(au choix du colleur).***

## Programme pour les exercices : sur 12 points

Étude d'une fonction (niveau spé maths). Résolution d'équations (notamment du troisième degré avec solution évidente) ou de systèmes d'équations, éventuellement paramétrés. On accordera le plus grand soin à l'exactitude des raisonnements lorsqu'une disjonction de cas est nécessaire suivant les valeurs du paramètre.

***Nombres complexes : module, partie réelle, partie imaginaire, forme algébrique, argument, forme trigonométrique, notation*** $e^{i\theta}$***, utilisation en trigonométrie***.

***Utilisation des nombres complexes dans les sommes finies.***

Programme de colles n°4

# Du 9 au 13 octobre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Étant donné un nombre complexe, donner $|z|, \mathcal{R}e\,(z)\,, \mathcal{I}m\,(z)$ à l'aide de $z$ et $\overline{z}$.
   Donner $\dfrac{1}{z}$ (pour $z \neq 0$) à l'aide de $\overline{z}$ et $|z|$.
2) Énoncer les deux inégalités triangulaires.
3) Énoncer les principales propriétés de $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ (propriété 3.17 du cours).
4) Mettre sous forme trigonométrique un (ou plusieurs) nombre(s) complexe(s) donné(s) sous forme algébrique par le colleur.
5) Énoncer les formules de Moivre et d'Euler.
6) Développer $\cos(5x)$ ou $\sin(5x)$ ou linéariser $\cos^p(x)\sin^q(x)$ avec $p + q = 5$ (au choix du colleur).
7) ***Donner quelques valeurs remarquables de*** $\sin$ ***et*** $\cos$ ***(mais pas*** $\tan$***) ou quelques formules sur les angles associés, ou l'ensemble des solutions de*** $\cos(x) = \cos(x_0)$ ***ou*** $\sin(x) = \sin(x_0)$ ***(au choix du colleur).***
8) ***Énoncer et démontrer les formules d'addition pour*** $\cos$ ***et*** $\sin$***.***
9) ***Énoncer et démontrer les formules d'addition pour*** $\tan$***.***
10) ***Énoncer (par cœur ou à savoir redémontrer très rapidement) les formules de duplication (3 formules pour*** $\cos(2x)$***) et les dérivées de*** $\cos$, $\sin$ ***et*** $\tan$ ***(2 expressions pour la dérivée de cette dernière).***
11) ***Quelques formules (au choix du colleur) à connaître par cœur ou à savoir redémontrer très rapidement parmi*** $\cos(a)\cos(b)$***,*** $\sin(a)\sin(b)$***,*** $\sin(a)\cos(b)$***,*** $\cos(p) \pm \cos(q)$***,*** $\sin(p) \pm \sin(q)$***.***

## Programme pour les exercices : sur 12 points

Nombres complexes : module, partie réelle, partie imaginaire, forme algébrique, argument, forme trigonométrique, notation $e^{i\theta}$, utilisation en trigonométrie.
Utilisation des nombres complexes dans les sommes finies.
***Trigonométrie pure : formules d'addition, de linéarisation, factorisation de*** $\cos(p) + \cos(q)$ ***et formules similaires.***
***Utilisation pour l'étude de fonctions (trigonométriques, notamment*** $\tan$***), la résolution d'équations trigonométriques, le calcul d'intégrales (niveau SpeMaths, avec linéarisation de polynômes trigonométriques par exemple), simplifications de sommes finies, etc...***

Programme de colles n°5

# Du 16 au 20 octobre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Donner quelques valeurs remarquables de sin et cos (mais pas tan) ou quelques formules sur les angles associés, ou l'ensemble des solutions de $\cos(x) = \cos(x_0)$ ou $\sin(x) = \sin(x_0)$ (au choix du colleur).
2) Énoncer et <u>démontrer</u> les formules d'addition pour cos et sin.
3) Énoncer et <u>démontrer</u> les formules d'addition pour tan.
4) Énoncer (par cœur ou à savoir redémontrer très rapidement) les formules de duplication (3 formules pour $\cos(2x)$) et les dérivées de cos, sin et tan (2 expressions pour la dérivée de cette dernière).
5) Quelques formules (au choix du colleur) à connaître par cœur ou à savoir redémontrer très rapidement parmi $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\sin(a)\cos(b)$, $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
6) ***Résoudre l'inéquation d'inconnue $x$ réelle : $\left|x + \frac{1}{x}\right| > 3$.***
7) ***Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre totale compatible avec les opérations de $(\mathbb{C}, +, \times)$.***
8) ***Définitions de la valeur absolue d'un réel et de la partie entière d'un réel. Principales propriétés de la valeur absolue et de la partie entière.***
   On attend à minima les propriétés suivantes : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}_+$

   | | | |
   |---|---|---|
   | $-\lvert x\rvert \leqslant x \leqslant \lvert x\rvert$ | $\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert \times \lvert y\rvert$ | $\lvert x\rvert \leqslant r \Leftrightarrow -r \leqslant x \leqslant r$ |
   | Inégalités triangulaires | | $\lvert x\rvert \geqslant r \Leftrightarrow (x \leqslant -r \textbf{ ou } x \geqslant r)$ |
   | $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ | | $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$ |

9) ***Donner la définition de la dérivée en un point. Équation de la tangente en ce point.***
10) ***Formules de dérivation : somme, produit, inverse, quotient, composée de fonctions.***
11) ***Énoncer le théorème de la bijection continue (5.20) et le théorème de dérivation de la bijection réciproque (5.26).***

## Programme pour les exercices : sur 12 points

Trigonométrie pure : formules d'addition, de linéarisation, factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$ et formules similaires.

Utilisation pour l'étude de fonctions (trigonométriques, notamment tan), la résolution d'équations trigonométriques, le calcul d'intégrales (niveau SpeMaths, avec linéarisation de polynômes trigonométriques par exemple), simplifications de sommes finies, etc...

***Résolutions d'inéquations (notamment avec valeurs absolues) ou démonstration d'inégalités (par exemple*** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$***).***

***Études de fonctions réelles d'une variable réelle (notamment montrer qu'une telle fonction est bijective).***

Programme de colles n°6

# Du 6 au 10 novembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Résoudre l'inéquation d'inconnue $x$ réelle : $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| > 3$.
2) Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre totale compatible avec les opérations de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
3) Définitions de la valeur absolue d'un réel et de la partie entière d'un réel.
   Principales propriétés de la valeur absolue et de la partie entière.
   On attend à minima les propriétés suivantes : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}_+$

   $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ $\quad |xy| = |x| \times |y|$ $\quad |x| \leqslant r \Leftrightarrow -r \leqslant x \leqslant r$
   Inégalités triangulaires $\quad |x| \geqslant r \Leftrightarrow (x \leqslant -r \ \textbf{ou}\ x \geqslant r)$
   $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ $\quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$
4) Donner la définition de la dérivée en un point. Équation de la tangente en ce point.
5) Formules de dérivation : somme, produit, inverse, quotient, composée de fonctions.
6) Énoncer le théorème de la bijection continue (5.20) et le théorème de dérivation de la bijection réciproque (5.26).
7) ***Énoncer le théorème fondamental du calcul intégral et son corollaire.***
8) ***Interprétation géométrique des nombres complexes (sans démonstration) : angle de deux vecteurs, critères de colinéarité/d'orthogonalité de vecteurs, alignement de points.***
9) ***Équation du second degré à coef. complexes : résolution d'une équation (au choix du colleur).***
10) ***Racine $n$-ième de l'unité : énoncé du théorème et résolution d'une équation du type $z^n = c$ (au choix du colleur).***
11) ***Énoncer les propriétés de l'exponentielle complexe (6.12 et 6.13) ou résolution d'une équation du type $e^z = c$ (au choix du colleur).***

## Programme pour les exercices : sur 12 points

Résolutions d'inéquations (notamment avec valeurs absolues) ou démonstration d'inégalités (par exemple $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$).
Études de fonctions réelles d'une variable réelle (notamment montrer qu'une telle fonction est bijective).

***Nombres complexes : tout depuis le début d'année, notamment utilisation en trigonométrie, interprétation géométrique, résolution d'équations du type second degré ou du type*** $z^n = c$***. Les élèves doivent savoir factoriser un polynôme dont on connaît une racine (évidente...).***

Programme de colles n°7

# Du 13 au 17 novembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Énoncer le théorème fondamental du calcul intégral et son corollaire.
2) Interprétation géométrique des nombres complexes (sans démonstration) : angle de deux vecteurs, critères de colinéarité/d'orthogonalité de vecteurs, alignement de points.
3) Équation du second degré à coef. complexes : résolution d'une équation (au choix du colleur).
4) Racine $n$-ième de l'unité : énoncé du théorème et résolution d'une équation du type $z^n = c$ (au choix du colleur).
5) Énoncer les propriétés de l'exponentielle complexe (6.12 et 6.13) ou résolution d'une équation du type $e^z = c$ (au choix du colleur).
6) ln ***: définition, propriétés opératoires, limites, représentation graphique (sans démo).***
7) exp ***: définition, propriétés opératoires, limites, représentation graphique (sans démo).***
8) ***Fonctions puissances*** $x > 0 \mapsto x^\alpha$***, où*** $\alpha$ ***est un réel donné : définition, dérivée, propriétés opératoires, limites (suivant valeur de*** $\alpha$***), représentations graphiques (suivant valeur de*** $\alpha$***).***
9) ***Croissances comparées : énoncé des théorèmes.***
10) ***Trigo : formules (au choix du colleur, sans démonstration) parmi angles associés,*** $\cos^2 + \sin^2$***, définition et ensemble de définition de*** $\tan$***, équations du type*** $\cos(x) = \cos(x_0)$***, équations du type*** $\sin(x) = \sin(x_0)$***, équations du type*** $\tan(x) = \tan(x_0)$***,*** $\cos(a \pm b)$***,*** $\sin(a \pm b)$***,*** $\tan(a \pm b)$***,*** $\cos(2x)$ ***(les trois),*** $\sin(2x)$***,*** $\tan(2x)$***, dérivées (dont les deux formes pour*** $\tan'$***),*** $\lim_0 \dfrac{\sin x}{x}$***.***
11) ***Fonctions circulaires réciproques : définitions (on attend notamment les restrictions effectuées sur les fonctions trigonométriques pour qu'elles deviennent bijectives).***
12) ***Fonctions circulaires réciproques :*** $\cos \circ \mathrm{Arccos}$***,*** $\mathrm{Arccos} \circ \cos$***,*** $\sin \circ \mathrm{Arcsin}$***,*** $\mathrm{Arcsin} \circ \sin$***,*** $\tan \circ \mathrm{Arctan}$***,*** $\mathrm{Arctan} \circ \tan$***,*** $\sin \circ \mathrm{Arccos}$ ***et*** $\cos \circ \mathrm{Arcsin}$ ***avec intervalle de validité (mais sans démonstration).***
13) ***Fonctions circulaires réciproques : démontrer (au choix du colleur)***
    ***que*** $\forall x \in [-1;1], \cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$
    ***ou que*** $\forall x \in [-1;1], \sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$***.***

14) ***Fonctions circulaires réciproques : donner les dérivées de*** Arccos***,*** Arcsin ***et*** Arctan ***(sans démonstration).***

## Programme pour les exercices : sur 12 points

Nombres complexes : tout depuis le début d'année, notamment utilisation en trigonométrie, interprétation géométrique, résolution d'équations du type second degré ou du type $z^n = c$. Les élèves doivent savoir factoriser un polynôme dont on connaît une racine (évidente...).
***Analyse : fonctions de référence, notamment*** $u^v = \exp\big(v\ln(u)\big)$***,*** ln***,*** exp ***et fonctions trigonométriques et réciproques...***
En revanche, ch et sh ne sont pas encore au programme de colles de cette semaine.

Programme de colles n°8

# Du 20 au 24 novembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) ln : définition, propriétés opératoires, limites, représentation graphique (sans démo).
2) exp : définition, propriétés opératoires, limites, représentation graphique (sans démo).
3) Fonctions puissances $x > 0 \mapsto x^\alpha$, où $\alpha$ est un réel donné : définition, dérivée, propriétés opératoires, limites (suivant valeur de $\alpha$), représentations graphiques (suivant valeur de $\alpha$).
4) Croissances comparées : énoncé des théorèmes.
5) Trigo : formules (au choix du colleur, sans démonstration) parmi angles associés, $\cos^2 + \sin^2$, définition et ensemble de définition de tan, équations du type $\cos(x) = \cos(x_0)$, équations du type $\sin(x) = \sin(x_0)$, équations du type $\tan(x) = \tan(x_0)$, $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$, $\cos(2x)$ (les trois), $\sin(2x)$, $\tan(2x)$, dérivées (dont les deux formes pour $\tan'$), $\lim_0 \dfrac{\sin x}{x}$.
6) Fonctions circulaires réciproques : définitions (on attend notamment les restrictions effectuées sur les fonctions trigonométriques pour qu'elles deviennent bijectives).
7) Fonctions circulaires réciproques : $\cos \circ \operatorname{Arccos}$, $\operatorname{Arccos} \circ \cos$, $\sin \circ \operatorname{Arcsin}$, $\operatorname{Arcsin} \circ \sin$, $\tan \circ \operatorname{Arctan}$, $\operatorname{Arctan} \circ \tan$, $\sin \circ \operatorname{Arccos}$ et $\cos \circ \operatorname{Arcsin}$ avec intervalle de validité (mais sans démonstration).
8) Fonctions circulaires réciproques : démontrer (au choix du colleur)
   que $\forall x \in [-1; 1], \cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
   ou que $\forall x \in [-1; 1], \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
9) Fonctions circulaires réciproques : donner les dérivées de Arccos, Arcsin et Arctan (sans démonstration).
10) ***Fonctions circulaires réciproques : valeurs remarquables et représentations graphiques.***
11) ***Fonctions hyperboliques : définition, propriétés (*** $\operatorname{ch} + \operatorname{sh}$***,*** $\operatorname{ch} - \operatorname{sh}$***,*** $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2$***), limites, dérivées, représentations graphiques.***
12) ***Montrer que*** $\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ ***en précisant le signe suivant la valeur de*** $x$***.***
13) ***Trigonométrie :*** $\cos(a)\cos(b)$ ***et formules similaires,*** $\cos(p) + \cos(q)$ ***et formules similaires.***

## Programme pour les exercices : sur 12 points

Analyse : fonctions de référence, notamment $u^v = \exp\big(v \ln(u)\big)$, ln, exp et fonctions trigonométriques et réciproques...

***On rajoute*** ch ***et*** sh ***cette semaine.***

***On pourra éventuellement redonner des exercices sur les équations polynomiales à inconnue et coefficients complexes qui n'étaient, semble-t-il, pas très bien comprises jusque-là.***

Programme de colles n°9

# Du 27 novembre au 1$^{\text{er}}$ décembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Fonctions circulaires réciproques : valeurs remarquables et représentations graphiques.
2) Fonctions hyperboliques : définition, propriétés ($\mathrm{ch}+\mathrm{sh}$, $\mathrm{ch}-\mathrm{sh}$, $\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2$), limites, dérivées, représentations graphiques.
3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ en précisant le signe suivant la valeur de $x$.
4) Trigonométrie : $\cos(a)\cos(b)$ et formules similaires, $\cos(p)+\cos(q)$ et formules similaires.
5) ***Rappel : énoncer le théorème fondamental du calcul intégral et son corollaire.***
6) ***Énoncer et démontrer le théorème d'intégration par partie dans une intégrale. Énoncer (sans démonstration) le théorème de changement de variable dans une intégrale.***
7) ***Donner (avec démonstration) l'ensemble des primitives de*** $\ln$ ***sur*** $\mathbb{R}_+^*$.
8) ***Donner quelques primitives usuelles (au choix du colleur).***
9) ***Calculer (au choix du colleur) une primitive d'une fonction de la forme*** $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ ***ou*** $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ***ou*** $x \mapsto \cos^a(x)\sin^b(x)$.

## Programme pour les exercices : sur 12 points

Analyse : fonctions de référence.

On pourra éventuellement redonner des exercices sur les équations polynomiales à inconnue et coefficients complexes qui n'étaient, semble-t-il, pas très bien comprises jusque-là.

***Calcul d'intégrales, de primitives (pour les changements de variable, ils doivent être donnés aux élèves).***

***Études de fonctions définies par une intégrale.***

# Du 4 au 8 décembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer

1) Rappel : énoncer le théorème fondamental du calcul intégral et son corollaire.
2) Énoncer et démontrer le théorème d'intégration par partie dans une intégrale.
   Énoncer (sans démonstration) le théorème de changement de variable dans une intégrale.
3) Donner (avec démonstration) l'ensemble des primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
4) Donner quelques primitives usuelles (au choix du colleur).
5) Calculer (au choix du colleur) une primitive d'une fonction de la forme
   $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ ou $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto \cos^a(x)\sin^b(x)$.
6) ***Équations différentielles linéaires d'ordre 1 : théorème de résolution des équations homogènes.***
7) ***Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme normale (au choix du colleur).***

## Programme pour les exercices

Calcul d'intégrales, de primitives (pour les changements de variable, ils doivent être donnés aux élèves).
Études de fonctions définies par une intégrale.
***Équations différentielles linéaires du premier ordre.***

Programme de colles n°11

# Du 11 au 15 décembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer

1) Équations différentielles linéaires d'ordre 1 : théorème de résolution des équations homogènes.
2) Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme normale (au choix du colleur).
3) ***Énoncer (sans démonstration) le théorème donnant l'ensemble des solutions à valeurs complexes de*** $y'' + ay' + by = 0$ ***où*** $a, b \in \mathbb{C}$.
4) ***Énoncer (sans démonstration) le théorème donnant l'ensemble des solutions à valeurs réelles de*** $y'' + ay' + by = 0$ ***où*** $a, b \in \mathbb{R}$.
5) ***Rappel : définition et propriétés de la partie entière d'un réel.***
6) ***Définition quantifiée de :*** $A \subset \mathbb{R}$ ***possède un majorant, possède un maximum.***
***Définition (non quantifiée) de la borne supérieure d'une partie de*** $\mathbb{R}$.
***Énoncer la propriété de la borne supérieure.***
7) ***Énoncer (sans démonstration) les théorèmes de densité de*** $\mathbb{D}$ ***dans*** $\mathbb{R}$***, de*** $\mathbb{Q}$ ***dans*** $\mathbb{R}$.
8) ***Rappel : définitions, propriétés et sommes des termes consécutifs d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique. Factorisation de*** $x^n - y^n$.

## Programme pour les exercices

Équations différentielles linéaires du premier ordre.
***Équations différentielles linéaires du second ordre (à coefficients constants, second membre de la forme*** $e^{ax}\cos(bx)$ ***ou apparentés)***.
***Révisions : partie entière, valeur absolue, inéquations, démonstration d'inégalités.***
***Suites (généralités, sens de variations, exercices niveau fin de terminale).***

Programme de colles n°12

# Du 18 au 22 décembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Énoncer (sans démonstration) le théorème donnant l'ensemble des solutions à valeurs complexes de $y'' + ay' + by = 0$ où $a, b \in \mathbb{C}$.
2) Énoncer (sans démonstration) le théorème donnant l'ensemble des solutions à valeurs réelles de $y'' + ay' + by = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
3) Rappel : définition et propriétés de la partie entière d'un réel.
4) Définition quantifiée de : $A \subset \mathbb{R}$ possède un majorant, possède un maximum.
   Définition (non quantifiée) de la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$.
   Énoncer la propriété de la borne supérieure.
5) Énoncer (sans démonstration) les théorèmes de densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
6) Rappel : définitions, propriétés et sommes des termes consécutifs d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique. Factorisation de $x^n - y^n$.
7) ***Suites arithmético-géométriques : définition, théorème d'obtention d'une formule explicite (sans démonstration).***
8) ***Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : définition, théorème d'obtention d'une formule explicite (sans démo) dans le cas complexe.***
   ***Illustration sur un exemple au choix du colleur.***
9) ***Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : théorème d'obtention d'une formule explicite (sans démo) dans le cas réel.***
   ***Illustration sur un exemple au choix du colleur.***
10) ***Montrer que la suite*** $u$ ***définie par*** $u_0 \in [0;1], u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$ ***est décroissante.***
11) ***Définitions quantifiées de la limite finie/infinie d'une suite réelle.***

## Programme pour les exercices : sur 15 points

Équations différentielles linéaires du second ordre (à coefficients constants, second membre de la forme $e^{ax}\cos(bx)$ ou apparentés).
Révisions : partie entière, valeur absolue, inéquations, démonstration d'inégalités.
Suites (généralités, sens de variations, exercices niveau fin de terminale).
***Suites récurrentes linéaires, suites arithmético-géométriques.***
***Démonstration par récurrence double.***

Programme de colles n°13

# Du 8 au 12 janvier 2024

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Suites arithmético-géométriques : définition, théorème d'obtention d'une formule explicite (sans démonstration).
2) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : définition, théorème d'obtention d'une formule explicite (sans démo) dans le cas complexe.
   Illustration sur un exemple au choix du colleur.
3) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : théorème d'obtention d'une formule explicite (sans démo) dans le cas réel.
   Illustration sur un exemple au choix du colleur.
4) Montrer que la suite $u$ définie par $u_0 \in [0;1], u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$ est décroissante.
5) Définitions quantifiées de la limite finie/infinie d'une suite réelle.
6) ***Énoncer (sans démonstration) les trois théorèmes des gendarmes.***
   ***En déduire que si $a > 1$, alors $a^n \underset{+\infty}{\to} +\infty$ et donner (sans démonstration) les autres limites possibles d'une suite géométrique.***
7) ***Énoncer (sans démonstration) les trois théorèmes de convergence/divergence monotone.***
8) ***Définition des suites adjacentes. Énoncer (sans démonstration) le théorème les concernant.***
9) ***Résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues (au choix du colleur).***

## Programme pour les exercices : sur 15 points

Suites (récurrentes linéaires, convergence monotone, théorèmes des gendarmes, suites adjacentes).
Démonstration par récurrence double.
***Suites : utilisation des théorèmes des gendarmes, de convergence/divergence monotone, des suites adjacentes.***
***Systèmes linéaires (éventuellement paramétrés).***

Programme de colles n°14

# Du 15 au 19 janvier

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Énoncer (sans démonstration) les trois théorèmes des gendarmes.
   En déduire que si $a > 1$, alors $a^n \underset{+\infty}{\to} +\infty$ et donner (sans démonstration) les autres limites possibles d'une suite géométrique.
2) Énoncer (sans démonstration) les trois théorèmes de convergence/divergence monotone.
3) Définition des suites adjacentes. Énoncer (sans démonstration) le théorème les concernant.
4) Résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues (au choix du colleur).
5) ***Définitions : des matrices commutantes, de la diagonale d'une matrice, de la matrice identité, des matrices triangulaires, des matrices symétriques et des matrices antisymétriques.***
6) ***Identités remarquables pour les matrices commutantes : énoncé.***
7) ***La matrice*** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ***(ou toute autre matrice*** $3 \times 3$ ***au choix du colleur) est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.***
8) ***Définition du groupe linéaire matriciel. Énoncer les propriétés de l'inversion de matrice.***
9) ***Définition de la transposée d'une matrice et propriétés de la transposition. Caractérisation des matrices symétriques et antisymétriques par leur transposée.***

## Programme pour les exercices : sur 15 points

Suites : utilisation des théorèmes des gendarmes, de convergence/divergence monotone, des suites adjacentes.
Systèmes linéaires (éventuellement paramétrés).
***Calcul matriciel : matrices inversibles, puissance d'une matrice, matrices commutantes (ou pas !).***

Programme de colles n°15

# Du 22 au 26 janvier

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Définitions : des matrices commutantes, de la diagonale d'une matrice, de la matrice identité, des matrices triangulaires, des matrices symétriques et des matrices antisymétriques.
2) Identités remarquables pour les matrices commutantes : énoncé.
3) La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (ou toute autre matrice 3×3 au choix du colleur) est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
4) Définition du groupe linéaire matriciel. Énoncer les propriétés de l'inversion de matrice.
5) Définition de la transposée d'une matrice et propriétés de la transposition. Caractérisation des matrices symétriques et antisymétriques par leur transposée.
6) ***Définition de*** $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$***, de*** $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$***, de*** $u_n = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(v_n)$***. Traduction des croissances comparées à l'aide des « petit*** $o$ ***».***
7) ***Donner le*** $\mathrm{DL}_n(0)$ ***de*** $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ ***et démontrer la formule.***
8) ***Donner le*** $\mathrm{DL}_n(0)$ ***de*** $x \mapsto \ln(1+x)$ ***et démontrer la formule.***
9) ***Donner le*** $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ ***de*** $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ ***et démontrer la formule.***
10) ***Donner le*** $\mathrm{DL}_n(0)$ ***de*** $x \mapsto \exp(x)$ ***et démontrer la formule.***
11) ***Énoncer sans démonstration la formule de Taylor-Young.***
12) ***Donner (sans démonstration) le*** $\mathrm{DL}_n(0)$ ***de*** $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ***où*** $\alpha \in \mathbb{R}$***.***
***Préciser les 4 premiers coefficients de ce développement limité pour une valeur donnée de*** $\alpha$ ***(au choix du colleur).***
13) ***Donner (sans démonstration) quelques*** $\mathrm{DL}(0)$ ***de référence (au choix du colleur).***
14) ***Calculer le*** $\mathrm{DL}_5(0)$ ***de*** $\tan(x)$***.***

## Programme pour les exercices : sur 15 points

Calcul matriciel : matrices inversibles, puissance d'une matrice, matrices commutantes (ou pas !).
***Calculs (très) simples de développements limités.***
***Pour cette semaine, pas encore d'utilisation des DL : nous n'avons pas fait d'exercices sur ce sujet.***

Programme de colles n°16

# Du 29 janvier au 2 février

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Définition de $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, de $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$, de $u_n = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(v_n)$. Traduction des croissances comparées à l'aide des « petit $o$ ».
2) Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et démontrer la formule.
3) Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ et démontrer la formule.
4) Donner le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ et démontrer la formule.
5) Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \exp(x)$ et démontrer la formule.
6) Énoncer sans démonstration la formule de Taylor-Young.
7) Donner (sans démonstration) le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Préciser les 4 premiers coefficients de ce développement limité pour une valeur donnée de $\alpha$ (au choix du colleur).
8) Donner (sans démonstration) quelques DL(0) de référence (au choix du colleur).
9) Calculer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\tan(x)$.
10) ***Effectuer un développement asymptotique de*** $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{1+x^2}$ ***au voisinage de*** $\pm\infty$ ***et en déduire une équation de l'asymptote oblique à*** $\mathcal{C}_f$ ***ainsi que la position de*** $\mathcal{C}_f$ ***par rapport à son asymptote.***
11) ***Calculer le développement limité d'une fonction*** $g$ ***(au choix du colleur) au voisinage d'un point et en déduire une équation de la tangente à*** $\mathcal{C}_g$ ***en ce point, ainsi que la position de*** $\mathcal{C}_g$ ***par rapport à cette tangente.***
12) ***Calculer le*** $\mathrm{DL}_5(0)$ ***de*** Arccos.
13) ***Donner un équivalent d'une fonction (au choix du colleur) au voisinage d'un point.***

## Programme pour les exercices : sur 15 points

***Développements limités : calcul, utilisation pour l'obtention de limites, d'équivalents, d'asymptotes ou de tangentes (avec position par rapport à l'asymptote ou la tangente).***

Programme de colles n°17

# Du 5 au 9 février

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Effectuer un développement asymptotique de $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{1+x^2}$ au voisinage de $\pm\infty$ et en déduire une équation de l'asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ ainsi que la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote.
2) Calculer le développement limité d'une fonction $g$ (au choix du colleur) au voisinage d'un point et en déduire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en ce point, ainsi que la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à cette tangente.
3) Calculer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de Arccos.
4) Donner un équivalent d'une fonction (au choix du colleur) au voisinage d'un point.
5) ***Donner les espaces vectoriels de référence.***
   Réponse attendue : $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$), $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(A,E)$, $\mathcal{L}(E,F)$ où $n,p \in \mathbb{N}^*$, $E$ et $F$ deux e.v., $A$ une partie quelconque de $\mathbb{R}$.
6) ***Définition d'un sous-espace vectoriel. Énoncer le théorème fondamental (12.5).***
7) ***Étant donnée une famille (finie) $\mathcal{U}$ de vecteurs d'un espace vectoriel $(E,+,.)$, donner la définition de $\mathrm{Vect}(\mathcal{U})$.***
   ***Propriété de $\mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ ? (proposition 12.6)***
8) ***Soit $E$ un e.v. et $F$ et $G$ deux s.e.v. de $E$. Définition de la somme $F+G$.***
   ***Démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $E$.***
9) ***Avec les mêmes hypothèses, démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.***
10) ***Quand dit-on que la somme de deux sous-espaces vectoriels est <u>directe</u> ?***
    ***Caractérisation de la somme directe par l'intersection.***
    ***Définition des sous-espaces vectoriels supplémentaires.***
11) ***Définition des applications linéaires. Que peut-on dire de la composée de deux applications linéaires ? de la bijection réciproque d'une application linéaire bijective ?***
12) ***Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire. Principales propriétés (théorème 12.20).***

## Programme pour les exercices : sur 15 points

Développements limités : calcul, utilisation pour l'obtention de limites, d'équivalents, d'asymptotes ou de tangentes (avec position par rapport à l'asymptote ou la tangente).

***Espaces vectoriels : e.v. de référence, s.e.v., e.v. engendré par une famille, intersection de s.e.v., somme de s.e.v., somme directe/s.e.v. supplémentaires, applications linéaires.***
***On pourra éventuellement travailler avec l'espace vectoriel des polynômes, mais le chapitre sur les polynômes n'a pas encore été traité.***
***Attention ! La notion de dimension n'a pas encore été vue, et les projections et symétries non plus.***

Programme de colles n°18

# Du 12 au 16 février

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Donner les espaces vectoriels de référence.
   Réponse attendue : $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$), $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(A,E)$, $\mathcal{L}(E,F)$ où $n,p\in\mathbb{N}^*$, $E$ et $F$ deux e.v., $A$ une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

2) Définition d'un sous-espace vectoriel. Énoncer le théorème fondamental (12.5).

3) Étant donnée une famille (finie) $\mathcal{U}$ de vecteurs d'un espace vectoriel $(E,+,.)$, donner la définition de $\mathrm{Vect}(\mathcal{U})$.
   Propriété de $\mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ ? (proposition 12.6)

4) Soit $E$ un e.v. et $F$ et $G$ deux s.e.v. de $E$. Définition de la somme $F+G$.
   Démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $E$.

5) Avec les mêmes hypothèses, démontrer que $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

6) Quand dit-on que la somme de deux sous-espaces vectoriels est directe ?
   Caractérisation de la somme directe par l'intersection.
   Définition des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

7) Définition des applications linéaires. Que peut-on dire de la composée de deux applications linéaires ? de la bijection réciproque d'une application linéaire bijective ?

8) Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire. Principales propriétés (théorème 12.20).

9) ***Soit $E$ un espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$.***
   ***Définition géométrique de la projection sur $F$ parallèlement à $G$.***
   ***Caractérisation algébrique des projections. Expression de $F$ et $G$ comme noyaux d'applications linéaires.***

10) ***Soit $E$ un espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$.***
    ***Définition géométrique de la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.***
    ***Caractérisation algébrique des symétries. Expression de $F$ et $G$ comme noyaux d'applications linéaires.***

11) ***Donner $F=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$ (ou un autre s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ similaire, au choix du colleur) sous forme d'un espace vectoriel engendré par une famille.***

## Programme pour les exercices : sur 15 points

Espaces vectoriels : e.v. de référence, s.e.v., e.v. engendré par une famille, intersection de s.e.v., somme de s.e.v., somme directe/s.e.v. supplémentaires, applications linéaires.

***Noyau et image d'une application linéaire, injectivité/surjectivité/bijectivité. Projections et symétries.***

Programme de colles n°19

# Du 4 au 8 mars

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Soit $E$ un espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$. Définition géométrique de la projection sur $F$ parallèlement à $G$.
Caractérisation algébrique des projections. Expression de $F$ et $G$ comme noyaux d'applications linéaires.
2) Soit $E$ un espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$. Définition géométrique de la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.
Caractérisation algébrique des symétries. Expression de $F$ et $G$ comme noyaux d'applications linéaires.
3) Donner $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ (ou un autre s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ similaire, au choix du colleur) sous forme d'un espace vectoriel engendré par une famille.
4) ***Révisions : fonctions de référence (tout, dont définition, propriétés opératoires, limites, dérivée, représentation graphique...).***
5) ***Révisions : primitives usuelles.***
6) ***Révisions : développements limités des fonctions de référence (quelques exemples au choix du colleur, formule de Taylor-Young comprise).***
7) ***Donner quelques définitions quantifiées (au choix du colleur) de limites du type*** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ***où*** $(a; b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$***.***
8) ***Énoncer le théorème de la limite monotone (13.23).***
9) ***Image d'une suite convergeant vers*** $a$ ***par une application continue en*** $a$ ***: énoncer le théorème (13.29). Énoncer le théorème de Bolzano (13.33).***
10) ***Énoncer les deux théorèmes concernant l'image par une fonction continue d'un intervalle, d'un segment.***
11) ***Énoncer le théorème de la bijection continue.***

## Programme pour les exercices : sur 15 points

Espaces vectoriels et applications linéaires.
Noyau et image d'une application linéaire, injectivité/surjectivité/bijectivité. Projections et symétries.
***Continuité : prolongement par continuité, limites, asymptotes, théorèmes des valeurs intermédiaires, image continue d'un segment, théorème de la bijection continue.***

# Du 11 au 15 mars

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Révisions : fonctions de référence (tout, dont définition, propriétés opératoires, limites, dérivée, représentation graphique...).
2) Révisions : primitives usuelles.
3) Révisions : développements limités des fonctions de référence (quelques exemples au choix du colleur, formule de Taylor-Young comprise).
4) Donner quelques définitions quantifiées (au choix du colleur) de limites du type $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ où $(a; b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.
5) Énoncer le théorème de la limite monotone (13.23).
6) Image d'une suite convergeant vers $a$ par une application continue en $a$ : énoncer le théorème (13.29). Énoncer le théorème de Bolzano (13.33).
7) Énoncer les deux théorèmes concernant l'image par une fonction continue d'un intervalle, d'un segment.
8) Énoncer le théorème de la bijection continue.
9) ***Révisions : sommes finies (dont formule du binôme, factorisation de $x^n - y^n$, etc...).***
10) ***Révisions : nombres complexes (dont utilisations pour la trigonométrie, équations du second degré à coefficients complexes, équations du type $z^n = c$, etc...).***
11) ***Révisions : trigonométrie.***
12) ***Définition et principales propriétés du degré d'un polynôme.***
13) ***Énoncer (sans démonstration) le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. Énoncer (sans démonstration) le théorème donnant le reste dans la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $X - \alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{K}$).***
14) ***Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{10} - X^5$ par $X^2 - 3X + 2$.***
15) ***Énoncer (sans démonstration) le corollaire 14.14 (majorant du nombre de racines d'un polynôme non nul, lien entre égalité de polynômes et égalité de fonctions polynomiales).***

## Programme pour les exercices : sur 15 points

Continuité : prolongement par continuité, limites, asymptotes, théorèmes des valeurs intermédiaires, image continue d'un segment, théorème de la bijection continue.

***Polynômes : structure d'espace vectoriel (attention, pas encore de familles libres, de bases ou de notion de dimension), division euclidienne, lien entre racine et division par un polynôme de degré 1 (attention, pas encore de notion de multiplicité d'une racine).***

Programme de colles n°21

# Du 18 au 22 mars

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Révisions : sommes finies (dont formule du binôme, factorisation de $x^n - y^n$, etc...).
2) Révisions : nombres complexes (dont utilisations pour la trigonométrie, équations du second degré à coefficients complexes, équations du type $z^n = c$, etc...).
3) Révisions : trigonométrie.
4) Définition et principales propriétés du degré d'un polynôme.
5) Énoncer (sans démonstration) le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
   Énoncer (sans démonstration) le théorème donnant le reste dans la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $X - \alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{K}$).
6) Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{10} - X^5$ par $X^2 - 3X + 2$.
7) Énoncer (sans démonstration) le corollaire 14.14 (majorant du nombre de racines d'un polynôme non nul, lien entre égalité de polynômes et égalité de fonctions polynomiales).
8) ***Révisions : équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.***
9) ***Révisions : espaces vectoriels.***
10) ***Formule de Leibniz et formule de Taylor (à l'ordre*** $n \in \mathbb{N}$ ***en un scalaire*** $a$ ***quelconque) pour les polynômes de*** $\mathbb{K}_n[X]$.
11) ***Multiplicité d'une racine : définition et caractérisation.***
12) ***Théorèmes de factorisation pour les polynômes de*** $\mathbb{C}[X]$ ***et de*** $\mathbb{R}[X]$.

## Programme pour les exercices : sur 15 points

Polynômes : structure d'espace vectoriel (attention, pas encore de familles libres, de bases ou de notion de dimension), division euclidienne, lien entre racine et division par un polynôme de degré 1 (attention, pas encore de notion de multiplicité d'une racine).
***Polynômes : racines multiples, formule de Taylor, factorisation.***
***On pourra donner des exercices sur la trigonométrie, les nombres complexes (en lien ou pas avec les polynômes) ou les équations différentielles.***

Programme de colles n°22

# Du 25 au 29 mars

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer

1) Révisions : équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.
2) Révisions : espaces vectoriels.
3) Formule de Leibniz et formule de Taylor (à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en un scalaire $a$ quelconque) pour les polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$.
4) Multiplicité d'une racine : définition et caractérisation.
5) Théorèmes de factorisation pour les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
6) ***Révisions : suites récurrentes linéaires d'ordre 2 et suites arithmético-géométriques.***
7) ***Donner la définition d'un hyperplan.***
   ***Énoncer (sans démonstration) le théorème (15.4) de résolution des équations linéaires.***
8) ***Définition d'une famille libre, liée. Énoncer (sans démonstration) le théorème (15.6) de caractérisation des familles libres.***
9) ***Définition d'une famille génératrice, d'une base. Démontrer l'existence et l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base.***
10) ***Définition et propriété (sans démonstration) d'une famille de polynômes échelonnée en degrés.***
11) ***Énoncer (sans démonstration) la propriété de génération de la somme.***
12) ***Énoncer (sans démonstration) les théorèmes de la base extraite (15.19) et de la base incomplète (15.21).***

## Programme pour les exercices

Polynômes : racines multiples, formule de Taylor, factorisation.
On pourra donner des exercices sur la trigonométrie, les nombres complexes (en lien ou pas avec les polynômes) ou les équations différentielles ***ou les suites récurrentes linéaires/suites arithmético-géométriques (en lien ou pas avec les espaces vectoriels).***
***Espaces vectoriels : révisions du chapitre précédent (sev, ev engendrés, somme (directe) de deux sev, sev supplémentaires, applications linéaires, noyau/image, projections, symétries).***
***Espaces vectoriels : équations linéaires, familles libres/liées/génératrices, bases, coordonnées dans une base.***
***Attention : pas encore de notion de dimension.***

Programme de colles n°23

# Du 2 au 5 avril

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer

1) Révisions : suites récurrentes linéaires d'ordre 2 et suites arithmético-géométriques.
2) Donner la définition d'un hyperplan.
   Énoncer (sans démonstration) le théorème (15.4) de résolution des équations linéaires.
3) Définition d'une famille libre, liée. Énoncer (sans démonstration) le théorème (15.6) de caractérisation des familles libres.
4) Définition d'une famille génératrice, d'une base. Démontrer l'existence et l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base.
5) Définition et propriété (sans démonstration) d'une famille de polynômes échelonnée en degrés.
6) Énoncer (sans démonstration) la propriété de génération de la somme.
7) Énoncer (sans démonstration) les théorèmes de la base extraite (15.19) et de la base incomplète (15.21).
8) ***Énoncer le théorème de la dimension (15.24) et la définition de la dimension d'un espace vectoriel (15.26).***
9) ***Énoncer les propriétés (15.28, 15.29) des familles libres/génératrices en dimension finie.***
10) ***Donner la définition des bases canoniques de*** $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ ***et*** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
11) ***Dimension d'un sous-espace vectoriel : propriété et cas d'égalité (proposition 15.35).***
12) ***Définition du rang d'une famille de vecteurs.***
    ***Calculer le rang d'une famille (au choix du colleur, par exemple dans*** $\mathbb{R}^4$ ***ou*** $\mathbb{R}_3[X]$***).***
13) ***Énoncé (précis) de la formule de Grassmann.***

## Programme pour les exercices

Espaces vectoriels : révisions du chapitre précédent (sev, ev engendrés, somme (directe) de deux sev, sev supplémentaires, applications linéaires, noyau/image, projections, symétries).
Espaces vectoriels : équations linéaires, familles libres/liées/génératrices, bases, coordonnées dans une base.
***Dimension d'un espace vectoriel, rang d'une famille de vecteurs, formule de Grassmann.***

Programme de colles n°24

# Du 8 au 12 avril

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer

1) Énoncer le théorème de la dimension (15.24) et la définition de la dimension d'un espace vectoriel (15.26).
2) Énoncer les propriétés (15.28, 15.29) des familles libres/génératrices en dimension finie.
3) Donner la définition des bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
4) Dimension d'un sous-espace vectoriel : propriété et cas d'égalité (proposition 15.35).
5) Définition du rang d'une famille de vecteurs.
   Calculer le rang d'une famille (au choix du colleur, par exemple dans $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{R}_3[X]$).
6) Énoncé (précis) de la formule de Grassmann.
7) ***Énoncer le théorème (15.39) de définition d'une application linéaire à l'aide des images d'une base de l'espace de départ.***
   ***Donner l'expression de*** $\phi(x;y)$ ***pour*** $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ***définie par***
   $$\phi(1;0) = \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \textbf{\textit{et}} \quad \phi(0;1) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$$
   ***(ou autres images choisies par le colleur)***
8) ***Énoncer (sans démonstration) le théorème (15.46) caractérisant les isomorphismes par l'image d'une base.***
9) ***Énoncer (sans démonstration) la formule du rang. Énoncer (sans démonstration) le corollaire donnant la dimension d'un hyperplan*** $H$ ***d'un e.v.*** $E$ ***de dimension finie.***
10) ***Énoncer le théorème (15.53) de caractérisation des isomorphismes en dimension finie.***
11) ***Rappels : développement de*** $\cos(nx)$, $\operatorname{ch}(nx)$, $\sin(nx)$, $\operatorname{sh}(nx)$, ***linéarisation des polynômes trigonométriques ou hyperboliques (au choix du colleur).***

## Programme pour les exercices

Dimension d'un espace vectoriel, rang d'une famille de vecteurs, formule de Grassmann.
***Applications linéaires en dimension finie : image d'une base par un isomorphisme, formule de Grassmann, hyperplans, caractérisation des isomorphismes en dimension finie.***
***Trigonométrie à l'aide des complexes, trigonométrie hyperbolique à l'aide de la partie paire/partie impaire d'une fonction.***

Programme de colles n°25

# Du 29 avril au 3 mai

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Énoncer le théorème (15.39) de définition d'une application linéaire à l'aide des images d'une base de l'espace de départ.
   Donner l'expression de $\phi(x;y)$ pour $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par
   $$\phi(1;0) = \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \phi(0;1) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$$
   (ou autres images choisies par le colleur)
2) Énoncer (sans démonstration) le théorème (15.46) caractérisant les isomorphismes par l'image d'une base.
3) Énoncer (sans démonstration) la formule du rang. Énoncer (sans démonstration) le corollaire donnant la dimension d'un hyperplan $H$ d'un e.v. $E$ de dimension finie.
4) Énoncer le théorème (15.53) de caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
5) Rappels : développement de $\cos(nx)$, $\text{ch}(nx)$, $\sin(nx)$, $\text{sh}(nx)$, linéarisation des polynômes trigonométriques ou hyperboliques (au choix du colleur).
6) ***Donner la définition du taux d'accroissement entre les points d'abscisses $a \in I$ et $x \in I$ d'une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.***
   ***Donner la définition du nombre dérivé au point $a$.***
7) ***Énoncer et démontrer la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables en $x_0$.***
8) ***Énoncer (sans démonstration) la formule de Leibniz pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.***
9) ***Rappels : dérivées, primitives ou développements limités de référence.***
10) ***Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.***
11) ***Énoncer (sans démonstration) le théorème des accroissements finis et l'inégalité des accroissements finis.***
12) ***Énoncer <u>précisément</u> le théorème 16.33 donnant une condition suffisante d'existence d'un extremum local.***
13) ***Énoncer <u>précisément</u> le théorème de limite de la dérivée.***
14) ***Énoncer la définition des fonctions convexes sur un intervalle, le lemme des trois pentes et la caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables (sans démonstration).***

# Programme pour les exercices : sur 15 points

Applications linéaires en dimension finie : image d'une base par un isomorphisme, formule de Grassmann, hyperplans, caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
Trigonométrie à l'aide des complexes, trigonométrie hyperbolique à l'aide de la partie paire/partie impaire d'une fonction.
***Dérivation, développements limités, trigo et trigo hyperbolique, théorème de la bijection dérivable, Leibniz...***
***Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalités des accroissements finis, théorème de limite de la dérivée.***

Programme de colles n°26

# Du 13 au 17 mai

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer

1) Donner la définition du taux d'accroissement entre les points d'abscisses $a \in I$ et $x \in I$ d'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
   Donner la définition du nombre dérivé au point $a$.
2) Énoncer et démontrer la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables en $x_0$.
3) Énoncer (sans démonstration) la formule de Leibniz pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.
4) Rappels : dérivées, primitives ou développements limités de référence.
5) Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.
6) Énoncer (sans démonstration) le théorème des accroissements finis et l'inégalité des accroissements finis.
7) Énoncer précisément le théorème 16.33 donnant une condition ***suffisante*** d'existence d'un extremum local.
8) Énoncer précisément le théorème de limite de la dérivée.
9) Énoncer la définition des fonctions convexes sur un intervalle, le lemme des trois pentes et la caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables (sans démonstration).
10) ***Montrer que*** $x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1+e^x)$ ***est convexe.***
    ***En déduire que*** $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, 1 + \sqrt{xy} \leqslant \sqrt{(1+x)(1+y)}$.
11) ***Soit*** $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ***et*** $u$ ***la suite définie par*** $u_0 \in \mathbb{R}$ ***et*** $u_{n+1} = f(u_n)$.
    ***Montrer que si*** $u$ ***converge vers*** $l \in \mathbb{R}$ ***alors*** $f(l) = l$.
12) ***Soit*** $f$ ***une fonction définie et croissante sur*** $\mathbb{R}$ ***et*** $u$ ***la suite définie par*** $u_0 \in \mathbb{R}$ ***et*** $u_{n+1} = f(u_n)$***. Montrer que si*** $u_1 \leqslant u_0$***, alors*** $u$ ***est décroissante.***
    ***Que peut-on dire de*** $u$ ***dans le cas général ?***
13) ***Révisions : théorème d'obtention d'une formule explicite pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ou arithmético-géométriques (au choix du colleur).***

## Programme pour les exercices

Dérivation, développements limités, trigo et trigo hyperbolique, théorème de la bijection dérivable, formule de Leibniz...
Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalités des accroissements finis, théorème de limite de la dérivée.
***Suites récurrentes***.

Programme de colles n°27

# Du 21 au 24 mai

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer

1) Montrer que $x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe.
   En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, 1+\sqrt{xy} \leqslant \sqrt{(1+x)(1+y)}$.
2) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $u$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que si $u$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors $f(l) = l$.
3) Soit $f$ une fonction définie et croissante sur $\mathbb{R}$ et $u$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si $u_1 \leqslant u_0$, alors $u$ est décroissante.
   Que peut-on dire de $u$ dans le cas général ?
4) Révisions : théorème d'obtention d'une formule explicite pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ou arithmético-géométriques (au choix du colleur).
5) ***Soit*** $n \in \mathbb{N}$ ***et*** $E_n$ ***l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à*** $n$ ***dont les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.***
   ***Calculer*** $\mathrm{Card}(E_n)$***.***
6) ***Combien un*** $n$***-gone convexe a-t-il de diagonales ? Le démontrer.***
7) ***Donner*** $\mathcal{P}\big(\{a;b;c\}\big)$***.***
   ***Soit*** $E$ ***un ensemble à*** $n$ ***éléments. Que vaut*** $\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big)$ ***? Le démontrer.***
8) ***Nombre d'injections d'un ensemble*** $E$ ***à*** $p$ ***éléments dans un ensemble*** $F$ ***à*** $n$ ***éléments ? Le démontrer.***
   ***Nombre de permutations d'un ensemble*** $E$ ***à*** $n$ ***éléments ? (sans démonstration)***
9) ***Définition des coefficients binomiaux et interprétation combinatoire.***
   ***Combien y a-t-il de mots de 9 lettres composés de 3 lettres*** $A$***, 3 lettres*** $B$ ***et 3 lettres*** $C$ ***? (ou autre exercice du même style au choix du colleur)***

## Programme pour les exercices

Convexité, suites récurrentes.
***Dénombrement.***

Programme de colles n°28

# Du 27 au 31 mai

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E_n$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ dont les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.
Calculer $\text{Card}\,(E_n)$.

2) Combien un $n$-gone convexe a-t-il de diagonales ? Le démontrer.

3) Donner $\mathcal{P}\big(\{a; b; c\}\big)$.
Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments. Que vaut $\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big)$ ? Le démontrer.

4) Nombre d'injections d'un ensemble $E$ à $p$ éléments dans un ensemble $F$ à $n$ éléments ? Le démontrer.
Nombre de permutations d'un ensemble $E$ à $n$ éléments ? (sans démonstration)

5) Définition des coefficients binomiaux et interprétation combinatoire.
Combien y a-t-il de mots de 9 lettres composés de 3 lettres $A$, 3 lettres $B$ et 3 lettres $C$ ? (ou autre exercice du même style au choix du colleur)

6) ***Révisions : énoncer (sans démonstration) le théorème de définition d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base (15.39) <u>ou</u> la caractérisation des isomorphismes en dimension finie (15.53) <u>ou</u> la formule de Grassmann <u>ou</u> le théorème du rang.***

7) ***Définitions de la matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base. Définition de la matrice d'une application linéaire dans deux bases. Cas particulier des endomorphismes.***

8) ***Coordonnées de l'image d'un vecteur/d'une famille de vecteurs par une application linéaire (énoncés). Matrice de la composée de deux applications linéaires : énoncé.***

9) ***Matrice de la bijection réciproque d'une application linéaire (énoncé). Définition d'une matrice de passage.***

10) ***Produit de deux matrices de passages, inverse d'une matrice de passage. Formule de changement de bases pour un vecteur.***

11) ***On donne $\phi \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$ (au choix du colleur). Donner la matrice de $\phi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.***
***OU : on donne une matrice $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (au choix du colleur). Donner l'expression de $\phi(x; y; z)$ pour $\phi$ canoniquement associée à $M$.***

12) ***Formule de changement de base pour une matrice d'application linéaire : énoncé et démonstration.***
***Cas particulier des endomorphismes.***

13) ***Résumé des caractérisations des matrices inversibles. (Paragraphes IV.6 et V.5)***

14) ***Définition du noyau et de l'image d'une matrice. Formule du rang matricielle. Rang et transposition.***

## Programme pour les exercices

Dénombrement.
***Interprétations vectorielles des matrices : matrices d'applications linéaires, matrice d'une famille de vecteurs, formules de changements de base.***

Programme de colles n°29

# Du 3 au 7 juin... Avant-dernière colle de l'année !

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Révisions : énoncer (sans démonstration) le théorème de définition d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base (15.39) ou la caractérisation des isomorphismes en dimension finie (15.53) ou la formule de Grassmann ou le théorème du rang.
2) Définitions de la matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base. Définition de la matrice d'une application linéaire dans deux bases. Cas particulier des endomorphismes.
3) Coordonnées de l'image d'un vecteur/d'une famille de vecteurs par une application linéaire (énoncés). Matrice de la composée de deux applications linéaires : énoncé.
4) Matrice de la bijection réciproque d'une application linéaire (énoncé).
   Définition d'une matrice de passage.
5) Produit de deux matrices de passages, inverse d'une matrice de passage.
   Formule de changement de bases pour un vecteur.
6) On donne $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ (au choix du colleur). Donner la matrice de $\phi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   OU : on donne une matrice $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (au choix du colleur). Donner l'expression de $\phi(x;y;z)$ pour $\phi$ canoniquement associée à $M$.
7) Formule de changement de base pour une matrice d'application linéaire : énoncé et démonstration.
   Cas particulier des endomorphismes.
8) Résumé des caractérisations des matrices inversibles. (Paragraphes IV.6 et V.5)
9) Définition du noyau et de l'image d'une matrice. Formule du rang matricielle. Rang et transposition.
10) ***Définition et propriétés d'une probabilité (19.9, 19.12, 19.17).***
11) ***Hypothèse d'équiprobabilité et conséquence (19.14 et 19.15).***
12) ***Probabilité conditionnelle : définition, formule des probabilités totales (énoncé).***
13) ***Formule de Bayes (énoncé et démonstration) et formule de Bayes généralisée (énoncé).***

## Programme pour les exercices

Interprétations vectorielles des matrices : matrices d'applications linéaires, matrice d'une famille de vecteurs, formules de changements de base.
***Probabilités : propriétés d'une proba, proba conditionnelles, formules de Bayes, indépendance, hypothèse d'équiprobabilité (ou pas).***
***Attention : nous n'avons pas encore vu les variables aléatoires, pas plus que la distinction entre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux***.

Programme de colles n°30

# Du 10 au 14 juin- Dernière colle de l'année !

## Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Révisions : énoncer (sans démonstration) le théorème de définition d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base (15.39) ou la caractérisation des isomorphismes en dimension finie (15.53) ou la formule de Grassmann ou le théorème du rang.
2) Définitions de la matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base. Définition de la matrice d'une application linéaire dans deux bases. Cas particulier des endomorphismes.
3) Coordonnées de l'image d'un vecteur/d'une famille de vecteurs par une application linéaire (énoncés). Matrice de la composée de deux applications linéaires : énoncé.
4) Matrice de la bijection réciproque d'une application linéaire (énoncé).
   Définition d'une matrice de passage.
5) Produit de deux matrices de passages, inverse d'une matrice de passage.
   Formule de changement de bases pour un vecteur.
6) On donne $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ (au choix du colleur). Donner la matrice de $\phi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   OU : on donne une matrice $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (au choix du colleur). Donner l'expression de $\phi(x; y; z)$ pour $\phi$ canoniquement associée à $M$.
7) Formule de changement de base pour une matrice d'application linéaire : énoncé et démonstration.
   Cas particulier des endomorphismes.
8) Résumé des caractérisations des matrices inversibles. (Paragraphes IV.6 et V.5)
9) Définition du noyau et de l'image d'une matrice. Formule du rang matricielle. Rang et transposition.
10) Définition et propriétés d'une probabilité (19.9, 19.12, 19.17).
11) Hypothèse d'équiprobabilité et conséquence (19.14 et 19.15).
12) Probabilité conditionnelle : définition, formule des probabilités totales (énoncé).
13) Formule de Bayes (énoncé et démonstration) et formule de Bayes généralisée (énoncé).

## Programme pour les exercices

Interprétations vectorielles des matrices : matrices d'applications linéaires, matrice d'une famille de vecteurs, formules de changements de base.
Probabilités : propriétés d'une proba, proba conditionnelles, formules de Bayes, indépendance, hypothèse d'équiprobabilité (ou pas).
***Les élèves pourront, s'ils le désirent, utiliser les résultats du chapitre sur les déterminants pour les exercices concernant l'interprétation vectorielle des matrices.***
***Attention : nous n'avons pas encore vu les variables aléatoires.***

# Deuxième partie

# Interrogations

Maths - Interrogation n°1 - Lundi 9 octobre, 15min

# Trigonométrie

NOM :................................ Prénom :.................................

1) Soient $a$, $b$ deux nombres réels. Compléter :
   $\cos(a+b) =$..........................................................................

   $\tan(a-b) =$..........................................................................

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner trois formules pour

   $\cos(2x) =$..........................................................................

3) $\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) =$..........................................................................

   $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$..........................................................................

4) Sans calcul ni justification, donner l'unique solution $\theta$ dans $]-\pi;\pi]$ de
   $$\begin{cases} \cos(\theta) &= \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) &= \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
   $\theta =$..........................................................................

5) Soit $\alpha$ un réel.
   L'ensemble des solutions de $\cos(x) = \cos(\alpha)$ est ......................................

6) Soit $t \in \mathbb{R}$.
   $\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) =$..........................................................................

   $\sin(\pi - t) =$..........................................................................

7) Soient $a$ et $b$ deux réels. Compléter :

   $\sin(a)\sin(b) =$..........................................................................

8) Soient $p$ et $q$ deux réels. Compléter :

   $\cos(p) + \cos(q) =$..........................................................................

Maths - Interrogation n°1 - Lundi 9 octobre, 15min

# Trigonométrie

NOM :................................ Prénom :..................................

1) Soient $a$, $b$ deux nombres réels. Compléter :

   $\sin(a-b) =$..........................................................................

   $\tan(a+b) =$..........................................................................

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Compléter :

   $\sin(2x) =$..........................................................................

3) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Donner deux formules pour

   $\tan'(x) =$..........................................................................

4) $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$..........................................................................

   $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$..........................................................................

5) Sans calcul ni justification, donner l'unique solution $\theta$ dans $]-\pi;\pi]$ de

   $$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(\theta) & = & \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

   $\theta =$..........................................................................

6) Soit $\alpha$ un réel.
   L'ensemble des solutions de $\sin(x) = \sin(\alpha)$ est ..........................................

7) Soit $t \in \mathbb{R}$.
   $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) =$..........................................................................

   $\cos(\pi + t) =$..........................................................................

8) Soient $a$ et $b$ deux réels. Compléter :

   $\sin(a)\cos(b) =$..........................................................................

9) Soient $p$ et $q$ deux réels. Compléter :

   $\sin(p) + \sin(q) =$..........................................................................

Maths - Interrogation n°2 - Lundi 22 janvier, 15min

# Développements limités

NOM :................................ Prénom :.................................

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Les développements limités suivants doivent être donnés, lorsque c'est possible, ***avec et sans*** signe $\sum$.

1) On considère ***connu*** le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Donner le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ (***avec démonstration***) :

..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................

2) Donner le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ :

..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................

3) Donner la définition du coefficient binomial généralisé $\begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix}$ :

..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................

4) On rappelle que $\forall x \in ]-1;1[$, $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

***Calculer*** le développement limité à l'ordre 5 en 0 de Arcsin :

Maths - Interrogation n°2 - Lundi 22 janvier, 15min

# Développements limités

NOM :................................ Prénom :.................................

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Les développements limités suivants doivent être donnés, lorsque c'est possible, ***avec et sans*** signe $\sum$.

1) On considère ***connu*** le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Donner le développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ (***avec démonstration***) :

..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................

2) Donner le développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ :

..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................

3) Donner le développement limité à l'ordre $n$ en 0 de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ :

..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................
..............................................................................................

4) ***Calculer*** le développement limité à l'ordre 5 en 0 de tan :

# Troisième partie

# DM

Maths - DM n°1 - Pour le lundi 18 septembre,

# Sommes finies

L'exercice suivant était un des exercices donnés dans le premier devoir surveillé de l'année scolaire 2022/2023.

**Exercice 1.**

Pour tout entier naturel $n$, on définit :

$$S_n = 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$$

***Simplification de*** $S_n$

1) Écrire $S_n$ à l'aide du signe $\sum$.
2) Montrer que pour tout réel $x$, $x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x^2 - 2x$.
3) Déduire de la question précédente que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $S_n = B_n + C_n$ où

$$B_n = 6 \sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3}$$

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 - 2k$$

4) Simplifier $C_n$ pour $n$ entier naturel.
5) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 4$

$$\binom{k}{3} = \binom{k+1}{4} - \binom{k}{4}$$

6) Simplifier $B_n$ pour $n$ entier naturel supérieur ou égal à 3.
7) Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel,

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

***Simplification de*** $T_n$

8) Simplifier, pour $x$ réel, l'expression de $h(x) = (x+1)^5 - x^5$.
9) Déduire de la question précédente que, pour tout entier $n$,

$$(n+1)^5 - 1 = 5T_n + 10S_n + 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5\frac{n(n+1)}{2} + n$$

10) Déduire des questions précédentes une expression simplifiée de $T_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Maths - DM n°1 - Pour le lundi 18 septembre,

# Correction DM n°1

**Exercice 1.**

***Simplification de*** $S_n$

1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.
2) Soit $x$ un réel.
   $x(x-1)(x-2)+3x^2-2x = (x^2-x)(x-2)+3x^2-2x = x^3-2x^2-x^2+2x+3x^2-2x = x^3$.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 = x(x-1)(x-2)+3x^2-2x$.
3) Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} k^3 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)+3k^2-2k \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) + \sum_{k=1}^{n} 3k^2-2k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) + C_n \end{aligned}$$
   en posant $C_n = \sum_{k=1}^{n} 3k^2-2k$.
   De plus, en posant $B_n = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$, on a :
   $B_n = \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)$ car, pour $k=1$ et $k=2$, $k(k-1)(k-2)=0$.
   Donc $B_n = 6\sum_{k=3}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = 6\sum_{k=3}^{n} \frac{k!}{3! \times (k-3)!} = 6\sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3}$
   On a donc bien, pour $n \geqslant 3$ : $S_n = B_n + C_n$ où
   $$B_n = 6\sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3}$$
   $$C_n = \sum_{k=1}^{n} 3k^2-2k$$
4) $C_n = \sum_{k=1}^{n} 3k^2-2k = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2}$
   Ou encore, après factorisation par $\frac{n(n+1)}{2}$ :
   $C_n = \frac{n(n+1)}{2} \times (2n+1-2) = \frac{n(n+1)(2n-1)}{2}$.
5) Soit $k$ un entier supérieur ou égal à 4.
   La formule de Pascal s'écrit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0; n-1]\!]$ : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

En posant $n = k$ et $p = 3$ (qui vérifie bien $p \leqslant k-1$ puisque $k \geqslant 4$), la formule de Pascal se réécrit donc :
$\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 4 \end{pmatrix}$
Donc
$$\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k \\ 4 \end{pmatrix}$$

6)
$$\begin{aligned} B_n &= 6\sum_{k=3}^{n}\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 6 + 6\sum_{k=4}^{n}\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{en sortant le } 1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} \\ &= 6 + 6\sum_{k=4}^{n}\begin{pmatrix} k+1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= 6 + 6\left(\begin{pmatrix} n+1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \quad \text{par télescopage} \\ &= 6\begin{pmatrix} n+1 \\ 4 \end{pmatrix} = 6\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \end{aligned}$$
Donc, pour tout entier $n \geqslant 3$,
$$B_n = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$$

7) Pour $n$ entier naturel ***supérieur ou égal à 3***, d'après les questions 4) et 6) :
$S_n = B_n + C_n = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + \frac{n(n+1)(2n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{2(2n-1)}{2}\right)$.
Donc $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n^2-2n-n+2+4n-2}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n^2+n}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
***Par ailleurs, on vérifie que la formule reste valable pour*** $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
Donc ***pour tout entier naturel*** $n$,
$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

***Simplification de*** $T_n$

8) Soit $x$ un réel.
$h(x) = (x+1)^5 - x^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 - x^5 = 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$.

9) Soit $n$ un entier naturel.
D'une part, $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^5 - k^5 = (n+1)^5 - 1^5 = (n+1)^5 - 1$ par télescopage.
D'autre part, en utilisant la question précédente,
$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^5 - k^5 = \sum_{k=1}^{n} 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 = 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$.
Donc $(n+1)^5 - 1 = 5T_n + 10S_n + 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5\frac{n(n+1)}{2} + n$.

10) D'après la question précédente, on a donc :
$5T_n = (n+1)^5 - 1 - n - \frac{5n(n+1)}{2} - \frac{5n(n+1)(2n+1)}{3} - 10S_n$.
Donc $5T_n = (n+1)\left((n+1)^4 - 1\right) - 5n(n+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{2n+1}{3}\right) - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Ou encore $5T_n = (n+1)\left(n^4+4n^3+6n^2+4n\right) - 5n(n+1)\dfrac{4n+5}{6} - 5\dfrac{n^2(n+1)^2}{2}$.
Finalement, $5T_n = n(n+1)\left(n^3+4n^2+6n+4-\frac{20n+25}{6}-\frac{5n(n+1)}{2}\right)$.
Après réduction au même dénominateur et division par 5, on a donc :

$$T_n = \frac{n(n+1)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$$

Maths - DM n°2 - Pour le lundi 13 novembre,

# Bijections et dérivation

### Exercice 1.

***Arguments des sinus et cosinus hyperboliques***

1) Montrer que $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{ch} : [0; +\infty[ \to [1; +\infty[$ sont bijectives.
   On note Argsh et Argch leurs bijections réciproques.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\,(\mathrm{Argsh}\,x) = \sqrt{1+x^2}$.
3) Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[, \mathrm{sh}\,(\mathrm{Argch}\,x) = \sqrt{x^2-1}$.
4) Calculer (en précisant les conditions d'existence) $\mathrm{Argsh}'(x)$ et $\mathrm{Argch}'(x)$.
5) Faire le même travail pour la fonction $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$.
   On montrera notamment que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$ dont la bijection réciproque est notée Argth.
6) Montrer que lorsqu'elle est définie $\mathrm{Argth}(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
7) Donner une expression (similaire à celle de la question précédente) pour $\mathrm{Argch}(x)$ et $\mathrm{Argsh}(x)$ en précisant les valeurs de $x$ pour lesquelles ces expressions sont valides.

### Exercice 2.

***Gudermannien*** On définit les fonctions th, Argsh, Argch et Argth de la même façon qu'à l'exercice 1. dont les résultats peuvent être admis ici.
Soient $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et Gd la fonction définie par

$$\mathrm{Gd} : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \end{array} \right. .$$

1) Montrer que Gd est bien définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
2) Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ :
   $\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right) = \mathrm{Argsh}(\tan x) = \mathrm{Argth}(\sin x) = 2\,\mathrm{Argth}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$.
3) Calculer $\mathrm{Gd}'$ et tracer l'allure de la représentation graphique de Gd.
4) Justifier l'existence de $\mathrm{Gd}^{-1}$ et montrer que sur son ensemble de définition $\mathrm{Gd}^{-1}(x) = \mathrm{Arcsin}(\mathrm{th}\,x)$. Calculer la dérivée de $\mathrm{Gd}^{-1}$.

# Correction DM n°2

**Exercice 1.**

1) • Montrons que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Donc sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions continues et dérivables.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}'(x) = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$.
Notamment, la fonction exp étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}'(x) > 0$.
Donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc est injective.
Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$ et sh étant impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$.
Comme par ailleurs sh est continue, le théorème de la bijection continue permet d'affirmer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.
Remarquons au passage, comme $\operatorname{sh}(0) = 0$ et que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, que

$$\operatorname{sh}(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

• Montrons que ch est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$.
À nouveau, par définition de ch, ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et un calcul immédiat montre que $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.
Or nous venons de voir que sh est strictement positive sur $]0; +\infty[$ donc ch est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc injective.
De plus ch est continue, $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, donc d'après le théorème de la bijection continue, ch est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$.

On note Argsh et Argch leurs bijections réciproques.
Le théorème de la bijection continue nous permet d'affirmer que Argsh et Argch sont continues et strictement croissantes sur leur ensemble de définition,
que Argsh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
et Argch une bijection de $[1; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

2) $\forall u \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{sh}^2(u) = 1$.
Soit $x$ un réel et posons $u = \operatorname{Argsh}(x)$.
On a donc $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsh}(x)) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh}(x)) = 1$
et par définition de Argsh, $\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh}(x)) = x^2$.
Donc $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsh}(x)) = 1 + x^2$.
Enfin, comme $\operatorname{ch} > 0$ sur $\mathbb{R}$, on peut conclure que, pour tout réel $x$,

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x)) = +\sqrt{1 + x^2}$$

3) De même, en utilisant le fait que $\forall u \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{sh}^2(u) = 1$ pour $u = \operatorname{Argch}(x)$ (avec, par

définition de Argch, $x$ réel supérieur ou égal à 1), on obtient que

$$x^2 - \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argch}(x)) = 1$$

On en déduit que $\forall x \in [1;+\infty[, \operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x)) = \pm\sqrt{x^2-1}$.
Enfin, $\operatorname{Argch}(x) \in [0;+\infty[$ (par définition de Argch) et sh est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\forall x \in [1;+\infty[, \operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x)) = +\sqrt{x^2-1}$$

4)
- sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, donc Argsh est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{sh}'(\operatorname{Argsh}(x)) \neq 0$.
  Or $\operatorname{sh}'(\operatorname{Argsh}(x)) = \operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$ ne s'annule jamais donc Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
- ch est une bijection de $[0;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$ dérivable sur $[0;+\infty[$ donc Argch est dérivable
  en tout $x \in [1;+\infty[$ tel que $\operatorname{ch}'(\operatorname{Argch}(x)) \neq 0$.
  Or $\operatorname{ch}'(\operatorname{Argch}(x)) = \operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x)) = \sqrt{x^2-1}$ s'annule (sur $[1;+\infty[$) si et seulement si $x = 1$.
  Donc Argch est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in ]1;+\infty[$,
  $$\operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

5) Soit $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.
ch ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$, th est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}'(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(x) \times \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) \times \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$.
Donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$ et
$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(-x) = \dfrac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = \dfrac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = -\operatorname{th}(x)$.
Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1$.
Finalement, th est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$.
Notons $\operatorname{Argth} \in \mathcal{F}(]-1;1[, \mathbb{R})$ sa bijection réciproque.
D'après le théorème de la bijection continue, Argth est continue et strictement croissante sur $]-1;1[$ et vérifie
$\lim\limits_{x\to-1} \operatorname{Argth}(x) = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1$) et
$\lim\limits_{x\to1} \operatorname{Argth}(x) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1$).
Enfin, th étant dérivable sur $\mathbb{R}$, Argth est dérivable en tout $x \in ]-1;1[$ tel que $\operatorname{th}'(\operatorname{Argth}(x)) \neq 0$.
Or $\forall u \in \mathbb{R}, \operatorname{th}'(u) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(u)} = \dfrac{\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{sh}^2(u)}{\operatorname{ch}^2(u)} = 1 - \operatorname{th}^2(u)$.
Donc, $\forall x \in ]-1;1[, \operatorname{th}'(\operatorname{Argth}(x)) = 1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{Argth}(x)) = 1 - x^2$ qui ne s'annule jamais sur $]-1;1[$.
Donc Argth est dérivable sur $]-1;1[$ et $\operatorname{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

6) Soit $x \in ]-1;1[$ et $u \in \mathbb{R}$ tels que $x = \mathrm{th}(u)$.

On cherche une expression de Argth ce qui revient à exprimer $u$ en fonction de $x$.

Or :
$$\begin{aligned}
x = \mathrm{th}(u) &\Leftrightarrow \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = x \\
&\Leftrightarrow \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} = x \\
&\Leftrightarrow e^{2u} - 1 = \left(e^{2u} + 1\right) x \\
&\Leftrightarrow e^{2u}(1 - x) = 1 + x \\
&\Leftrightarrow e^{2u} = \frac{1 + x}{1 - x} \\
&\Leftrightarrow u = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)
\end{aligned}$$

Finalement
$$\forall x \in ]-1;1[, \mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

7) On démontre de même qu'à la question précédente que
$$\forall x \in [1;+\infty[, \mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

et que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Il y a cependant deux passages un peu délicats.

En effet, pour obtenir la première expression, on résout l'équation d'inconnue $u \in [0;+\infty[$ : $(E_1) \quad \mathrm{ch}(u) = x$ avec $x \in [1;+\infty[$.

On montre aisément que cette équation est équivalente à
$$e^{2u} - 2xe^u + 1 = 0$$

que l'on résout en posant $U = e^u$ à l'aide de la méthode habituelle (discriminant, etc...).

Cette équation a ***deux solutions*** qui sont $u_1 = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ et $u_2 = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

Pour conclure, il ***faut remarquer que*** $u_2 < 0$, donc n'appartient pas à l'ensemble $[0;+\infty[$ dans lequel on cherche l'antécédent de $x$.

En effet, $x - \sqrt{x^2 - 1} = \dfrac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \leqslant 1$ car $x \geqslant 1$ donc $x + \sqrt{x^2 - 1} \geqslant 1$.

Donc $u_1$ est ***l'unique solution répondant aux conditions imposées.***

Un raisonnement similaire doit aussi être fait pour obtenir l'expression de $\mathrm{Argsh}(x)$.

## Exercice 2.

1) $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ intervalle sur lequel tan est définie, dérivable et strictement positive.

Par composition, Gd est donc bien définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

2) $\forall x \in I, \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$.

- On obtient immédiatement <u>la dernière relation</u> en écrivant
$$\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = 2\ln\sqrt{\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}} = 2\,\mathrm{Argth}\left(\tan\tfrac{x}{2}\right).$$

- De plus
  $\forall x \in I, \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$
  Donc $\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right)$.
- Sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, cos est positive donc $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$.
  D'où : $\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \sqrt{1+\tan^2(x)}\right) = \mathrm{Argsh}(\tan x)$.
- Enfin,
  $\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)+1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\right) = \mathrm{Argth}(\sin x)$.

3) $\forall x \in I, \mathrm{Gd}'(x) = (\mathrm{Argth}(\sin x))' = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

4) Gd étant définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{Gd}'(x) > 0$, la fonction est strictement croissante et continue donc bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}$ et
   $x = \mathrm{Gd}(u) \Leftrightarrow x = \mathrm{Argsh}(\tan u) \Leftrightarrow \mathrm{sh}(x) = \tan(u) \Leftrightarrow u = \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x))$.
   Donc $\mathrm{Gd}^{-1}(x) = \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x))$.
   On en déduit immédiatement, en dérivant l'expression précédente que

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\mathrm{Gd}^{-1}(x))' = \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$

# Développements limités, suites, intégrales

## Exercice 1.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{x} \end{cases}$.

On ne demande pas de justifier que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

1) Le code suivant permet de représenter graphiquement $f$ :
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X= np.linspace(-3,3,2000)
f=lambda x:(np.sqrt(1+x**4)-1)/x
Y=f(X)
plt.plot(X,Y)
```
Recopier ce code dans Spyder et observer la représentation graphique de $f$.

2) Donner un développement limité à l'ordre 3 de $f$ en 0.

3) Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0 (autrement dit, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe et est finie).
Conformément au résultat de cette question, on prolonge $f$ en 0 par sa limite en 0 : $f$ ***est donc désormais une fonction définie sur*** $\mathbb{R}$.

4) Montrer que le prolongement obtenu à la question précédente est dérivable.

5) Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en 0 et la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport $\mathcal{T}$ au voisinage de 0.

6) En effectuant un développement asymptotique de $f$ au voisinage de $\pm\infty$, montrer que $f$ possède une asymptote oblique dont on donnera l'équation.

7) Montrer (le plus simplement possible) que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

## Exercice 2.

Le but de cet exercice est d'obtenir une expression des intégrales de Wallis $\boxed{W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t}$ puis de l'utiliser pour obtenir la limite d'une intégrale.

### - Partie A - Préliminaire

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$.

### - Partie B - Expression de $W_n$

1) Calculer $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.\mathrm{d}t$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t$.

2) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\mathrm{d}t$.

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. Pour les deux questions suivantes, on pourra utiliser le résultat de la partie préliminaire.

4) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

5) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, W_{2k+1} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$.

6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.
(indication : on pourra distinguer deux cas suivant la parité de $n$...)

**- Partie C - Équivalent de $W_n$**

1) Montrer que $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \sin^2 t \leq \sin t \leq 1$.

2) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{W_{n+2}}{W_n} \leq \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

3) En utilisant les résultats de la partie précédente, montrer que $W_n \sim W_{n+1}$.

4) En utilisant les résultats de la partie précédente, montrer que $W_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$.

5) En déduire un équivalent de $W_n$.

**- Partie D - Calcul de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}u$.**

1) Justifier l'existence de la fonction $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}u$.

2) Montrer que $F$ est croissante et que $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) \geq 0$.

3) Montrer que $\forall t \in [0; 1], 1 - t \leq e^{-t} \leq \dfrac{1}{1+t}$.

4) En posant $u = \sqrt{nt}$ (avec $n \in \mathbb{N}$), en déduire que
$\forall u \in \left[0; \sqrt{n}\right], \left(1 - \dfrac{u^2}{n}\right)^n \leq e^{-u^2} \leq \left(1 + \dfrac{u^2}{n}\right)^{-n}$.

5) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u \leq F\left(\sqrt{n}\right) \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u$.

6) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.

7) En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{n} \sin v$, montrer que
$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u = \sqrt{n} W_{2n+1}$.

8) En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{n} \tan v$, montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

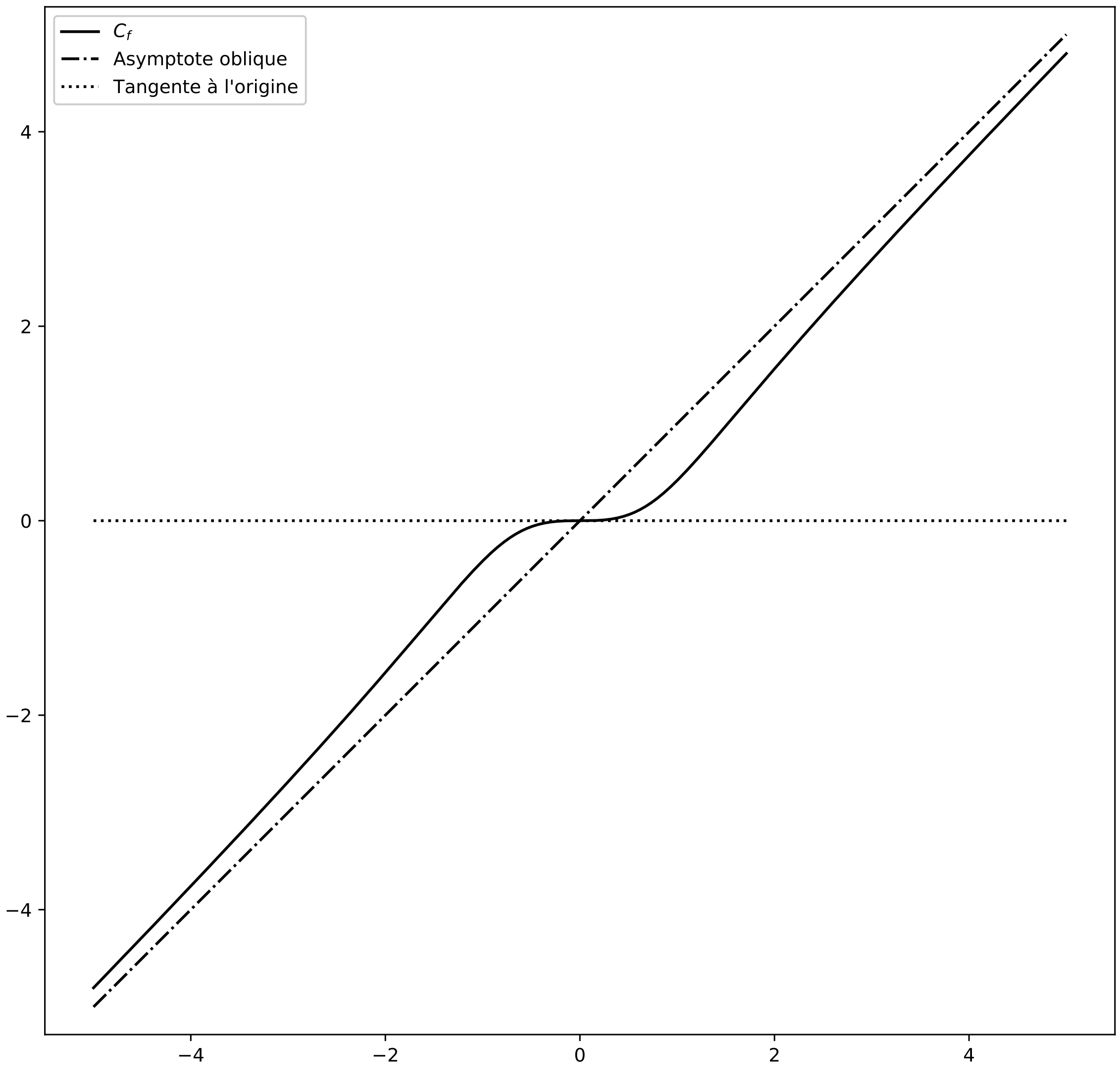
9) En déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

# Correction DM n°3

**Exercice 1.**

1)




2) $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)}{x} = \dfrac{1+\frac{x^4}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)-1}{x} = \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

3) $f$ possède un développement limité à l'ordre 3 (donc à un ordre supérieur ou égal à 1) en 0. Donc $f$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (terme constant du développement limité).

4) De plus, ce prolongement est dérivable et $f'(0) = 0$ (coefficient du terme de degré 1 du

développement limité).

5) L'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}_f$ est donc $y=0$ et $f(x)=\dfrac{x^3}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$ est du signe de $x^3$ au voisinage de 0.
Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en $0^+$
et $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de sa tangente en $0^-$.

6) Développement asymptotique : on pose $h=\dfrac{1}{x}\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$.

$$\begin{aligned} f(x)=f\left(\tfrac{1}{h}\right) &= \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{h^4}}-1\right)}{\frac{1}{h}} \\ &= h\times\frac{1}{\sqrt{h^4}}\left(\sqrt{h^4+1}-h^2\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(1+\tfrac{h^4}{2}+\underset{h\to 0}{o}(h^4)-h^2\right) \\ &= \tfrac{1}{h}-h+\frac{h^3}{2}+\underset{h\to 0}{o}(h^3) \end{aligned}$$

Donc $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}+\underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
Donc la droite d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la représentation graphique de $f$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

7) $f$ est une fonction impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0;+\infty[$.
De plus $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (car $f(x)=x+\underset{x\to+\infty}{o}(x)$ au voisinage de $+\infty$).
Donc $f([0;+\infty[)=[0;+\infty[$, et comme $f$ est impaire, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.
Donc $f$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour montrer qu'elle est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective. La fonction étant continue, ceci équivaut à montrer que $f$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
Or $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle en 0, et
$$\forall x>0,\ f'(x)=\frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}x-\sqrt{1+x^4}+1}{x^2}=\frac{x^4-1+\sqrt{1+x^4}}{x^2\sqrt{1+x^4}}\geqslant\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}>0.$$
Donc $f'\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, ne s'annule qu'en 0, donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective.
$f$ est bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

## Exercice 2.

### - Partie A - Préliminaire

Par récurrence :
Initialisation : pour $n=0$, le produit du membre gauche est vide donc vaut 1 et $\dfrac{2^0(0!)^2}{(0)!}=1$.

Pour $n=1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{1}\frac{2k}{2k-1}=\frac{2}{2-1}=2$ et $\dfrac{2^2(1!)^2}{(2)!}=\dfrac{4}{2}=2$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang $n$ et démontrons la au rang $n+1$.
$$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k}{2k-1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\times\frac{2n+2}{2n+1}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\times\frac{2(n+1)\times 2(n+1)}{(2n+1)\times(2n+2)}=\frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}.$$

La propriété est initialisée en $n = 0$ (et $n = 1$), elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**- Partie B - Expression de $W_n$**

1) $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

2) $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t) \times \sin(t)\mathrm{d}t$

$W_{n+2} = \left[\sin^{n+1}(t) \times (-\cos(t))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos(t)\sin^n(t) \times (-\cos(t))\mathrm{d}t$

donc $W_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\mathrm{d}t.$

3) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 t\right)\sin^n t\mathrm{d}t \quad \text{donc} \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

$W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} = (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ ou encore $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n.$

4) La question précédente permet d'affirmer que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$W_{2k} = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \times W_0.$

En utilisant la partie préliminaire, on obtient donc $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}.$

5) De même qu'à la question précédente, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$W_{2k+1} = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1} \times W_1 = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j-1} \times \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j+1}.$

Le second produit est télescopique, donc en utilisant la partie préliminaire, on obtient

$W_{2k+1} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!} \times \dfrac{1}{2k+1} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}.$

6) Si $n$ est pair, autrement dit $n = 2k, k \in \mathbb{N}$,

$W_nW_{n+1} = W_{2k}W_{2k+1} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} = \dfrac{\pi}{2(2k+1)} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}.$

Si $n$ est impair, autrement dit $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$,

$W_nW_{n+1} = W_{2k+1}W_{2k+2} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \times \dfrac{(2k+2)!}{2^{2k+2}((k+1)!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2k+2)\pi}{4(k+1)^2 \times 2} = \dfrac{\pi}{2(2k+2)} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}.$

Dans les deux cas on a bien, $W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}.$

**- Partie C - Équivalent de $W_n$**

1) $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \sin t \leq 1$, notamment on peut multiplier l'inégalité par $\sin t \geq 0$ sans changer son sens :

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \sin^2 t \leq \sin t \leq 1.$

2) Les inégalités de la question précédente, valables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, permettent d'écrire (après multiplication par $\sin^n(t) \geq 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n}(t)\mathrm{d}t$ c'est-à-dire,

$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$.

Comme par ailleurs, $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \sin^n(t) > 0$ et comme la fonction sin est continue, $\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 0$.

On en déduit donc en divisant par $W_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{W_{n+2}}{W_n} \leq \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

3) Montrons d'abord que $W_n \sim W_{n+2}$ : d'après B-3), on a $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n \Rightarrow$ $\dfrac{W_{n+2}}{W_n} = \dfrac{n+1}{n+2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ qui est la définition de $W_n \sim W_{n+2}$.

En utilisant la question précédente à présent, on a alors par le théorème des gendarmes $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $W_n \sim W_{n+1}$.

4) D'une part, d'après B-6), $W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$. D'autre part d'après la question précédente, $W_n \sim W_{n+1}$. Donc,

$W_n^2 \sim W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)} \sim \dfrac{\pi}{2n}$ ce qu'il fallait démontrer.

5) Aucune règle du cours ne concerne les « racines carrées d'équivalents » mais la question précédente nous permet de penser que $W_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$. Démontrons le :

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{W_n^2}{\frac{\pi}{2n}}} = 1$ donc

$W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

**- Partie D - Calcul de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$.**

1) La fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème fondamental du calcul différentiel, $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$ existe et est l'unique primitive de $u \mapsto e^{-u^2}$ s'annulant en 0.

2) $u \mapsto e^{-u^2}$ est positive pour tout $u \in \mathbb{R}$ donc sa primitive est croissante sur $\mathbb{R}$.

Or $F(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) \geq F(0) = 0$.

3) Étudions la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t} - 1 + t$ qui est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$f'(t) = -e^{-t} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 0$ donc $f$ est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Comme de plus, $f(0) = 1 - 1 = 0$, $f$ passe par son minimum 0 en 0 et $\forall t \in \mathbb{R}, 1 - t \leq e^{-t}$.

Il s'agit maintenant de démontrer la seconde partie de l'inégalité : $\forall t \in [0; 1], e^{-t} \leq \dfrac{1}{1+t} \Leftrightarrow$ $\forall t \in [0; 1], 1 + t \leq e^t \Leftrightarrow \forall t \in [-1; 0], 1 - t \leq e^{-t}$ ce que nous venons de démontrer.

Donc $\forall t \in [0; 1], 1 - t \leq e^{-t} \leq \dfrac{1}{1+t}$.

4) Posons $u = \sqrt{nt}$ donc $t = \dfrac{u^2}{n}$ (avec $n \in \mathbb{N}$) dans l'inégalité précédente :

$\forall u \in \left[0;\sqrt{n}\right], 1-\dfrac{u^2}{n} \leq e^{-\dfrac{u^2}{n}} \leq \dfrac{1}{1+\dfrac{u^2}{n}}.$

Cette inégalité concerne des termes qui sont tous positifs et la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc en élevant à la puissance $n$ :

$\forall u \in \left[0;\sqrt{n}\right], \left(1-\dfrac{u^2}{n}\right)^n \leq \left(e^{-\dfrac{u^2}{n}}\right)^n = e^{-u^2} \leq \left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n.$

5) L'inégalité de la précédente question est vérifiée pour tout $u \in \left[0;\sqrt{n}\right]$ donc en utilisant la croissance de l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\mathrm{d}u \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u$ où on reconnaît $F\left(\sqrt{n}\right)$ dans le membre central.

6) Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t.$

Effectuons le changement de variable $s = \frac{\pi}{2} - t$, $t = \frac{\pi}{2} - s$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}s$.

$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-s\right)\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(s)\mathrm{d}s$ car $\forall s \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{\pi}{2}-s\right) = \cos(s).$

7) Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{n}\sin v$, $\mathrm{d}u = \sqrt{n}\cos v\mathrm{d}v$ :

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{n\sin^2 v}{n}\right)^n \sqrt{n}\cos v\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 v\right)^n \sqrt{n}\cos v\mathrm{d}v = \sqrt{n}W_{2n+1}$

d'après le résultat de la question précédente.

8) $u = \sqrt{n}\tan v$, $\mathrm{d}u = \sqrt{n} \times \dfrac{1}{\cos^2 v} \times \mathrm{d}v$ :

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\frac{n\tan^2 v}{n}\right)^{-n} \sqrt{n} \times \frac{1}{\cos^2 v} \times \mathrm{d}v = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 v\right)^{n-2} \mathrm{d}v \leq$ $\sqrt{n}W_{2n-2}$ car l'intégrande est positive donc l'intégrale croissante.

9) D'après la question 2), nous savons que $F$ est croissante donc
$\forall x \in \left[\sqrt{n};\sqrt{n+1}\right], F\left(\sqrt{n}\right) \leq F(x) \leq F\left(\sqrt{n+1}\right).$
Or, d'après les questions 5), 7) et 8), nous savons de plus que
$\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n}W_{2n+1} \leq F\left(\sqrt{n}\right) \leq \sqrt{n}W_{2n-2}.$
On a donc, $\forall x \in \left[\sqrt{n};\sqrt{n+1}\right], \sqrt{n}W_{2n+1} \leq F(x) \leq \sqrt{n+1}W_{2n}.$

Enfin, d'après C-5), $\sqrt{n}W_{2n+1} \sim \sqrt{n+1}W_{2n} \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2 \times 2n}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Donc par application du théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

# EV, polynômes, matrices

### Exercice 1.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $F = \{f \in E, \exists P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2^x P(x)\}$.

Soit $\phi : \begin{cases} E & \to & E \\ f & \mapsto & \phi(f) = (x \in \mathbb{R} \mapsto f(x+1) - f(x)) \end{cases}$.

Autrement dit, $\phi$ est l'application qui à une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ associe la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

1) Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2) Montrer que $\phi$ est un endomorphisme de $E$.
3) Que vaut $\operatorname{Ker} \phi$ ?
4) Montrer que la restriction de $\phi$ à $F$ est un automorphisme.
   ***Remarque*** : on montrera notamment que $\forall f \in F, \phi(f) \in F$.
5) Donner l'antécédent par $\phi$ des applications suivantes :
   a) $f_1 : x \mapsto 2^x$
   b) $f_2 : x \mapsto 2^x x$
   c) $f_3 : x \mapsto 2^x x^2$
6) Simplifier l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k k^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

### Exercice 2.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques suites définies par la relation de récurrence $u_{n+1} = -u_n^2 + u_n$.

***Partie A - Suites à valeurs réelles***

Dans cette partie, on suppose que $u_0 \in \mathbb{R}$, de sorte que $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1) Étudier la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto -x^2 + x$.
2) Tracer dans un même repère orthonormé (unité 2cm ou 2 carreaux) la représentation graphique de $f$ sur $[-1; 2]$ et la droite d'équation $y = x$.
3) Montrer que, quelle que soit la valeur de $u_0$, la suite $u$ est décroissante.
4) On suppose que $u_0 \in ]-\infty; 0[$. Montrer que $u$ diverge vers $-\infty$.
5) On suppose que $u_0 \in [0; 1]$. Montrer que $u$ converge et donner sa limite.
6) Que peut-on affirmer si $u_0 \in ]1; +\infty[$ ?

***Partie B - Suites à valeurs complexes***

Dans cette partie, on suppose que $u_0 \in \mathbb{C}$, de sorte que $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ à priori, même s'il reste possible que les termes de la suite soient, tous ou en partie, réels...

On rappelle qu'une suite complexe converge vers $c \in \mathbb{C}$ si et seulement si la suite des parties réelles de ses termes converge vers $\mathcal{R}e\,(c)$ et la suite des parties imaginaires de ses termes converge vers $\mathcal{I}m\,(c)$.

1) On suppose que $u_0 = \frac{1}{2} + ib$ avec $b \in \mathbb{R}$.
Calculer $u_1$ puis donner les valeurs de $b$ pour lesquelles la suite converge.
On précisera notamment la valeur de sa limite lorsqu'il y a convergence.

2) On suppose que $|u_0| > 2$. Montrer que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

***Partie C - Suites à valeurs matricielles***

Dans cette partie, on suppose que $u_0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de sorte que $u \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$.

Plus précisément, on suppose qu'il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u_0 = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$.

1) Calculer $u_1$ et $u_2$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \text{Vect}\,(u_0)$.

3) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les réels $a$ et $b$ pour que ***les suites des coefficients*** des matrices $u_n$ ***convergent toutes***.

# Correction DM n°4

## Exercice 1.

1) - $F \subset E$ : évident, par définition de $F$.
   - En prenant pour $P$ le polynôme nul, on vérifie que la fonction nulle est bien un élément de $F$.
   - Soit $f \in F$, $g \in F$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   Il existe donc deux polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X], Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2^x P(x)$ et $g(x) = 2^x Q(x)$.
   Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \big(\lambda f + \mu g\big)(x) = 2^x\big(\lambda P + \mu Q\big)(x)$.
   Or $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel, donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Finalement, $\lambda f + \mu g \in F$.

   $F$ est donc bien un sous-espace vectoriel de $E$.

2) Tout d'abord, étant donnée $f \in E$, $\phi(f)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ : donc $\phi(f) \in E$.
   De plus, $\phi$ est une application linéaire. En effet, soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :
   $$\begin{aligned} \phi(\lambda f + \mu g) &= \big(x \mapsto \lambda f(x+1) + \mu g(x+1) - \lambda f(x) - \mu g(x)\big) \\ &= \lambda\big(x \mapsto f(x+1) - f(x)\big) + \mu\big(x \mapsto g(x+1) - g(x)\big) \\ &= \lambda\phi(f) + \mu\phi(g) \end{aligned}$$
   Donc $\phi$ est linéaire, de $E$ dans $E$ : c'est un endomorphisme de $E$.

3) $\operatorname{Ker}\phi$ est constitué des fonctions $f$ pour lesquelles $\phi(f) = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$, c'est-à-dire pour lesquelles $\phi(f)$ est la fonction nulle.
   Donc $f \in \operatorname{Ker}\phi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$.
   Il suffit de reconnaître, ici, que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$ signifie, par définition, que $f$ est périodique, de période 1.
   Donc $\operatorname{Ker}\phi$ est constitué des fonctions périodiques dont ***une*** période est 1.
   Remarque : les fonctions $\frac{1}{2}$-périodiques, par exemple, sont donc aussi des éléments de $\operatorname{Ker}\phi$.

4) Montrons que $\phi_{|F}$ est un automorphisme de $F$.
   - $F$ est stable par $\phi$ : en effet, soit $f \in F$. Par définition, il existe donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2^x P(x)$.
   Donc :
   $$\begin{aligned} \phi(f) &= \big(x \mapsto f(x+1) - f(x)\big) \\ &= \big(x \mapsto 2^{x+1}P(x+1) - 2^x P(x)\big) \\ &= \left(x \mapsto 2^x\left(2P(x+1) - P(x)\right)\right) \end{aligned}$$
   Or, étant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $Q = 2P(X+1) - P$ est aussi un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Donc $\phi(f) \in F$.
   - $\phi$, restreinte à $F$, reste linéaire.

- Il reste donc à montrer que $\phi_{|F}$ est bijective. Pour cela, il suffit de remarquer que :
  - $\star$ $F$ est de dimension finie car engendré par la famille $(x \mapsto 2^x; x \mapsto 2^x x; ...; x \mapsto 2^x x^n)$.
  - $\star$ $f \in \operatorname{Ker} \phi_{|F} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \in \operatorname{Ker} \phi \\ f \in F \end{array} \right.$.

    Soit $f \in F$ : il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2^x P(x)$.

    Donc $f \in \operatorname{Ker} \phi_{|F} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2^x \left(2P(x+1) - P(x)\right) = 0$.

    Ce qui équivaut à dire que $2P(X+1) - P$ est le polynôme nul (car $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0$).

    Supposons $P$ non nul de coefficient dominant $a_p \neq 0$. Soit $Q = 2P(X+1) - P$.

    $Q = \sum_{k=0}^{p} 2a_k(X+1)^k - \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = (2a_p - a_p) X^p + 2a_p \sum_{i=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} X^i + \sum_{k=0}^{p-1} a_k \left(2(X+1)^k - X^k\right)$

    Cette dernière expression montre que $Q$ est aussi de coefficient dominant $a_p \neq 0$.

    Autrement dit, si $P \neq 0$, alors $Q = 2P(X+1) - P \neq 0$.

    Donc $\operatorname{Ker} \phi_{|F} = \{x \mapsto 0\}$ : $\phi$ est donc injective.
- Finalement, $\phi_{|F}$ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie : c'est un automorphisme.

5) Donner l'antécédent par $\phi$ des applications suivantes :
   a) Soit $f_1 : x \mapsto 2^x$ et $F_1 = \phi^{-1}(f_1)$.

      D'après ce qui précède, on recherche $F_1$ de la même forme que $f_1$ : $\forall x \in \mathbb{R}, F_1(x) = 2^x \times a$.

      $\phi(F_1) = \left(x \mapsto 2^x a\right)$. Donc $\phi(F_1) = f_1 \Rightarrow a = 1$.

      $\phi^{-1}(f_1) = f_1$.

   b) Soit $f_2 : x \mapsto 2^x x$ et $F_2 = \phi^{-1}(f_2)$.

      D'après ce qui précède, on recherche $F_2$ de la même forme que $f_2$ :

      $$\forall x \in \mathbb{R}, F_2(x) = 2^x \times (bx + c)$$

      $\phi(F_2) = \left(x \mapsto 2^x(2b(x+1) + 2c - bx - c)\right) = \left(x \mapsto 2^x(bx + 2b + c)\right)$.

      Donc $\phi(F_2) = f_2 \Rightarrow (b = 1 \, \textbf{et} \, c = -2)$ - ici, l'égalité de fonctions sur $\mathbb{R}$ entraîne l'égalité de polynômes, donc de leurs coefficients.

      $\phi^{-1}(f_2) = \left(x \mapsto 2^x(x-2)\right)$.

   c) Soit $f_3 : x \mapsto 2^x x^2$ et $F_3 = \phi^{-1}(f_3)$.

      D'après ce qui précède, on recherche $F_3$ de la même forme que $f_3$ :

      $$\forall x \in \mathbb{R}, F_3(x) = 2^x \times (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

      $\phi(F_3) = \left(x \mapsto 2^x \left(2\alpha x^2 + 4\alpha x + 2\alpha + 2\beta x + 2\beta + 2\gamma - \alpha x^2 - \beta x - \gamma\right)\right)$.

      Donc $\phi(F_3) = \left(x \mapsto 2^x \left(\alpha x^2 + (4\alpha + \beta)x + (2\alpha + 2\beta + \gamma)\right)\right)$.

      Donc $\phi(F_3) = f_3 \Rightarrow (\alpha = 1 \, \textbf{et} \, \beta = -4 \, \textbf{et} \, \gamma = 6)$.

      $\phi^{-1}(f_3) = \left(x \mapsto 2^x \left(x^2 - 4x + 6\right)\right)$.

6) En utilisant les résultats précédents : soit $n \in \mathbb{N}$

   $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} f_3(k) = \sum_{k=1}^{n} F_3(k+1) - F_3(k) = F_3(n+1) - F_3(1)$ par télescopage.

   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 2^{n+1}\left(n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 6\right) - 6 = 2^{n+1}\left(n^2 - 2n + 3\right) - 6$

   $$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 2^{n+1}\left(n^2 - 2n + 3\right) - 6$$

**Exercice 2.**

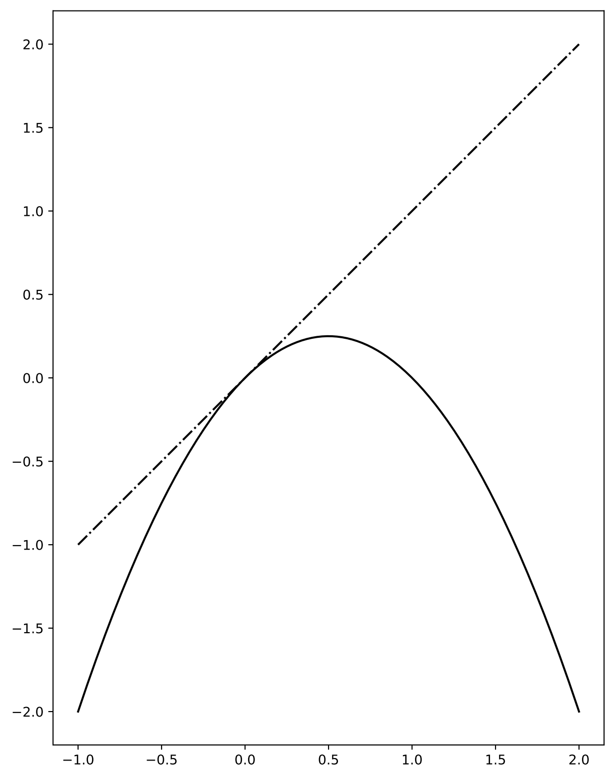
***Partie A - Suites à valeurs réelles***

Dans cette partie, on suppose que $u_0 \in \mathbb{R}$, de sorte que $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1) Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto -x^2 + x$.
   $f$ est une fonction polynomiale donc est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x + 1$.
   Donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $+$ | | $-$ |
| Variations de $f$ | $-\infty$ $\nearrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ $-\infty$ |

2)




3) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 + u_n - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$.
   La suite $u$ est donc décroissante, et ceci quelle que soit la valeur de $u_0$.

4) $u$ est décroissante, donc si $u_0 < 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_0 < 0$.
   La suite $u$ étant monotone, ou bien elle est minorée et converge, ou bien elle n'est pas minorée et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

De plus, en supposant que $u$ soit minorée, alors $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$ car $f$ est continue.
Or $l = f(l) \Rightarrow l = -l^2 + l \Rightarrow l = 0$.
Si $u$ est minorée, elle converge donc vers 0, ce qui est absurde puisque $l \leqslant u_0 < 0$ par passage à la limite dans l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_0$.
Donc si $u_0 < 0$, alors $u$ n'est pas minorée et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

5) On suppose que $u_0 \in [0;1]$.
$f(0) = 0$, $f(1) = 0$, donc en complétant le tableau de variations de $f$ on obtient :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | \| | $+$ | \| | $-$ | \| | $-$ | |
| Variations de $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

- ***Si*** $u_0 \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ **:**
  $f\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right) = \left[0;\frac{1}{4}\right] \subset \left[0;\frac{1}{2}\right]$.
  Le segment $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ est donc stable par $f$, ce qui permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.
  La suite $u$ est donc décroissante (d'après la question 3.), minorée par 0, donc converge.
  Or nous avons vu à la question 4. que la seule limite possible est 0, donc
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
- ***Si*** $u_0 \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ **:**
  Alors, $u_1 = f(u_0) \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ et on peut réutiliser le point précédent ***à partir du rang 1***. On a donc à nouveau
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

6) Si $u_0 \in ]1;+\infty[$, alors d'après le tableau de variations de $f$, $u_1 = f(u_0) < 0$ et en réutilisant le résultat de la question 4. à partir du rang 1, on peut affirmer que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

***Partie B - Suites à valeurs complexes***

Dans cette partie, on suppose que $u_0 \in \mathbb{C}$, de sorte que $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ à priori, même s'il reste possible que les termes de la suite soient, tous ou en partie, réels...

1) On suppose que $u_0 = \frac{1}{2} + ib$ avec $b \in \mathbb{R}$.
$u_1 = -\left(\frac{1}{2} + ib\right)^2 + \frac{1}{2} + ib = -\frac{1}{4} - ib + b^2 + \frac{1}{2} + ib = b^2 + \frac{1}{4}$.
Notamment $u_1 \in \mathbb{R}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \mathbb{R}$.
On peut donc utiliser les résultats de la partie A ***à partir du rang 1*** : la suite $u$ converge (vers 0) si et seulement si $b^2 + \frac{1}{4} \in [0;1]$.
Donc la suite $u$ converge vers 0 si $b \in \left[\dfrac{-\sqrt{3}}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ et diverge dans les autres cas.

2) On suppose que $|u_0| > 2$.
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| > 2$.
L'***initialisation*** est vérifiée par hypothèse.

***Hérédité*** : supposons que, pour un entier $n$ donné, $|u_n| > 2$.
Alors $|u_{n+1}| = |u_n(-u_n+1)| = |u_n| \times |1-u_n|$.
Donc $|u_{n+1}| \geqslant \Big||u_n|\Big| \times \Big|1-|u_n|\Big|$ d'après la deuxième inégalité triangulaire.
Or $\Big|1-|u_n|\Big| = \Big||u_n|-1\Big| = |u_n|-1 > 1$ par hypothèse de récurrence.
Donc $|u_{n+1}| > |u_n| > 2$.
***Conclusion*** : la propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc vraie pour tout entier $n$.
De plus, l'hérédité nous permet d'affirmer que, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| > 2$, on a aussi $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| > |u_n|$.
La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.
Comme ***il s'agit d'une suite réelle***, le théorème de convergence/divergence monotone nous permet donc d'affirmer que cette suite converge si et seulement si elle est majorée, et diverge vers $+\infty$ dans le cas contraire.
Or, en reprenant à nouveau le calcul conduit dans l'hérédité de la précédente démonstration par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$|u_{n+1}| \geqslant \Big|u_n\Big| \times \Big||u_n|-1\Big| > \Big|u_n\Big| \times \big(|u_0|-1\big)$.
Par comparaison à la suite géométrique de premier terme $|u_0|$ et de raison $|u_0|-1>1$, on peut donc affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$$

***Partie C - Suites à valeurs matricielles***

Dans cette partie, on suppose que $u_0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de sorte que $u \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$.
Plus précisément, on suppose qu'il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u_0 = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$.

1) $u_1 = -u_0^2+u_0 = -\begin{pmatrix} a(a+b) & a(a+b) \\ b(a+b) & b(a+b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = (1-a-b)\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = (1-a-b)u_0$
$u_2 = -u_1^2+u_1 = -(1-a-b)^2u_0^2 + (1-a-b)u_0 = (1-a-b)\left(1-a-b+(a+b)^2\right)u_0$

2) La question précédente permet de conjecturer qu'il existe une suite ***réelle*** $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha_n u_0$.
Démontrons le par récurrence :
La propriété est clairement ***initialisée*** aux rangs 0, 1 et 2 avec
$\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = (1-a-b)$ et $\alpha_2 = (1-a-b)\left(1-a-b+(a+b)^2\right)$.
***Hérédité*** : supposons que pour un entier naturel $n$ donné, on ait $u_n = \alpha_n u_0$
Alors $u_{n+1} = -u_n^2+u_n = -\alpha_n^2 u_0^2 + \alpha_n u_0 = \alpha_n\big(1-(a+b)\alpha_n\big)u_0$
Donc, en posant $\alpha_{n+1} = \alpha_n\big(1-(a+b)\alpha_n\big)$ qui est bien réel, on a prouvé que $u_{n+1} = \alpha_{n+1}u_0$.
***Conclusion*** : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha_n u_0$ avec $\alpha_n \in \mathbb{R}$.
De plus, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_{n+1} &= -(a+b)\alpha_n^2+\alpha_n \end{cases}$$

3) ***1ère méthode : très astucieuse, mais il faut le voir***
On souhaite obtenir une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ pour que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $\begin{cases} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_{n+1} &= -(a+b)\alpha_n^2+\alpha_n \end{cases}$, converge.

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $\begin{cases} w_0 & = & a+b \\ w_{n+1} & = & -w_n^2 + w_n \end{cases}$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = (a+b)\alpha_n$.

***Initialisation*** : $w_0 = a+b = (a+b)\alpha_0$.

***Hérédité*** : supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ donné, on ait $w_n = (a+b)\alpha_n$.

Alors $w_{n+1} = -w_n^2 + w_n = -(a+b)^2\alpha_n^2 + (a+b)\alpha_n = (a+b)\left(\alpha_{n+1} - \alpha_n\right) + (a+b)\alpha_n$ car $-(a+b)\alpha_n^2 = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ par définition de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Donc $w_{n+1} = (a+b)\alpha_{n+1}$ en développant la précédente expression.

***Conclusion :*** les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont proportionnelles.

Par conséquent, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge : or d'après la première partie, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $a+b \in [0;1]$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge est donc $a+b \in [0;1]$.

***2^ème^ méthode : méthode habituelle d'étude d'une suite récurrente***

L'étude de la suite $\alpha$ est similaire à l'étude de la suite $u$ conduite dans la partie A : en posant $g : x \in \mathbb{R} \mapsto -(a+b)x^2 + x$ et en étudiant $g$, on montre que la suite $\alpha$ est monotone et qu'elle est bornée si et seulement si $a+b \in [0;1]$.

Plus précisément :

- ***Monotonie*** :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} - \alpha_n = -(a+b)\alpha_n^2 + \alpha_n - \alpha_n = -(a+b)\alpha_n^2$ qui est du signe de $-(a+b)$.
  Donc, si $a+b > 0$, la suite est décroissante,
  si $a+b = 0$, la suite est constante et
  si $a+b < 0$, la suite est croissante (et ceci quelle que soit la valeur de $\alpha_0$, qui ici vaut 1).
- ***Étude de*** $g$ : c'est une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
  On se place dans le cas où $a+b > 0$.
  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2(a+b)x + 1$ donc $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2(a+b)}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2(a+b)}$ | | $\frac{1}{a+b}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | | $+$ | \| | $+$ | \| | $-$ | \| | $-$ | |
| Variations de $g$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{4(a+b)}$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

- $\alpha_0 = 1 > 0$. Il y a deux cas suivant que $\alpha_0 = 1 \leqslant \dfrac{1}{a+b}$ ou que $\alpha_0 = 1 > \dfrac{1}{a+b}$.
  - $\star$ si $\alpha_0 = 1 \leqslant \dfrac{1}{a+b}$ c'est-à-dire si $a+b \leqslant 1$, alors $\alpha_0 \in \left[0; \dfrac{1}{a+b}\right]$ qui est un intervalle stable par $g$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \in \left[0; \dfrac{1}{a+b}\right]$, donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée, donc converge vers l'unique point fixe de $g$ qui est 0.
  - $\star$ si $\alpha_0 = 1 > \dfrac{1}{a+b}$ c'est-à-dire si $a+b > 1$ alors $\alpha_1 \in ]-\infty; 0[$ qui est un intervalle stable par $g$. Comme de plus la suite est décroissante,
    $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \leqslant \alpha_1 < 0$ et par passage à la limite (la suite étant monotone, la limite existe)

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \leqslant \alpha_1 < 0$$

Comme l'unique point fixe de $g$ est 0, il est impossible que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge : donc

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = -\infty$$

- Les autres cas ($a+b=0$ ou $a+b<0$) se font de façon similaire.

***En résumé*** :

Si $a+b>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = -\infty$, donc ***les suites des coefficients*** des matrices $u_n$ ***divergent toutes*** (à moins que $a=0$ ou que $b=0$).

Si $a+b=1$, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*, \alpha_n = 0$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = 0_2$ et ***les suites des coefficients*** des matrices $u_n$ ***convergent toutes*** puisqu'elles sont constantes et égales à 0 à partir du rang 1.

Si $a+b\in]0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ donc ***les suites des coefficients*** des matrices $u_n$ ***convergent toutes*** vers 0.

Si $a+b=0$ alors $\alpha$ est la suite constante égale à 1 donc $u$ est la suite constante égale à $u_0$. Donc ***les suites des coefficients*** des matrices $u_n$ ***convergent toutes*** puisqu'elles sont constantes.

Enfin, si $a+b<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$ et ***les suites des coefficients*** des matrices $u_n$ ***divergent toutes*** (à moins que $a=0$ ou que $b=0$).

# Quatrième partie

# DS

# Sommes finies, systèmes d'équations, nombres complexes

<u>L'usage d'une calculatrice est interdit.</u>
*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*
***Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs***.

## Cours

1) Donner la définition d'une application injective puis la traduction symbolique de cette définition.
2) Soit $z \in \mathbb{C}$.
Donner $|z|, \mathcal{R}e\,(z)$ et $\mathcal{I}m\,(z)$ à l'aide de $z$ et $\overline{z}$ uniquement.

## Exercices

### Exercice 1.

Donner la ***forme algébrique et la forme trigonométrique*** des nombres complexes ci-dessous :

$A = \dfrac{5+i}{3-2i}$ $\qquad B = \dfrac{4\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$ $\qquad C = (-1+i)^{36}$

### Exercice 2.

Résoudre le système suivant d'inconnues ***complexes*** $u, v, w$ :

$$S_1 : \begin{cases} iu + v + w = -1 \\ u + iv + w = 0 \\ u + v + iw = 1 \end{cases}$$

### Exercice 3.

Résoudre le système suivant d'inconnues $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.
***On mettra le plus grand soin dans l'exactitude des raisonnements, notamment on fera clairement apparaître la (ou les) valeur(s) particulière(s) du paramètre conduisant à des cas singuliers.***

$$S_2 : \begin{cases} ax + 2y + 3z = 1 \\ x + (1+a)y + 3z = 1 \\ x + 2y + (2a+1)z = a \end{cases}$$

## Exercice 4.

Soit $f$ la fonction définie par $f : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & J \\ x & \mapsto & \ln(1+x)+\ln(1-x) \end{array} \right.$

1) Donner l'ensemble de définition $I$ de $f$.
2) Étudier $f$ sur son ensemble de définition et construire son tableau de variations.
3) Comment doit-on choisir l'intervalle $J$ pour que $f$ soit surjective ?
4) Soit $y \in J$.
   Résoudre l'équation $f(x) = y$.
5) Tracer une représentation graphique rapide de $f$ sur le repère fourni en annexe.
   ***Applications numériques*** : on pourra utiliser $\ln(2) \approx 0,7$, $\ln(3) \approx 1,1$, $\ln(5) \approx 1,6$ et $\ln(7) \approx 1,95$.

## Exercice 5.

Pour tout entier naturel $n$ et tout entier naturel $p \geqslant n$, on définit les sommes suivantes :

$$S_{n,p} = \sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} \qquad T_p = \sum_{k=0}^{p} S_{k,p} \qquad U_n = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \binom{k}{j} 2^k$$

Le but de cet exercice est de les simplifier.

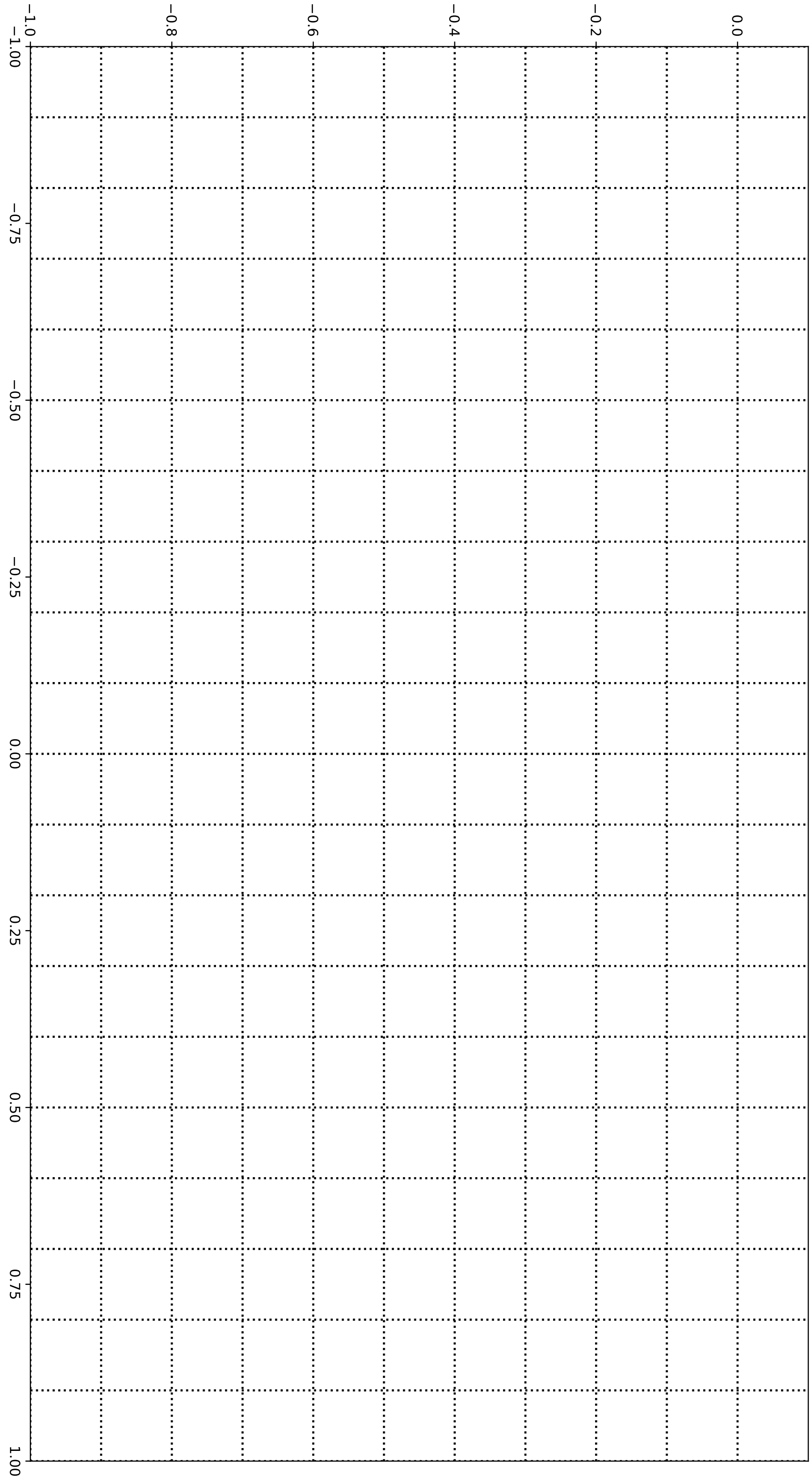
1) ***Recopier*** et ***compléter*** le triangle de Pascal ci-contre :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | | 1 | | | | | | | | |
| 1 | | | 1 | | | | | | | |
| 1 | | | | 1 | | | | | | |
| 1 | | | | | 1 | | | | | |
| 1 | | | | | | 1 | | | | |
| 1 | | | | | | | 1 | | | |
| 1 | | | | | | | | 1 | | |
| 1 | | | | | | | | | 1 | |
| 1 | | | | | | | | | | 1 |

2) À l'aide du triangle de Pascal de la question précédente, expliciter ***chacun des termes des sommes ci-dessous***, puis calculer leur valeur :
   $S_{0,3} \qquad S_{1,3} \qquad S_{2,3} \qquad S_{3,3} \qquad T_3 \qquad U_3$
3) Justifier que, pour tout entier $k$ ***strictement positif*** et pour tout entier $n \in [\![0; k-1]\!]$, on a :
$$\binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$$
4) En utilisant la question précédente, montrer que $S_{n,p} = \binom{p+1}{n+1}$.
5) En déduire une expression simplifiée, pour $p \in \mathbb{N}$, de $T_p$.
6) Quelle est la somme de toutes les cases du triangle de Pascal rempli à la question 1) ?
   ***Indication*** : en réfléchissant bien, on peut répondre à cette question sans avoir à effectuer vraiment cette somme...
7) Simplifier $U_n$.
   (On attend ici une expression ne faisant plus intervenir le signe $\sum$...)

*Exercice 4 - ANNEXE*

*NOM* : ...................................... *Prénom* : ......................................



# Correction DS n°1

## Exercice 1.

Formes algébriques :

$A=\dfrac{5+i}{3-2i}=\dfrac{(5+i)(3+2i)}{3^2+2^2}=\dfrac{15-2+13i}{13}=1+i$

$B=\dfrac{4\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}(-3-i\sqrt{3})}{9+3}=\dfrac{-12\sqrt{3}-12i}{12}=-\sqrt{3}-i$

$C=(-1+i)^{36}=\left((-1+i)^2\right)^{18}=(-2i)^{18}=2^{18}\times\left(i^2\right)^9=-2^{18}$

Formes trigonométriques :

$A=\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$B=2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1}{2}\right)=2e^{\frac{-5i\pi}{6}}$

$C=-2^{18}=2^{18}\times(-1)=2^{18}e^{i\pi}$

## Exercice 2.

$$S_1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} iu & + & v & + & w & = & -1 \\ u & + & iv & + & w & = & 0 \\ u & + & v & + & iw & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & & 2v & + & (1-i)w & = & -1 \\ u & + & iv & + & w & = & 0 \\ & & (1-i)v & + & (i-1)w & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - iL_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & & (3-i)v & & & = & 0 \\ u & + & iv & + & w & = & 0 \\ & & (1-i)v & + & (i-1)w & = & 1 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v = 0 \\ u = -w = \frac{1+i}{2} \\ w = \frac{1}{i-1} = \frac{-1-i}{2} \end{array}\right.$$

Finalement, ce système possède une unique solution $(u;v;w)$ qui est

$$(u;v;w)=\left(\frac{1+i}{2};0;\frac{-1-i}{2}\right)$$

**Exercice 3.**

$$S_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & (1+a)y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & (2a+1)z & = & a \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} & & (2-a-a^2)y & + & (3-3a)z & = & 1-a & L_1 \leftarrow L_1 - aL_2 \\ x & + & (1+a)y & + & 3z & = & 1 & \\ & & (1-a)y & + & (2a-2)z & = & a-1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} & & (2-a-a^2)y & + & (3-3a)z & = & 1-a & \\ x & + & (1+a)y & + & 3z & = & 1 & \\ & & (7-5a-2a^2)y & & & = & a-1 & L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_1 \end{array}\right.$$

À ce point de la résolution, il faut distinguer des cas suivant que $7-5a-2a^2$ est nul ou non.
$\Delta = 25+56 = 81$
$a_1 = \dfrac{5+9}{-4} = \dfrac{-7}{2}$ et $a_2 = \dfrac{5-9}{-4} = 1$

- Si $a \neq \dfrac{-7}{2}$ et $a \neq 1$ :

$$S_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & & (2+a)y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & (1+a)y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & & & = & \dfrac{a-1}{7-5a-2a^2} = \dfrac{-1}{7+2a} \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{1-a} L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 3z & = & 1 + \dfrac{2+a}{7+2a} = \dfrac{3a+9}{7+2a} \\ x & = & 1 + \dfrac{1+a}{7+2a} - \dfrac{3a+9}{7+2a} = \dfrac{-1}{7+2a} \\ y & = & = \dfrac{-1}{7+2a} \end{array}\right.$$

Il y a donc une unique solution si $a \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-7}{2};1\right\}$ et cette solution est

$$(x;y;z) = \left(\frac{-1}{7+2a};\frac{-1}{7+2a};\frac{3+a}{7+2a}\right)$$

- Si $a = \dfrac{-7}{2}$, alors le système se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & \frac{-27}{4}y & + & \frac{27}{2}z & = & \frac{9}{2} \\ x & - & \frac{5}{2}y & + & 3z & = & 1 \\ & & 0 & & & = & \dfrac{-9}{2} \end{array}\right.$$

qui n'a aucune solution. Donc, si $a = \dfrac{-7}{2}$, $\mathcal{S} = \emptyset$.

- Si $a = 1$, alors le système se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & 0 & & & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 1$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, x = -2y - 3z + 1\right\} = \{(1-2y-3z;y;z), y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

**Exercice 4.**

1) $f(x)$ est définie si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} 1+x & > & 0 \\ 1-x & > & 0 \end{array}\right.$.
Donc l'ensemble de définition de $f$ est $I = ]-1;1[$.

2) $f$ est continue et dérivable sur $I$ et $\forall x \in I$ :
$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{-1}{1-x} = \dfrac{-2x}{1-x^2}$.
Or pour $x \in I$, $x^2 < 1$, donc $f'(x)$ est du signe de $-2x$.

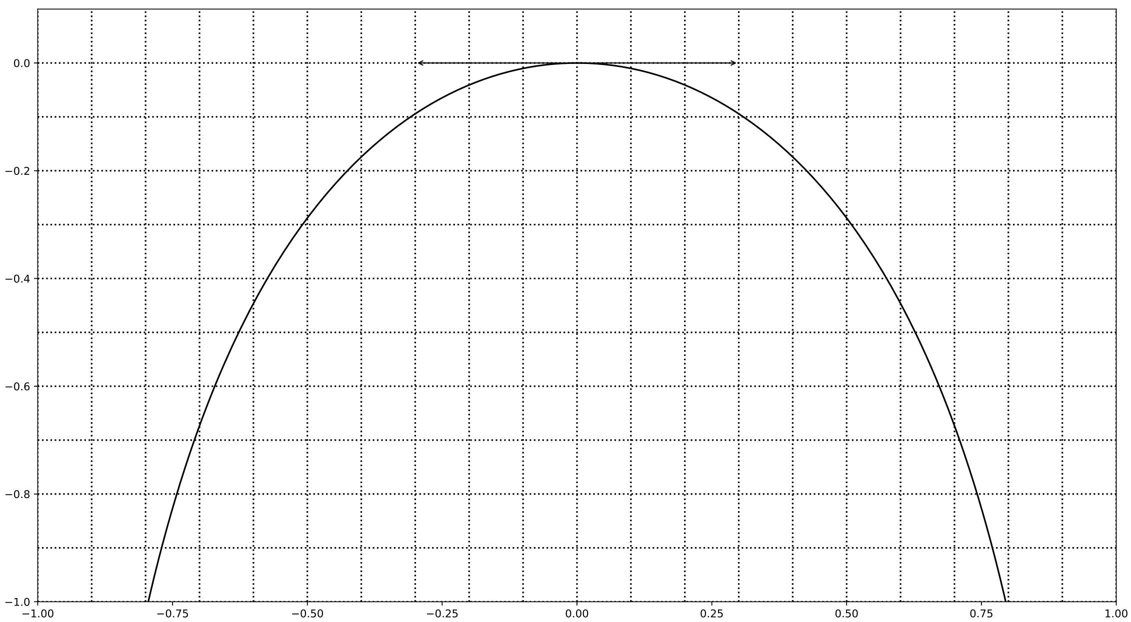
| Valeurs de $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ |
| Variations de $f$ | $\|-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty\|$ |

3) $f$ est continue sur son ensemble de définition.
Donc, d'après le théorème de la bijection continue et le tableau de variations de la question précédente, pour que $f$ soit surjective il faut choisir

$$J = ]-\infty; 0]$$

4) Soit $y \in J$.
$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(1-x^2) = y \Leftrightarrow 1 - x^2 = e^y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-e^y}$
L'équation $f(x) = y$ possède donc deux solutions dans le cas général, sauf pour $y = 0$, pour laquelle $x = 0$ est solution unique.

5)



**Exercice 5.**

1)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | |
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | |
| 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |

2) $S_{0,3} = 1+1+1+1 = 4$
$S_{1,3} = 1+2+3 = 6$
$S_{2,3} = 1+3 = 4$
$S_{3,3} = 1$
$T_3 = 4+6+4+1 = 15$
$U_3 = 2^1 + 2\times 2^2 + 1\times 2^2 + 3\times 2^3 + 3\times 2^3 + 1\times 2^3 = 70$

3) La formule de Pascal s'écrit, pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $K \in [\![0; N-1]\!]$ :

$$\binom{N}{K} + \binom{N}{K+1} = \binom{N+1}{K+1}$$

En posant $N = k$ et $K = n$, on a donc, pour tout entier $k$ ***strictement positif*** et pour tout entier $n \in [\![0; k-1]\!]$ :

$$\binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$$

4) Simplifions $S_{n,p}$ :

$$\begin{aligned} S_{n,p} &= \sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} \\ &= \binom{n}{n} + \sum_{k=n+1}^{p} \binom{k}{n} \\ &= 1 + \sum_{k=n+1}^{p} \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1} \\ &= 1 + \binom{p+1}{n+1} - \binom{n+1}{n+1} \qquad \text{par télescopage} \\ &= \binom{p+1}{n+1} \end{aligned}$$

5) Simplifions $T_p$ :

$$
\begin{aligned}
T_p &= \sum_{k=0}^{p} S_{k,p} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p+1 \\ k+1 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{p+1} \begin{pmatrix} p+1 \\ j \end{pmatrix} \qquad \text{en effectuant le changement d'indice } j = k+1 \\
&= -1 + \sum_{j=0}^{p+1} \begin{pmatrix} p+1 \\ j \end{pmatrix} \\
&= 2^{p+1} - 1
\end{aligned}
$$

6) La somme de toutes les cases du triangle de Pascal rempli à la question 1) est égale, par définition de $T_p$, à $T_{10}$.
Elle vaut donc $T_{10} = 2^{11} - 1 = 2047$.

7) Simplifions $U_n$.

$$
\begin{aligned}
U_n &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} 2^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} 2^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^k \left( \sum_{j=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^k \left( -1 + \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^k \left( -1 + 2^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 4^k - 2^k \\
&= 4 \times \frac{1-4^n}{1-4} - 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} \\
&= \frac{4\left(4^n - 1\right)}{3} - 2^{n+1} + 2
\end{aligned}
$$

Maths - DS n°2 - Mercredi 29 novembre, 2 heures

# Nombres complexes, fonctions de référence, intégrales

<u>L'usage d'une calculatrice est interdit.</u>

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*

***Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.***

## Exercices

### Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z$ complexe :

$$(E_1) : z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$$

$$(E_2) : z^3 + 2iz^2 - 3z = 0$$

$$(E_3) : (z-i)^4 = 1$$

### Exercice 2.

1) Étant donnés deux réels $a$ et $b$, donner la formule de linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$.
2) Soit $n$ un entier naturel et $x$ un réel.
   Montrer que
   $$\cos\big((n+2)x\big) = 2\cos(x)\cos\big((n+1)x\big) - \cos(nx)$$
3) Soit $x$ un réel.
   Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
4) ***En n'utilisant que les deux questions précédentes*** :
   a) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
   b) Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.

### Exercice 3.

***Fonction $W$ de Lambert***

Soit $f$ la fonction définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{array} \right.$$

1) Étudier $f$ et construire son tableau de variations.

2) Montrer que $f$ est une bijection de $[-1;+\infty[$ sur un intervalle $J$ à préciser.
Conformément au résultat de cette question, on note $W = f^{-1}$ la bijection réciproque de la fonction $f$.
Notamment, $W$ est définie sur $J$ et à valeurs dans $[-1;+\infty[$.

3) Soit $x \in J$. Que vaut $W(x)e^{W(x)}$ ?

4) Montrer que $W$ est dérivable sur $\left]\frac{-1}{e};+\infty\right[$ et que

$$\forall x \in \left]\frac{-1}{e};+\infty\right[, W'(x) = \frac{1}{x + e^{W(x)}}$$

5) En effectuant une intégration par partie, montrer qu'une primitive de $f$ est

$$F(x) = \int^x te^t \mathrm{d}t = (x-1)e^x$$

6) Donner une expression (sans signe $\int$) de $G(x) = \int^x t^2 e^t \mathrm{d}t$.

7) En effectuant le changement de variable $u = f(t)$ (c'est-à-dire $t = W(u)$...), montrer que

$$\forall x \in J, \int^x W(u)\mathrm{d}u = xW(x) - x + e^{W(x)}$$

***Extrait de Wikipedia*** : *Jean-Henri Lambert (1728-1777) est un mathématicien et philosophe. Il s'est illustré en mathématiques pures (il a démontré que le nombre $\pi$ est irrationnel) et en mathématiques appliquées.*

**Exercice 4.**

1) En étudiant la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$$

Soient $p$ et $q$ deux entiers tels que $0 < p < q$.

2) Montrer que $0 < \dfrac{q-p}{p+q} < 1$.

3) Soit $A = \text{Arctan}\left(\frac{p}{q}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{q-p}{p+q}\right)$.
Montrer que $A \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

4) Calculer la valeur de $A$.
***Remarque*** : on montrera notamment que la valeur de $A$ ne dépend pas de $p$ et de $q$.

5) Rappeler la formule donnant $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$ lorsque $\tan(2x)$ et $\tan(x)$ sont définis.

6) Calculer $4\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$.

7) ***Formule de Machin*** :
Déduire des question précédentes que

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$$

***Extrait de Wikipedia*** : *John Machin est un mathématicien anglais connu principalement pour avoir calculé, en 1706, 100 décimales du nombre $\pi$ grâce à la formule qui porte son nom.*

# Correction DS n°2

**Exercice 1.**

$$(E_1) : z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$$

$\Delta = (1-3i)^2 + 4(4+3i) = 8 + 6i$
Cherchons $\delta = x + iy$ tel que $\Delta = \delta^2$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \delta^2 & = & \Delta \\ |\delta|^2 & = & |\Delta| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^2 - y^2 & = & 8 \\ 2xy & = & 6 \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{8^2+6^2} = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x^2 & = & 18 \\ 2xy & = & 6 > 0 \\ 2y^2 & = & 2 \end{array}\right.$$

Par exemple, $\delta = 3 + i$.
Les solutions de $(E_1)$ sont donc :

$$z_1 = \frac{-1+3i+3+i}{2} = 1 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1+3i-3-i}{2} = -2 + i$$

$$(E_2) : z^3 + 2iz^2 - 3z = 0$$

0 est racine évidente :-)
$(E_2) \Leftrightarrow z\left(z^2 + 2iz - 3\right) = 0$
$\Delta = (2i)^2 + 4 \times 3 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$
Les solutions de l'équation sont donc

$$\mathcal{S}_2 = \{0; -i + \sqrt{2}; -i - \sqrt{2}\}$$

$$(E_3) : (z - i)^4 = 1$$

$z$ est solution de $(E_3)$ si et seulement si $z - i$ est une racine quatrième de l'unité.
Donc les solutions de $(E_3)$ sont les complexes $z$ vérifiant :
$z - i = e^{\frac{2ik\pi}{4}}$, où $k \in [\![0; 3]\!]$.
C'est-à-dire $z = i + 1$ ou $z = i + i = 2i$ ou $z = i - 1$ ou $z = i - i = 0$.

$$\mathcal{S}_3 = \{0; 2i; 1 + i; -1 + i\}$$

**Exercice 2.**

1) $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$.
2) Soit $n$ un entier naturel et $x$ un réel.
   Posons $a = (n+1)x$ et $b = x$.
   $\cos\big((n+1)x\big)\cos(x) = \dfrac{\cos\left((n+2)x\right) + \cos(nx)}{2}$.
   Donc

$$\cos\big((n+2)x\big) = 2\cos(x)\cos\big((n+1)x\big) - \cos(nx)$$

3) Soit $x$ un réel.
$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

4) ***En n'utilisant que les deux questions précédentes*** :

a) $\cos(3x) = \cos((1+2)x) = 2\cos(x)\cos(2x) - \cos(x) = 2\cos(x)\big(2\cos^2(x) - 1\big) - \cos(x)$
Donc $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

b) Par exemple :
$\cos(4x) = \cos(2\times 2x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2\left(2\cos^2(x) - 1\right)^2 - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1.$

## Exercice 3.

1) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ puisque $\exp > 0$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées.

| Valeurs de $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $0$ | $\searrow$ | $\frac{-1}{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2) $f$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ donc, d'après le théorème de la bijection continue, $f$ est une bijection de $[-1;+\infty[$ sur $J = \left[\frac{-1}{e};+\infty\right[$.
Conformément au résultat de cette question, on note $W = f^{-1}$ la bijection réciproque de la fonction $f$.
Notamment, $W$ est définie sur $J$ et à valeurs dans $[-1;+\infty[$.

3) Soit $x \in J$.
$W(x)e^{W(x)} = f(W(x)) = x$ par définition de $W$, bijection réciproque de $f$.

4) Utilisons maintenant le théorème de la bijection dérivable : $f$ étant dérivable sur $[-1;+\infty[$, $W$ est elle-même dérivable en tout réel $x \in J$ tel que $f'(W(x)) \neq 0$.
Or $f'(W(x)) = (W(x)+1)e^{W(x)} = W(x)e^{W(x)} + e^{W(x)} = x + e^{W(x)}$.
Donc $f'(W(x)) \neq 0$ si et seulement si $W(x) \neq -1$, ce qui équivaut à $x \neq f(-1) = \dfrac{-1}{e}$.
Finalement, $W$ est dérivable sur $\left]\frac{-1}{e};+\infty\right[$ et

$$\forall x \in \left]\frac{-1}{e};+\infty\right[, W'(x) = \frac{1}{x + e^{W(x)}}$$

5) Soit $x$ un réel.
$F(x) = \displaystyle\int^x te^t\mathrm{d}t = [te^t]^x - \int^x e^t\mathrm{d}t = xe^x - [e^t]^x = (x-1)e^x.$

6) $G(x) = \displaystyle\int^x t^2e^t\mathrm{d}t = \left[t^2e^t\right]^x - \int^x 2te^t\mathrm{d}t = x^2e^x - 2F(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x.$

7) Soit $x \in J$.
On va faire le changement de variable $u = f(t)$ dans l'intégrale $\Omega(x) = \displaystyle\int^x W(u)\mathrm{d}u$.
$u = f(t)$ donc $\mathrm{d}u = f'(t)\mathrm{d}t = (t+1)e^t\mathrm{d}t$. Enfin, comme $x \in J$, on peut affirmer que $t = W(u)$.

$\Omega(x) = \int^x W(u)\mathrm{d}u = \int^{W(x)} t(t+1)e^t\mathrm{d}t = \int^{W(x)} te^t + t^2e^t\mathrm{d}t = F(W(x)) + G(W(x))$.
Donc
$\Omega(x) = \left(W(x)^2 - W(x) + 1\right)e^{W(x)} = W(x) \times W(x)e^{W(x)} - W(x)e^{W(x)} + e^{W(x)}$.
C'est-à-dire $\Omega(x) = xW(x) - x + e^{W(x)}$.
Finalement
$$\forall x \in J, \Omega(x) = \int^x W(u)\mathrm{d}u = xW(x) - x + e^{W(x)}$$

**Exercice 4.**

1) Étudions $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables.
$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$
Or $\mathbb{R}_+^* = ]0; +\infty[$ est un intervalle, $f'$ est nulle sur cet intervalle, donc $f$ est une fonction constante.
De plus, $f(1) = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(1) = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.
Donc
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$$

Soient $p$ et $q$ deux entiers tels que $0 < p < q$.

2) $q > p$ donc $q - p > 0$ et $p$ et $q$ étant strictement positifs, $p + q > 0$.
Donc $\dfrac{q-p}{p+q} > 0$.
Concernant l'inégalité de droite,
$\dfrac{q-p}{p+q} < 1 \Leftrightarrow q - p < p + q \Leftrightarrow -p < p$ qui est vraie puisque $p > 0$.
On a donc bien $0 < \dfrac{q-p}{p+q} < 1$.

3) Soit $A = \operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{q}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{q-p}{p+q}\right)$.
$0 < p < q$ donc $0 < \dfrac{p}{q} < 1$. Comme Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a donc
$$0 < \operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{q}\right) < \frac{\pi}{4}$$
De même, en utilisant la question précédente,
$$0 < \operatorname{Arctan}\left(\frac{q-p}{p+q}\right) < \frac{\pi}{4}$$
Finalement, en faisant la somme de ces deux encadrements, on a bien
$$0 < A < \frac{\pi}{2}$$

4) Calculons $\tan(A)$ en utilisant la formule d'addition $\tan(u+v) = \dfrac{\tan(u) + \tan(v)}{1 - \tan(u)\tan(v)}$ :
$\tan(A) = \dfrac{\frac{p}{q} + \frac{q-p}{p+q}}{1 - \frac{p}{q} \times \frac{q-p}{p+q}} = \dfrac{\frac{p^2+pq+q^2-pq}{p(p+q)}}{\frac{q^2+pq-pq+p^2}{p(p+q)}}$.

Donc $\tan(A) = 1$.
Donc $A = \frac{\pi}{4}[\pi]$. Comme d'après la question précédente $A \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on peut donc affirmer que

$$A = \frac{\pi}{4}$$

notamment que $A$ est indépendant de la valeur de $p$ et de $q$.

5) Lorsque $\tan(2x)$ et $\tan(x)$ sont définis, on a :
$\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

6) Soit $B = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ et $C = 2B$. Il s'agit de calculer la valeur de $C$.
Commençons par remarquer que $0 < \dfrac{1}{5} < 1$ donc $0 < B < \dfrac{\pi}{2}$ par stricte croissance de Arctan.
De plus $\tan(B) = \dfrac{2 \times \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{25}{24} = \dfrac{5}{12}$.
Remarquons à nouveau que $\tan(B) < 1$. On peut donc préciser l'intervalle contenant $B$ : $0 < B < \dfrac{\pi}{4}$.
Par conséquent $0 < C < \dfrac{\pi}{2}$.
$\tan(C) = \dfrac{2\tan(B)}{1 - \tan^2(B)} = \dfrac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{144}{119} = \dfrac{120}{119}$.
Comme de plus $0 < C < \dfrac{\pi}{2}$, on peut donc affirmer que $C = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{120}{119}\right)$. Finalement, on a donc

$$4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right)$$

7) Posons $p = 119$ et $q = 120$ dans le résultat de la question 4.
On a alors $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{119}{120}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
En utilisant par ailleurs la question 1, on a aussi $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{119}{120}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{120}{119}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Enfin, d'après la question précédente,
$4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{120}{119}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{119}{120}\right)$,
c'est-à-dire :
$4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{239}\right)$.
En réorganisant cette dernière identité, on obtient bien la ***formule de Machin*** :

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$$

# DL, intégrales, suites, calcul matriciel

<u>L'usage d'une calculatrice est interdit.</u>
*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*
***Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.***

## Exercices

### Exercice 1.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$.

1) Calculer, en fonction de $a$, la matrice $A^{-1}$ lorsqu'elle existe.
   ***On prendra notamment soin de préciser les valeurs de $a$ pour lesquelles la matrice n'est pas inversible.***
2) Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & 2a \\ x & + & y & + & az & = & 3-a \\ ax & + & y & + & az & = & a+1 \end{array} \right.$ d'inconnues $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$.

### Exercice 2.

Le but de cet exercice est de donner l'expression des coefficients des développements limités de Arcsin et de Arccos en 0 à l'ordre $2n+1$.

1) Rappeler l'expression, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, de $\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix}$.
2) Calculer $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.
3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ k \end{pmatrix} = (-1)^k \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$.
4) Donner l'expression du développement limité de $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$ à l'ordre $n$ en 0.
5) Donner l'expression du développement limité de $\operatorname{Arcsin}(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0.
6) Donner l'expression du développement limité de $\operatorname{Arccos}(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0.

## Exercice 3.

Soit $x$ un réel quelconque et $u$ la suite ***réelle*** définie par $\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & x \\ u_{n+2} & = & 2xu_{n+1} - u_n \end{array}\right.$.

1) Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Donner $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2) Dans cette question, on suppose que $x = \frac{1}{2}$.
   Montrer que pour tout entier $n$, $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$.
3) Dans cette question, on suppose que $x = 2$.
   a) Exprimer $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   b) Montrer que pour tout entier $n$, $u_n = \dfrac{\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor + 1}{2}$.
   c) Montrer que pour tout entier $n$, 3 est un diviseur de $u_n - 2^n$.
4) Dans cette question, $x$ est un réel quelconque.
   Exprimer $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

## Exercice 4.

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$ définie pour tout entier naturel $n$.

1) Calculer $I_0$, $I_1$ et $I_2$.
2) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2}$.
3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{lll} (-1)^n I_{2n} & = & \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \\ (-1)^n I_{2n+1} & = & \dfrac{\ln(2)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \end{array}$$

4) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$.
5) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive et qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.
6) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$.
7) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

# Correction DS n°3

## Exercice 1.

1) $$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 1 & 1 & a & y \\ a & 1 & a & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 0 & 1-a & a-1 & y-x \\ 0 & 1-a^2 & 0 & z-ax \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array}$$
$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 0 & 1-a & a-1 & y-x \\ 0 & 0 & 1-a^2 & x-(1+a)y+z \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_2$$

***Discussion*** :

- si $a \neq 1$ et $a \neq -1$, on a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 1 & 1 & a & y \\ a & 1 & a & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{-x+y}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \end{pmatrix}$$
$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & x - \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-x+y}{1-a} + \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \end{pmatrix}$$

Or $x - \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} = \dfrac{(1-a^2)x - x + (1+a)y - z}{1-a^2} = \dfrac{-a^2x+(1+a)y-z}{1-a^2}$

et $\dfrac{-x+y}{1-a} + \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} = \dfrac{-(1+a)x+(1+a)y+x-(1+a)y+z}{1-a^2} = \dfrac{-ax+z}{1-a^2}$

Donc

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 1 & 1 & a & y \\ a & 1 & a & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dfrac{-a^2x+(1+a)y-z}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-ax+z}{1-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \end{pmatrix}$$
$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{-a^2x+(1+a)y-z}{1-a^2} - a\dfrac{-ax+z}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-ax+z}{1-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \end{pmatrix}$$

Enfin, $$\begin{aligned} \frac{-a^2x+(1+a)y-z}{1-a^2} - a\frac{-ax+z}{1-a^2} &= \frac{-a^2x+(1+a)y-z+a^2x-az}{1-a^2} \\ &= \frac{(1+a)y-(1+a)z}{1-a^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 1 & 1 & a & y \\ a & 1 & a & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{(1+a)y-(1+a)z}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-ax+z}{1-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x-(1+a)y+z}{1-a^2} \end{pmatrix}$$

La matrice $A$ est donc inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1+a}{1-a^2} & \dfrac{-1-a}{1-a^2} \\ \dfrac{-a}{1-a^2} & 0 & \dfrac{1}{1-a^2} \\ \dfrac{1}{1-a^2} & \dfrac{-1-a}{1-a^2} & \dfrac{1}{1-a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{1-a} & \dfrac{-1}{1-a} \\ \dfrac{-a}{1-a^2} & 0 & \dfrac{1}{1-a^2} \\ \dfrac{1}{1-a^2} & \dfrac{-1}{1-a} & \dfrac{1}{1-a^2} \end{pmatrix}$$

- si $a = 1$ :
  $$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 1 & 1 & a & y \\ a & 1 & a & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{pmatrix}$$
  et la matrice $A$ n'est donc pas inversible.
- Enfin, si $a = -1$ :
  $$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & x \\ 1 & 1 & a & y \\ a & 1 & a & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -2 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & x+z \end{pmatrix}$$
  et la matrice $A$ n'est pas non plus inversible.

2) Le système $\begin{cases} x + ay + z = 2a \\ x + y + az = 3-a \\ ax + y + az = a+1 \end{cases}$ d'inconnues $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3-a \\ a+1 \end{pmatrix}.$$

***Discussion :***

- si $a \neq 1$ et $a \neq -1$, alors la matrice $A$ est inversible et le système possède donc une unique solution qui est
  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2a \\ 3-a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2-2a}{1-a} \\ \dfrac{-2a^2+a+1}{1-a^2} \\ \dfrac{a^2+a-2}{1-a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \dfrac{2a+1}{a+1} \\ \dfrac{-a-2}{a+1} \end{pmatrix}$$
- si $a = 1$, le système se réécrit :
  $$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x+y+z=2$$
  Il possède donc une infinité de solutions qui sont :
  $$\mathcal{S} = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=2\right\} = \left\{(2-y-z;y;z) \in \mathbb{R}^3, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\right\}$$
- enfin, si $a = -1$, le système se réécrit :
  $$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x + y - z = 4 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

En faisant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$, on obtient donc le système équivalent
$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 0 & & & = & -2 \\ x & + & y & - & z & = & 4 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$ qui est incompatible.

***Il n'y a donc pas de solution***.

**Exercice 2.**

1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ : par définition,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{1 \times 2 \times ... \times k} = \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)}{k!}.$$

2) $\binom{\frac{-1}{2}}{0} = 1.$

$\binom{\frac{-1}{2}}{1} = \dfrac{-1}{2}.$

$\binom{\frac{-1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2}}{2} = \dfrac{3}{8}.$

$\binom{\frac{-1}{2}}{3} = \dfrac{\frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2} \times \frac{-5}{2}}{6} = \dfrac{-5}{16}.$

3) Montrons par récurrence que $\binom{\frac{-1}{2}}{k} = (-1)^k \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}.$

***Initialisation*** : pour $k = 0$, $(-1)^k \dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2} = 1$ et $\binom{\frac{-1}{2}}{0} = 1.$

***Hérédité*** : supposons que pour $k$ entier donné, $\binom{\frac{-1}{2}}{k} = (-1)^k \dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{-1}{2}}{k+1} &= \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{k}\left(\frac{-1}{2} - j\right)}{(k+1)!} \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{2} - j\right)}{k!} \times \frac{\frac{-1}{2} - k}{k+1} \\
&= (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} \times \frac{-(2k+1)}{2(k+1)} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} \times \frac{(2k+1)(2k+2)}{2(k+1) \times 2(k+1)} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{(2k+2)!}{4^{k+1}((k+1)!)^2}
\end{aligned}$$

***Conclusion*** : la propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{\frac{-1}{2}}{k} = (-1)^k \dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2}.$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} u^k + \underset{u \to 0}{o}(u^n).$

5) $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in ]-1;1[$ donc en posant $u = -x^2$ dans le développement limité précédent, et en remarquant que $\text{Arcsin}(0) = 0$, on a :

$$\text{Arcsin}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

6) De même qu'à la question précédente, en remarquant que $\text{Arccos}(0) = \dfrac{\pi}{2}$,

$$\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

**Exercice 3.**

1) $x = 1$ donc $u$ est la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+2} &= 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$

Équation caractéristique : $z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = An + B$, où $(A;B) \in \mathbb{R}^2$.

On utilise les valeurs de $u_0$ et $u_1$ pour identifier $A$ et $B$ :

$u_0 = 1 \Rightarrow B = 1$ et $u_1 = 1 \Rightarrow A + B = 1 \Rightarrow A = 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$.

2) $x = \dfrac{1}{2}$, donc $u$ est la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+2} &= u_{n+1} - u_n \end{cases}$

Équation caractéristique : $z^2 - z + 1 = 0$ qui a deux solutions $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + B\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$, où $(A;B) \in \mathbb{R}^2$.

À nouveau, on utilise les conditions initiales pour identifier $A$ et $B$ :

$\begin{cases} A &= 1 \\ A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= 0 \end{cases}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$.

3) $x = 2$ donc $u$ est la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2 \\ u_{n+2} &= 4u_{n+1} - u_n \end{cases}$

a) Équation caractéristique : $z^2 - 4z + 1 = 0$ qui a deux solutions $z_1 = 2+\sqrt{3}$ et $z_2 = 2-\sqrt{3}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\left(2+\sqrt{3}\right)^n + B\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ où $(A;B) \in \mathbb{R}^2$.

En utilisant les valeurs de $u_0$ et $u_1$ on obtient donc le système suivant vérifié par $A$ et $B$ :

$\begin{cases} A + B &= 1 \\ A\left(2+\sqrt{3}\right) + B\left(2-\sqrt{3}\right) &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B &= 1 \\ B\left(2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}\right) &= 2-2-\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A &= \frac{1}{2} \\ B &= \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2}$.

b) $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, donc pour tout entier $n$, $0 < \left(2-\sqrt{3}\right)^n < 1$.
Donc pour tout entier $n$, on a $\left(2+\sqrt{3}\right)^n < \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n < \left(2+\sqrt{3}\right)^n + 1$.
Or $u_0 \in \mathbb{Z}$, $u_1 \in \mathbb{Z}$, et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$ donc par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est entier.
Comme par ailleurs $2u_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$, on en déduit que $p = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est aussi entier quelle que soit la valeur de $n \in \mathbb{N}$.
Donc le réel $x = \left(2+\sqrt{3}\right)^n$ vérifie $x < p < x+1$, c'est-à-dire que $p = \lfloor x+1 \rfloor$.
Donc pour tout entier $n$ positif, $u_n = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2} = \dfrac{\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor + 1}{2}$.

c) En développant l'expression de $u_n$ grâce au binôme de Newton, on obtient pour tout entier positif $n$ :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt{3}^k + \left(-\sqrt{3}\right)^k\right) 2^{n-k}}{2} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2\sqrt{3}^k 2^{n-k}}{2} \quad \text{car pour } k \text{ impair } \sqrt{3}^k + \left(-\sqrt{3}\right)^k = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 3^k 2^{n-2k}
\end{aligned}$$

Donc $u_n = 2^n + 3 \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 3^{k-1} 2^{n-2k}$ et par conséquent 3 divise $u_n - 2^n$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u$ définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= x \\ u_{n+2} &= 2xu_{n+1} - u_n \end{cases}$

Équation caractéristique : $z^2 - 2xz + 1 = 0$
Discriminant : $\Delta = 4x^2 - 4 = 4(x^2-1)$.
Le discriminant est strictement positif si et seulement si $x^2 > 1 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
On a donc trois cas :

- $x \in ]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, d'où $\Delta > 0$. L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes
  $z_1 = \dfrac{2x + 2\sqrt{x^2-1}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$ et $z_2 = x - \sqrt{x^2-1}$.
  Donc il existe $(A; B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout entier positif $n$, $u_n = Az_1^n + Bz_2^n$.
  Or $u_0 = 1$ et $u_1 = x$ donc $\begin{cases} A + B &= 1 \\ A(x+\sqrt{x^2-1}) + B(x - \sqrt{x^2-1}) &= x \end{cases}$ dont on déduit que $A = B = \dfrac{1}{2}$. En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}$$

- Si $x = -1$ ou $x = 1$, d'où $\Delta = 0$. L'équation caractéristique possède une unique racine réelle $z_0 = \dfrac{2x}{2} = x$ donc il existe $(A; B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ax^n + Bnx^n$.
  Or $u_0 = 1$ et $u_1 = x$ donc $\begin{cases} A &= 1 \\ Ax + Bx &= x \end{cases}$ dont on déduit que $A = 1$ et $B = 0$. En

résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x^n = (\pm 1)^n$$

- Si $x \in ]-1;1[$, d'où $\Delta < 0$. L'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées distinctes
  $z_1 = x + i\sqrt{1-x^2} = e^{i\,\mathrm{Arccos}(x)}$ et $z_2 = e^{-i\,\mathrm{Arccos}(x)}$.
  Donc il existe $(A;B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout entier positif $n$, $u_n = A\cos(n\,\mathrm{Arccos}(x)) + B\sin(n\,\mathrm{Arccos}(x))$.
  Or $u_0 = 1$ et $u_1 = x$ donc $\left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ Ax + B\sqrt{1-x^2} & = & x \end{array}\right.$ dont on déduit que $A = 1$ et $B = 0$. En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n\,\mathrm{Arccos}(x))$$

**Exercice 4.**

1) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^0}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$

   $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln(1+1^2) - \ln(1+0^2)}{2} = \frac{\ln(2)}{2}$

   $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 1 - I_0 = \frac{4-\pi}{4}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{array}{lcl} I_n + I_{n+2} & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n + x^{n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_0^1 x^n \frac{1+x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n+1} \end{array}$$

3) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ :

   ***Initialisation*** :

   $(-1)^0 I_0 = I_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$

   De même, $(-1)^0 I_{2\times 0+1} = I_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et $\dfrac{\ln(2)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^k}{2k} = \frac{\ln(2)}{2}$.

   ***Hérédité*** :

   Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on ait

$$\begin{array}{lcl} (-1)^n I_{2n} & = & \displaystyle\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \\ (-1)^n I_{2n+1} & = & \displaystyle\frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \end{array}$$

   Alors

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1}I_{2(n+1)} &= (-1)^{n+1}I_{2n+2}\\
&= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+1}-I_{2n}\right) \quad \text{d'après la question 2)}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}+(-1)^n I_{2n}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)-1}+\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1} \quad \text{d'après l'hyp. de récurrence}\\
&= \frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^k}{2k-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1}I_{2(n+1)+1} &= (-1)^{n+1}I_{2n+3}\\
&= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+2}-I_{2n+1}\right) \quad \text{d'après la question 2)}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2}+(-1)^n I_{2n+1}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}+\frac{\ln(2)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k} \quad \text{d'après l'hyp. de récurrence}\\
&= \frac{\ln(2)}{2}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^k}{2k}
\end{aligned}$$

***Conclusion*** :

La propriété est initialisée pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(-1)^n I_{2n} &= \frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1}\\
(-1)^n I_{2n+1} &= \frac{\ln(2)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k}
\end{aligned}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;1]$.

- $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2}$ car le membre droit est un quotient dont le numérateur est positif et le dénominateur strictement positif.
- $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2}$ car $\dfrac{x^n}{1+x^2} \geqslant 0$ d'après le point précédent.
- $1+x^2 \geqslant 1$ et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ dont on déduit que $\dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$ car $x^n \geqslant 0$.

Donc pour tout entier positif $n$ et tout $x \in [0;1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$$

5) En intégrant l'encadrement de la question précédente, valable pour tout $x \in [0;1]$, sur le segment $[0;1]$, on obtient, pour tout entier positif $n$ :
$\displaystyle\int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x$
d'où, pour tout entier positif $n$,
$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante, positive, donc convergente, et en utilisant le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité précédente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

6) D'après la question 3) : pour tout entier positif $n$,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} = (-1)^n I_{2n} - \frac{\pi}{4}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = -(-1)^n I_{2n} + \frac{\pi}{4}$
Or d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

7) De même, d'après la question 3) : pour tout entier positif $n$,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} = (-1)^n I_{2n+1} - \frac{\ln(2)}{2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -2(-1)^n I_{2n+1} + 2\frac{\ln(2)}{2}$
Or d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n+1} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

# Espaces vectoriels, continuité, polynômes, calcul matriciel

L'usage d'une calculatrice est interdit.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*
***Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.***

## Cours

1) Soit $n$ un entier naturel et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$.
   Énoncer la formule de Taylor-Young pour $f$ à l'ordre $n$ au voisinage de 0.
2) Résoudre l'équation $(E)$ : $z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0$
   Remarque : on pourra utiliser le fait que $\sqrt{289} = 17$.

## Exercices

### Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
$A$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

### Exercice 2.

Soit $P_1 = 1$, $P_2 = X+3$, $P_3 = (X+3)^2$ et $P_4 = (X+3)^3$.
Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Vect}\,(P_1; P_2; P_3; P_4)$.

### Exercice 3.

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 1}$.

1) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$.
2) Étudier les variations de $f$.
3) Montrer que la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ possède deux asymptotes obliques dont on donnera une équation.
4) Donner la position de $\mathcal{C}_f$ relativement à chacune de ses asymptotes.
5) Donner une ébauche grossière de $\mathcal{C}_f$.
   On ne demande pas de calculs approchés de valeurs particulières de $f(x)$. En revanche, on

fera apparaître les asymptotes obliques obtenues aux questions précédentes et les tangentes verticales à $\mathcal{C}_f$ s'il y en a.

### Exercice 4.

Soit $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1 \in \mathbb{R}[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $P_n$ est divisible par $(X-1)$ et par $(X-2)$.
   On note $Q_1$ et $Q_2$ les quotients.
2) Montrer que $P_n$ est divisible par $(X-1)(X-2)$ et que le quotient vaut $Q_2 - Q_1$.
3) Montrer que $$\begin{aligned} Q_2 - Q_1 &= ((X-2)^{2n-2} - (X-2)^{2n-3} + ... - (X-2) + 1) \\ &\quad + ((X-1)^{n-2} + (X-1)^{n-3} + ... + (X-1) + 1) \end{aligned}$$

### Exercice 5.

Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ : autrement dit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.
Soit $F$ le sous-ensemble des fonctions de $E$ qui sont paires.
Soit $G$ le sous-ensemble des fonctions de $E$ qui sont impaires.

1) Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
2) Montrer que la seule fonction de $E$ à la fois paire et impaire est la fonction nulle.
3) Montrer par analyse/synthèse que quelle que soit la fonction $f \in E$, il existe une fonction $P_f \in F$ et une fonction $I_f \in G$ telles que $f = P_f + I_f$.
4) Déduire des deux questions précédentes que $E = F \oplus G$.
5) Applications numériques : expliciter les fonctions $P_f$ et $I_f$ de la question 3) pour
   a) $f = \exp$ ;
   b) $f = x \mapsto 2 - 3x + 5x^2 + x^3$ ;
   c) $f = x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

### Exercice 6.

Soit $f$ une fonction définie ***et continue*** sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose de plus qu'il existe un réel $a$ tel que $f \circ f(a) = a$.
Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un réel $c$ tel que $f(c) = c$.
Dans ce qui suit, $a$ est un réel tel que $f \circ f(a) = a$ et on note $b = f(a)$.

1) ***Dans cette question uniquement,*** on suppose que $b > a$.
   Montrer qu'il existe $c \in ]a; b[$ tel que $f(c) = c$.
2) ***Dans cette question uniquement,*** on suppose que $b < a$.
   Montrer qu'il existe $c \in ]b; a[$ tel que $f(c) = c$.
3) Conclure.

### Exercice 7.

Soit $F$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $F$.

1) Montrer que si $u \circ u$ est l'application nulle, alors $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
2) L'implication de la question précédente est-elle une équivalence ?
3) Donner un exemple d'endomorphisme $u$ ***non nul*** de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $u \circ u = 0$.

# Correction DS n°4

### Exercice 1.

Par la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 4 & 5 & 2 & y \\ 2 & 3 & 1 & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -3 & -2 & y-4x \\ 0 & -1 & -1 & z-2x \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & z-2x \\ 0 & -3 & -2 & y-4x \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & z-2x \\ 0 & 0 & 1 & y-4x-3z+6x \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & x-2x-y+3z \\ 0 & 1 & 0 & 2x-z-2x-y+3z \\ 0 & 0 & 1 & 2x+y-3z \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow -L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x-y+3z+2y-4z \\ 0 & 1 & 0 & -y+2z \\ 0 & 0 & 1 & 2x+y-3z \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

Donc $A$ est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

### Exercice 2.

- $P_1$, $P_2$, $P_3$ et $P_4$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 donc appartiennent à $\mathbb{R}_3[X]$.
  Donc, par théorème du cours, $\text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3; P_4)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
  Donc $\text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3; P_4) \subset \mathbb{R}_3[X]$.
- Prouvons l'inclusion réciproque : soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.
  D'après la formule de Taylor pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3 :
  $$P = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(3)}{k!}(X-3)^k = P(3) \times P_1 + P'(3) \times P_2 + \frac{P''(3)}{2} \times P_3 + \frac{P'''(3)}{6} \times P_3$$
  Donc $P \in \text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3; P_4)$.
  Donc $R_3[X] \subset \text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3; P_4)$.
- Par double-inclusion, on a donc bien
  $$\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3; P_4)$$

**Exercice 3.**

1) $f(x)$ est définie si et seulement si $x^2 - x - 1 \geqslant 0$.
$\Delta = 1 - 4 \times (-1) = 5$.
$x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Donc $f$ est définie sur $\mathcal{D}_f = \left]-\infty; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$.

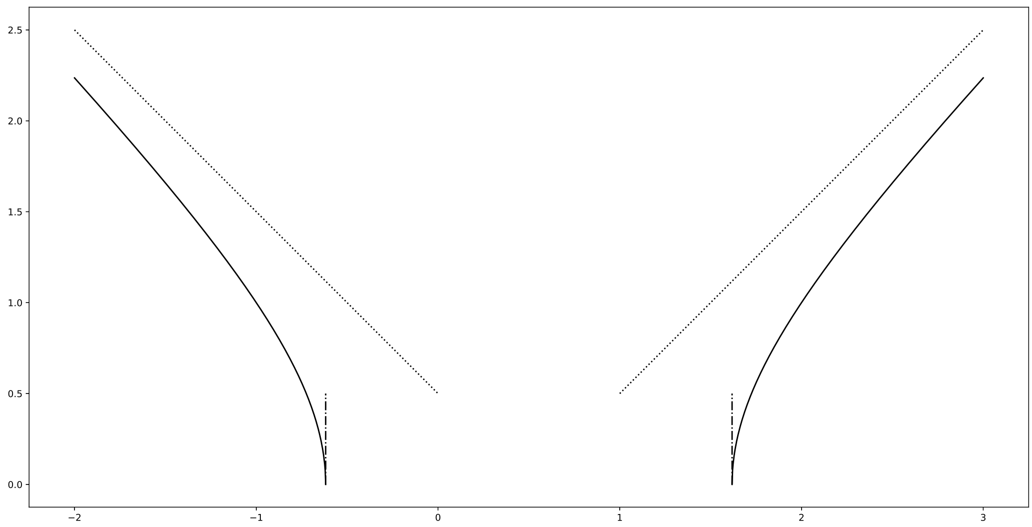
2) Étudions les variations de $f$ : $f$ est dérivable sur $\left]-\infty; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right[ \cup \left]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$ et
$f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-1}}$ qui est du signe de $2x-1$.
Or $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$, et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < \dfrac{1}{2} < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Donc $f$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$.

3) Effectuons un développement asymptotique $f$ au voisinage de $\pm\infty$ en posant $h = \dfrac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.
$f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} - 1} = \sqrt{\dfrac{1-h-h^2}{h^2}} = \dfrac{\sqrt{1-h-h^2}}{|h|}$.
Or $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$. Donc $f(x) = \dfrac{1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{8} + \underset{h\to 0}{o}(h^2)}{|h|}$. Distinguons les cas $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$ :

- si $x \to +\infty$, $h \to 0^+$ et
$f(x) = \dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{5h}{8} + \underset{h\to 0}{o}(h) = x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{8x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Donc la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ et, comme $-\dfrac{5}{8x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ est ***en-dessous*** de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
- si $x \to -\infty$, $h \to 0^-$ et
$f(x) = \dfrac{-1}{h} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{5h}{8} + \underset{h\to 0}{o}(h) = -x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{8x} + \underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Donc la droite d'équation $y = -x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ et, comme $\dfrac{5}{8x} < 0$ au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ est ***en-dessous*** de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

4) Nous l'avons vu à la question précédente, $\mathcal{C}_f$ est ***en-dessous*** de chacune de ses deux asymptotes, que ce soit celle d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$ ou celle d'équation $y = -x + \dfrac{1}{2}$ au voisinage de $-\infty$.

5) Représentation graphique :




**Exercice 4.**

1) $P_n$ est divisible par $X-1$ si et seulement $P(1)=0$.
Or $P(1)=(-1)^{2n}+0^n-1=0$ car $n>0$.
De même, $P_n$ est divisible par $X-2$ si et seulement $P(2)=0$.
Or $P(2)=0^{2n}+1^n-1=0$ car $n>0$.

2) $P_n$ est divisible par $(X-1)$. Notons $Q_1$ le quotient de $P_n$ par $(X-1)$.
On a donc $P_n=(X-1)Q_1$. De plus $P_n(2)=0$ d'après la question précédente, donc $(2-1)Q_1(2)=0$ donc $Q_1(2)=0$ : $Q_1$ est donc divisible par $(X-2)$.
Notons $Q$ le quotient de la division euclidienne de $Q_1$ par $(X-2)$ :
on a donc $P_n=(X-1)(X-2)Q$.
***Donc*** $P_n$ ***est divisible par*** $(X-1)(X-2)$***.***
Le même raisonnement reste valable en divisant $P_n$ d'abord par $X-2$, en notant $Q_2$ le quotient obtenu, puis en divisant $Q_2$ par $X-1$.
Par unicité du quotient dans la division euclidienne, le quotient de $Q_2$ par $(X-1)$ est à nouveau $Q$ puisque cette seconde méthode conduit encore à écrire $P_n=(X-1)(X-2)Q$.
Donc $(X-1)Q=Q_2$ et $(X-2)Q=Q_1$. En développant, on a donc $XQ-Q_2=Q$ d'une part, et $XQ-Q_1=2Q$ d'autre part.
Par soustraction de ces deux égalités, on obtient $Q=Q_2-Q_1$.

3) Calculons $Q_1$ :
$P_n=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1=(X-2)^{2n}-(-1)^{2n}+(X-1)^n$
Donc $P_n=(X-2+1)\left((X-2)^{2n-1}+(X-2)^{2n-2}\times(-1)+...+(-1)^{2n-1}\right)+(X-1)^n$.
Donc $Q_1=(X-2)^{2n-1}-(X-2)^{2n-2}+...-1+(X-1)^{n-1}$.
De même, pour calculer $Q_2$ on écrit :
$P_n=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1^n$.
Donc $P_n=(X-2)^{2n}+(X-1-1)\left((X-1)^{n-1}+(X-1)^{n-2}\times 1+...+1^{n-1}\right)$.
Donc $Q_2=(X-2)^{2n-1}+(X-1)^{n-1}+(X-1)^{n-2}+...+1$.

Finalement, par soustraction :

$$\begin{aligned} Q_2 - Q_1 &= ((X-2)^{2n-2} - (X-2)^{2n-3} + ... - (X-2) + 1) \\ &\quad + ((X-1)^{n-2} + (X-1)^{n-3} + ... + (X-1) + 1) \end{aligned}$$

**Exercice 5.**

1) $F$ et $G$ sont de manière évidente inclus dans $E$.
La fonction nulle est à la fois paire et impaire donc appartient à $F$ et à $G$.
Enfin, toute combinaison linéaire de fonctions paires est paire. En effet, soit $u \in F$ et $v \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors :
$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda u + \mu v)(-x) = \lambda u(-x) + \mu v(-x) = \lambda u(x) + \mu v(x)$ car $u$ et $v$ sont paires.
Donc $\lambda u + \mu v$ est elle aussi paire.
On démontre de même que $G$ est stable par combinaison linéaire.
Donc $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$.

2) Soit $u$ une fonction à la fois paire et impaire.
Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, u(-x) = u(x)$ car $u$ est paire.
Mais aussi, $\forall x \in \mathbb{R}, u(-x) = -u(x)$ car $u$ est impaire.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = -u(x)$ : donc pour tout $x$ réel, $2u(x) = 0$.
Donc $u$ est la fonction nulle.
Donc la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

3) ***Analyse*** : soit $f \in E$ et supposons qu'il existe une fonction $P_f \in F$ et une fonction $I_f \in G$ telles que $f = P_f + I_f$.
Alors, d'une part $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P_f(x) + I_f(x)$.
D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = P_f(-x) + I_f(-x) = P_f(x) - I_f(x)$ car $P_f$ est paire, et $I_f$ est impaire.
En sommant ces deux relations, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, P_f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.
Et par soustraction, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, I_f(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Donc, si $P_f$ et $I_f$ existent, elles sont uniques et données par les deux relations précédentes.
***Synthèse*** : soit $f \in E$ et notons $P_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \right.$ et $I_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array} \right.$
Alors :

- $P_f$ est une fonction paire : en effet, pour tout réel $x$,
$P_f(-x) = \dfrac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = P_f(x)$.
- $I_f$ est une fonction impaire : en effet, pour tout réel $x$,
$I_f(-x) = \dfrac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \dfrac{-f(x) + f(-x)}{2} = -I_f(x)$.
- $f = P_f + I_f$. En effet, pour tout réel $x$,
$P_f(x) + I_f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = \dfrac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$.

Donc il existe une fonction $P_f \in F$ et une fonction $I_f \in G$ telles que $f = P_f + I_f$, de plus ces deux fonctions sont uniques.

4) La question précédente prouve que $E = F + G$. La question 2) prouve de plus que la somme est directe.
Donc
$$E = F \oplus G$$

5) Applications numériques : explicitons les fonctions $P_f$ et $I_f$ dans les cas suivants

a) $f = \exp$ : pour tout réel $x$,
$P_f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$ et
$I_f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$
Donc $P_{\exp} = \mathrm{ch}$ et $I_{\exp} = \mathrm{sh}$.

b) $f = x \mapsto 2 - 3x + 5x^2 + x^3$ : pour tout réel $x$,
$P_f(x) = \dfrac{2 - 3x + 5x^2 + x^3 + 2 + 3x + 5x^2 - x^3}{2} = 2 + 5x^2$ et
$I_f(x) = \dfrac{2 - 3x + 5x^2 + x^3 - 2 - 3x - 5x^2 + x^3}{2} = -3x + x^3$

c) $f = x \mapsto \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ : pour tout réel $x$,
$P_f(x) = \dfrac{\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}{2} = \dfrac{\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{e^x+1}}{2} = \dfrac{1}{2}$ et
$I_f = f - P_f$ par définition, donc $I_f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^x - 1}{2\,(1 + e^x)}$.

**Exercice 6.**

1) ***Dans cette question uniquement,*** on suppose que $b > a$.
Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
$g$ est continue comme différence de fonctions continues d'une part, et
$g(a) = f(a) - a = b - a > 0$ et $g(b) = f(b) - b = f(f(a)) - b = a - b < 0$.
Donc $g$ change de signe sur l'intervalle $[a; b]$, donc $\exists c \in ]a; b[, f(c) = c$.

2) ***Dans cette question uniquement,*** on suppose que $b < a$.
Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
$g$ est continue comme différence de fonctions continues d'une part, et
$g(a) = f(a) - a = b - a < 0$ et $g(b) = f(b) - b = f(f(a)) - b = a - b > 0$.
Donc $g$ change de signe sur l'intervalle $[b; a]$, donc $\exists c \in ]b; a[, f(c) = c$.

3) Soit $f$ une fonction vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Soit $b = f(a)$.
- ou bien $a = b$ c'est-à-dire $a = f(a)$ et il existe un réel $x$ (c'est le réel $a$) tel que $f(x) = x$ ;
- ou bien $a < b$, et on a vu à la question 1) qu'il existe un réel $x$ (noté $c$) tel que $f(x) = x$ ;
- ou bien $a > b$, et on a vu à la question 2) qu'il existe un réel $x$ (noté $c$) tel que $f(x) = x$.

Ce sont les trois seuls cas possibles : donc, dans tous les cas,
$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = x$$

**Exercice 7.**

1) Supposons $u \circ u = 0$ et montrons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Par définition, il existe $x \in F$ tel que $y = u(x)$.
Donc $u(y) = u(u(x)) = u \circ u(x) = 0_F$.
Donc $y \in \mathrm{Ker}(u)$.
Donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

2) L'implication de la question précédente est une équivalence. En effet,
supposons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Soit $x \in F$.
$u \circ u(x) = u\big(u(x)\big)$ où $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ par définition de l'image d'une application linéaire.
Or $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.
Donc $u\big(u(x)\big) = 0_F$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in F$, $u \circ u$ est l'application nulle.

3) L'endomorphisme $u : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y; 0) \in \mathbb{R}^2$ est un endomorphisme non nul vérifiant les hypothèses des questions précédentes.

Maths - DS n°5 - Mercredi 5 avril, 2 heures

# Dimension des EV, Polynômes, Continuité

## Exercices

### Exercice 1.

Soit $E = \mathbb{R}^4$.
Soient $F = \text{Vect}\big((1;2;1;2);(3;4;1;2)\big)$
et $G = \{(x;y;z;t) \in E, x-y-z+t=0 \quad \textbf{et} \quad x-y+z=0\}$.

1) Montrer que $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et en donner une base.
2) Donner une base de $F$ et en déduire $\dim F$.
3) Montrer que $F \subset G$.
4) En déduire que $F = G$.

### Exercice 2.

Soit $u$, $v$ et $w$ les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, $w_0 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2} \quad w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1) Calculer $u_1$.
2) Montrer que la suite $u+v+w$ est constante.
3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $u_{n+2}$ en fonction de $u_{n+1}$ et de $u_n$.
4) En déduire une expression de $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5) Donner une formule explicite pour $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6) Montrer que les trois suites $u$, $v$ et $w$ convergent vers une même limite que l'on précisera.

### Exercice 3.

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Soit $P_n = (n-2)X^n - nX^{n-1} + nX + 2 - n \in \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $Q = aX^n + bX^{n-1} + cX + d \in \mathbb{R}_n[X]$.

1) Montrer que $(X-1)^3 \,|P_n$.
2) Montrer que $(X-1)^4 \not| P_n$.
3) On suppose que 1 est racine de multiplicité 3 du polynôme $Q$.
   Montrer que $Q \in \text{Vect}\,(P_n)$.

### Exercice 4.

Dans tout l'exercice, on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left]n\pi; \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
2) En étudiant la fonction $x \mapsto \tan(x) - x$, montrer qu'il existe une unique solution dans $I_n$ à l'équation $\tan(x) = x$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x_n$ l'unique solution dans $I_n$ de l'équation $\tan(x) = x$.
On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Le but des questions suivantes est d'étudier cette suite, et notamment de donner un développement asymptotique de $x_n$ lorsque $n \to +\infty$.

3) Pourquoi peut-on affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n\pi < x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ ?

4) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n - n\pi = \operatorname{Arctan}(x_n)$.

6) Exprimer $x_n$ en fonction de $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

7) En déduire que $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\pi n} + \dfrac{1}{2\pi n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

**Exercice 5.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On identifie polynôme et fonction polynomiale associée.
Pour tout entier $k \in [\![0; n]\!]$, on note $P_k$ le polynôme

$$P_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X + i)$$

Par exemple, $P_0 = 1$ (produit vide), $P_1 = X$, $P_2 = X(X + 1)$, etc...
On note $\mathcal{B}$ la famille $\mathcal{B} = (P_0; P_1; P_2; ...; P_n)$.
Enfin on définit l'application $\Delta : P \in E \mapsto P(X) - P(X - 1)$ et on note, pour $i \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^{(i)} = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ ... \circ \Delta}_{i \text{ fonctions dans la composée}}$$

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de la famille $\mathcal{B}$ et de l'application $\Delta$.

1) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

2) En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $E$.

3) Montrer que $\Delta$ est linéaire.

4) Soit $k \in [\![0; n - 1]\!]$. Montrer que $\Delta(P_{k+1}) = (k + 1)P_k$.

5) Que vaut $\Delta(P_0)$ ?

6) Conformément au résultat de la question 2), pour tout polynôme $P$ de $E$, on note $(\alpha_0; \alpha_1; ...; \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.
On a donc $P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + ... + \alpha_n P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$.
   a) Montrer que $\Delta$ est un endomorphisme de $E$ et calculer les coordonnées de $\Delta(P)$ dans $\mathcal{B}$.
   b) Calculer $\alpha_0$ en fonction de $P(0)$ et $\alpha_1$ en fonction de $\Delta(P)(0)$.
   c) Conjecturer une formule reliant, pour $k \in [\![1; n]\!]$, $\alpha_k$ et $\Delta^{(k)}(P)(0)$.
   d) Démontrer la formule précédente.

7) En utilisant la question 6)a), calculer $\operatorname{Ker}(\Delta)$ et $\operatorname{Im}(\Delta)$.

8) Soit $k \in [\![0; n - 1]\!]$ et $N \in \mathbb{N}$.
Déduire de la question 4) que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} P_k(i) = \frac{P_{k+1}(N)}{k + 1}$.

9) On suppose dans cette question que $n \geqslant 3$.
En utilisant la question 6), donner les coordonnées de $X^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

10) Soit $N \in \mathbb{N}$. Simplifier $T_N = \sum_{i=1}^{N} i^3$.

# Correction DS n°5

## Exercice 1.

1) $G = \{(x;y;z;t) \in E, x-y-z+t=0 \quad \textbf{et} \quad x-y+z=0\}$.
Résolvons le système $(S)$ : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & - & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.$.
$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & - & z & + & t & = & 0 \\ & & & & 2z & - & t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & & & = & 0 \\ & & & & & & t & = & 2z \end{array}\right.$
$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & y-z \\ t & = & 2z \end{array}\right.$
Donc $G = \{(y-z;y;z;2z), y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\big((1;1;0;0);(-1;0;1;2)\big)$.
Donc $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ (en tant qu'espace vectoriel engendré par une famille), et la famille $\mathcal{G} = \big((1;1;0;0);(-1;0;1;2)\big)$ est génératrice de $G$, et libre puisque formée de deux vecteurs non colinéaires : c'est donc une base de $G$.

2) Par définition de $F$, la famille $\mathcal{F} = \big((1;2;1;2);(3;4;1;2)\big)$ est génératrice de $F$, et libre puisque formée de deux vecteurs non colinéaires : c'est donc une base de $F$.
En conséquence $\dim(F) = 2$.

3) Pour montrer que $F \subset G$, il suffit de montrer que les deux vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans $G$.
Or, le vecteur $u = (1;2;1;2)$ vérifie $1-2-1+2=0$ et $1-2+1=0$, c'est-à-dire les deux équations définissant $G$, donc $u \in G$.
De même, $v = (3;4;1;2)$ vérifie $3-4-1+2=0$ et $3-4+1=0$, donc $v \in G$.
Donc $F$ est un sous-espace vectoriel de $G$, donc $F \subset G$.

4) D'après les questions 1 et 2, $\dim(F) = \dim(G) = 2$. D'après la question 3, $F$ est un sous-espace vectoriel de $G$.
Donc $F = G$.

## Exercice 2.

1) $u_1 = \dfrac{v_0 + w_0}{2} = \dfrac{5}{2}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = \dfrac{v_n + w_n + u_n + w_n + u_n + v_n}{2} = u_n + v_n + w_n$.
Donc la suite $u+v+w$ est constante égale à $u_0 + v_0 + w_0 = 6$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + w_{n+1}}{2} = \dfrac{\frac{u_n + w_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2}}{2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

4) ***1ère méthode*** : la question précédente permet de voir la suite $u$ comme récurrente linéaire d'ordre 2.
On a $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{5}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

Équation caractéristique : $2r^2-r-1=0$, $\Delta=1+8=9$, $r_1=\dfrac{1+3}{4}=1$, $r_2=\dfrac{1-3}{4}=\dfrac{-1}{2}$.
Donc, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda+\mu\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ avec $\lambda\in\mathbb{R},\mu\in\mathbb{R}$.
Les conditions initiales conduisent à $\lambda+\mu=1$ et $\lambda-\dfrac{\mu}{2}=\dfrac{5}{2}$, donc $3\lambda=6$ et $\mu=1-\lambda$.
Donc $\lambda=2,\mu=-1$.
Finalement,

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=2-\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

***2ème méthode*** : on aurait aussi pu écrire, pour $n\in\mathbb{N}$ :
$u_{n+1}=6-v_{n+1}-w_{n+1}=6-\dfrac{u_n+w_n+u_n+v_n}{2}=6-\dfrac{6+u_n}{2}=3-\dfrac{u_n}{2}$
puis utiliser les suites arithmético-géométriques.

5) Le même raisonnement qu'à la question précédente tient pour les suites $v$ et $w$. La seule différence se situe au niveau des conditions initiales.
Pour $v$ par exemple, on a $v_0=2$ et $v_1=2$.
En posant pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $v_n=a+b\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$, on en déduit que
$a+b=2$, $a-\dfrac{b}{2}=2$, donc $a=2$ et $b=0$.
Donc $v$ est la suite constante égale à 2.
Enfin, comme $u+v+w$ est constante, on a
$\forall n\in\mathbb{N}, w_n=u_0+v_0+w_0-u_n-v_n=6-2+\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n-2=2+\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$.
Finalement

$$\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases} u_n &= 2-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\\ v_n &= 2\\ w_n &= 2+\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\end{cases}$$

6) $\frac{-1}{2}\in]-1;1[$, donc $\left(\frac{-1}{2}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=2$.

## Exercice 3.

1) Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.
$P_n(1)=n-2-n+n+2-n=0$.
$P_n'(1)=n(n-2)-n(n-1)+n=0$.
$P_n''(1)=n(n-1)(n-2)-n(n-1)(n-2)=0$.
Donc $(X-1)^3\,|P_n$.

2) $P_n'''(1)=n(n-1)(n-2)^2-n(n-1)(n-2)(n-3)=n(n-1)(n-2)>0$ car $n>2$.
Donc 1 est racine de multiplicité 3 dans $P$, donc $(X-1)^4\nmid P_n$.

3) On suppose que 1 est racine de multiplicité 3 du polynôme $Q=aX^n+bX^{n-1}+cX+d$.
Donc, notamment, $Q(1)=Q'(1)=Q''(1)=0$. Ceci conduit au système :
$$\begin{cases} a+b+c+d=0\\ na+(n-1)b+c=0\\ n(n-1)a+(n-1)(n-2)b=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllllllll} a & + & b & & + & c & + & d & = 0 \\ & & b & & + & c & & & = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{L_3}{n-1} \\ na & + & (n-2)b & & & & & & = 0 \quad L_3 \leftarrow \dfrac{L_3}{n-1} \end{array} \right.$$

Donc $b = -c$, $a = -d$ en remplaçant dans la première équation et $na = -(n-2)b$ d'après la troisième équation.

Donc $Q = \dfrac{1}{n-2}\left((n-2)aX^n - naX^{n-1} + naX - (n-2)a\right) = \dfrac{a}{n-2}P$.

Donc $Q \in \operatorname{Vect}(P)$.

**Exercice 4.**

1) $I = \mathbb{R}_+^* = ]0; +\infty[$ est un ***intervalle*** sur lequel la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est définie, continue et dérivable.

   De plus, $\forall x \in I, f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0.$

   Donc $f$ est constante sur $I$ (qui est un intervalle...) ce qui permet de conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = \frac{\pi}{2}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left]n\pi; \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

   Soit $g : x \in I_n \mapsto \tan(x) - x$, définie, continue et dérivable sur $I_n$.

   $\forall x \in I_n, g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) > 0.$

   Donc $g$ est strictement croissante sur $I_n$.

   Or $\lim\limits_{x \to n\pi} g(x) = -n\pi < 0$ car $n$ est strictement positif,

   et $\lim\limits_{x \to n\pi + \frac{\pi}{2}} g(x) = +\infty.$

   Comme $g$ est continue et strictement croissante, il existe une unique solution dans $I_n$ à l'équation $g(x) = 0$.

   Donc il existe une unique solution dans $I_n$ à l'équation $\tan(x) = x$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x_n$ l'unique solution dans $I_n$ de l'équation $\tan(x) = x$.

On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3) $x_n \in I_n = \left]n\pi; \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, n\pi < x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

4) D'après la question précédente, d'une part $x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2} < (n+1)\pi < x_{n+1}$ : donc la suite $x$ est strictement croissante.

   D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*, n\pi < x_n$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$ car la fonction tan est $\pi$-périodique.

   Or $n\pi < x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ donc $0 < x_n - n\pi < \dfrac{\pi}{2}$, domaine sur lequel la fonction Arctan est la bijection réciproque de tan.

   Donc $\operatorname{Arctan}(x_n) = x_n - n\pi$.

6) En utilisant le résultat de la question précédente et celui de la première question, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right) = x_n - n\pi \Leftrightarrow x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

7) On reprend le résultat de la question précédente :
étant donné $n \in \mathbb{N}^*, x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
Or, lorsque $n \to +\infty$, $x_n \to +\infty$ d'après la question 4, donc $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
Et par conséquent,
$\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} = \dfrac{1}{n\pi} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{n\pi}\left(1 - \dfrac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
Donc $\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2n^2\pi} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Finalement, en utilisant le développement limité d'Arctan au voisinage de 0

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

**Exercice 5.**

1) Soit $k \in [\![0; n]\!]$.
$\deg(P_k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \deg(X+i) = \sum_{i=0}^{k-1} 1 = k$
La famille $\mathcal{B}$ est donc échelonnée en degrés, ne contient pas le polynôme nul : elle est donc libre.
2) Or $\mathcal{B}$ contient $n+1$ vecteurs de $E$, $\dim(E) = n+1$, c'est donc une base de $E$.
3) Soit $P \in E$, $Q \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$,
$\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \mu Q - \lambda P(X-1) - \mu Q(X-1) = \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q)$.
Donc $\Delta$ est linéaire.
4) Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
\Delta(P_{k+1}) &= \prod_{i=0}^{k}(X+i) - \prod_{i=0}^{k}(X+i-1) \\
&= \prod_{i=0}^{k}(X+i) - \prod_{i=-1}^{k-1}(X+i) \\
&= (X+k)\prod_{i=0}^{k-1}(X+i) - (X-1)\prod_{i=0}^{k-1}(X+i) \\
&= (X+k-X+1)\prod_{i=0}^{k-1}(X+i) \\
&= (k+1)P_k
\end{aligned}$$

5) $\Delta(P_0) = 1 - 1 = 0$ est le polynôme nul.
6) Conformément au résultat de la question 2), pour tout polynôme $P$ de $E$, on note $(\alpha_0; \alpha_1; ...; \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.
On a donc $P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + ... + \alpha_n P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$.
   a) $\Delta(P) = \Delta\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Delta(P_k)$ car $\Delta$ est linéaire.
   Donc $\Delta(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k k P_{k-1}$ d'après les questions 4 et 5. En effectuant un changement

d'indice, on a donc $\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\alpha_{k+1}P_k$.

Donc $\Delta(P) \in \text{Vect}\big(P_0; P_1; ...; P_{n-1}\big)$ qui est un sous-espace vectoriel de $E$ : donc $\Delta$ est un endomorphisme de $E$ et les coordonnées de $\Delta(P)$ dans $\mathcal{B}$ sont

$$(\alpha_1; 2\alpha_2; ...; n\alpha_n; 0)$$

b) Tous les polynômes $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$ sont divisibles par $X$ par définition.
Donc $\forall k \in [\![1; n]\!]\,, P_k(0) = 0$.
Donc, $P(0) = \alpha_0 P_0(0) + \alpha_1 P_1(0) + ... + \alpha_n P_n(0) = \alpha_0$.
Donc $\alpha_0 = P(0)$.
De même, $\Delta(P) = \alpha_1 P_0 + 2\alpha_2 P_1 + ... + n\alpha_n P_{n-1}$
donc $\alpha_1 = \Delta(P)(0)$ en évaluant en 0.

c) On prend exemple sur la question précédente pour obtenir $\alpha_2$ :
$\Delta(\Delta(P)) = \Delta^{(2)}(P) = 2\alpha_2 P_0 + 2 \times 3\alpha_3 P_1 + ... + n(n-1)\alpha_n P_{n-2}$,
puis, en évaluant en 0, $2\alpha_2 = \Delta^{(2)}(P)(0)$ donc $\alpha_2 = \dfrac{\Delta^{(2)}(P)(0)}{2}$.
On peut poursuivre ainsi et conjecturer que

$$\forall k \in [\![1; n]\!]\,, \alpha_k = \frac{\Delta^{(k)}(P)(0)}{k!}$$

d) Démontrons par récurrence finie que

$$\forall k \in [\![1; n]\!]\,, \Delta^{(k)}(P) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(k+i)!}{i!}\alpha_{k+i}P_i$$

***Initialisation*** : nous avons déjà démontré la formule au rang $k = 1$ dans la question 6)b) :
$\Delta^{(1)}(P) = \Delta(P) = \alpha_1 P_0 + 2\alpha_2 P_1 + ... + n\alpha_n P_{n-1} = \dfrac{1!}{0!}\alpha_1 P_0 + \dfrac{2!}{1!}\alpha_2 P_1 + ... + \dfrac{n!}{(n-1)!}\alpha_n P_{n-1}$

***Hérédité*** : supposons la formule vraie pour un entier $k$ donné dans $[\![1; n-1]\!]$.
Alors, $k+1 \in [\![2; n]\!]$.
De plus :

$$\begin{aligned}
\Delta^{(k+1)}(P) &= \Delta\big(\Delta^{(k)}(P)\big) \\
&= \Delta\left(\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(k+i)!}{i!}\alpha_{k+i}P_i\right) && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(k+i)!}{i!}\alpha_{k+i}\Delta\left(P_i\right) && \text{par linéarité} \\
&= \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(k+i)!}{i!} i\alpha_{k+i}P_{i-1} && \text{d'après les questions 4) et 5)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{(k+i+1)!}{(i+1)!}(i+1)\alpha_{k+i+1}P_i && \text{par changement d'indice} \\
&= \sum_{i=0}^{n-(k+1)} \frac{(k+1+i)!}{i!}\alpha_{k+1+i}P_i
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

***Conclusion*** : pour tout entier $k \in [\![1; n]\!]\,, \Delta^{(k)}(P) = \sum_{i=0}^{n-k} \dfrac{(k+i)!}{i!}\alpha_{k+i}P_i$.

En évaluant en 0, comme $P_i(0) = 0$ pour tout entier $i > 0$, on obtient pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$

$$\Delta^{(k)}(P)(0) = \frac{k!}{0!}\alpha_k P_0 = k!\alpha_k$$

Ce qui achève la démonstration :

$$\forall k \in [\![1;n]\!]\,, \alpha_k = \frac{\Delta^{(k)}(P)(0)}{k!}$$

7) D'après la question 6)a), pour tout polynôme $P \in E$ décomposé dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$, on a :

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\alpha_{k+1} P_k$$

***Calculons*** $\mathrm{Ker}(\Delta)$ : $\Delta(P) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0;n-1]\!]\,, (k+1)\alpha_{k+1} = 0$ puisque $\mathcal{B}$ est une base, donc est libre.
Donc $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ si et seulement si $P = \alpha_0 P_0$. Donc

$$\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Vect}\,(P_0) = \mathbb{R}_0[X]$$

Par ailleurs, $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathrm{Vect}\,(P_0; P_1; ...; P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'après la question 6)a) toujours.
Or, en utilisant la formule du rang, on a
$\dim\big(\mathrm{Im}(\Delta)\big) = \dim\left(\mathbb{R}_{n+1}[X]\right) - \dim(\mathrm{Ker}(\Delta)) = n + 1 - 1 = n.$
Donc $\mathrm{Im}(\Delta)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, de même dimension que $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ :

$$\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

8) Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$ et $N \in \mathbb{N}$.
D'après la question 4), $\Delta\left(P_{k+1}\right) = P_{k+1}(X) - P_{k+1}(X-1) = (k+1)P_k(X)$.
Cette égalité est donc aussi vraie pour les fonctions polynomiales.
Donc $\sum_{i=1}^{N} P_k(i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_{k+1}(i) - P_{k+1}(i-1)}{k+1} = \frac{P_{k+1}(N) - P_{k+1}(0)}{k+1}$ par télescopage.
Or $k+1 > 0$ donc $P_{k+1}(0) = 0$.
On obtient finalement

$$\sum_{i=1}^{N} P_k(i) = \frac{P_{k+1}(N)}{k+1}$$

9) On suppose $n \geqslant 3$.
Notons $(a_0; a_1; a_2; a_3; 0; ...; 0)$ les coordonnées de $Q = X^3$ dans la base $\mathcal{B}$.
En utilisant la question 6)d) :
$a_0 = Q(0) = 0$
$\Delta(Q) = X^3 - (X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = 3X^2 - 3X + 1$
$a_1 = \Delta(Q)(0) = 1$
$\Delta^{(2)}(Q) = 3X^2 - 3X - (3X^2 - 6X + 3 - 3X + 3) = 6X - 6$
$a_2 = \dfrac{\Delta^{(2)}(Q)(0)}{2} = -3$
$\Delta^{(3)}(Q) = 6X - (6X - 6) = 6$
$a_3 = \dfrac{6}{3!} = 1$
Donc

$$Q = X^3 = P_1 - 3P_2 + P_3$$

10) Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
T_N &= \sum_{i=1}^{N} i^3 \\
&= \sum_{i=1}^{N} P_1(i) - 3P_2(i) + P_3(i) \\
&= \frac{P_2(N)}{2} - 3\frac{P_3(N)}{3} + \frac{P_4(N)}{4} \\
&= \frac{2N(N+1) - 4N(N+1)(N+2) + N(N+1)(N+2)(N+3)}{4} \\
&= N(N+1)\frac{2 - 4N - 8 + N^2 + 5N + 6}{4} \\
&= N(N+1)\frac{N^2 + N}{4} \\
&= \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$$

Maths - DS n°6 - Lundi 3 juin, 3 heures

# E.V. de dimension finie, suites, matrices, proba

L'usage d'une calculatrice est interdit.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*

***Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.***

## Exercice 1.

### *CCP TSI 2023*

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Enfin on définit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A$, $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$b_1 = (0; 1; 1) \qquad b_2 = (1; 1; 0) \qquad b_3 = (0; 0; 1)$$

1) La matrice $A$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2) Montrer que $\mathcal{B} = (b_1; b_2; b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer que la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) On note $P$ la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ : $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
   Déterminer $P$ et vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
5) Déterminer une relation entre $A$, $P$, $T$ et $P^{-1}$.

6) On note $T = N + D$ où $D$ est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $D$ et vérifier que $N$ et $D$ commutent.

7) Que vaut $N^n$ pour $n \geqslant 2$ entier ?

8) Déduire de ce qui précède une expression de $T^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
On donnera chacun de ses coefficients.

9) Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre $X_{n+1}$, $A$ et $X_n$.

10) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $X_n$ en fonction de $A$, $n$ et $X_0$.

11) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n$ en fonction de $T^n$, $P$ et $P^{-1}$.
Démontrer cette relation par récurrence.

12) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 2.**

***Centrale PSI 2021***

On rappelle qu'un graphe orienté $G$ est la donnée $G = (S; A)$ d'un ensemble de sommets $S$ (fini) et d'un ensemble $A \subset S^2$ d'arêtes de la forme $(s; s')$ où $s \in S, s' \in S$. Les éléments de $A$ sont appelés ***arêtes*** du graphe.
On dit que $s'$ ***est un voisin de*** $s$ si et seulement si $(s; s') \in A$.
On remarque que $s$ peut être son propre voisin (si $(s; s) \in A$) et que $s'$ peut être un voisin de $s$ sans que $s$ soit un voisin de $s'$ (dans le cas où $(s; s') \in A$ mais que $(s'; s) \notin A$).
Dans la suite, sauf mention contraire, $G = (S; A)$ est un graphe, et $S$ est composé de $n \in \mathbb{N}^*$ sommets qui sont numérotés de 1 à $n$. On s'intéresse dans cet exercice ***aux marches aléatoires sur le graphe*** $G$ : un point se déplace ***aléatoirement*** sur le graphe, et à chaque étape, il passe du sommet où il se trouve ***vers l'un des voisins de ce sommet, avec équiprobabilité***. Ceci entraîne notamment que la probabilité de passer d'un sommet à un voisin de ce sommet ne dépend pas de l'étape de la marche aléatoire.
Pour $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; n]\!]$, on note $t_{i,j}$ la probabilité que le point se déplace du sommet $i$ au sommet $j$ lors d'une étape de la marche ; en particulier, s'il n'y a pas d'arête reliant $i$ à $j$, $t_{i,j} = 0$.
La matrice dont le coefficient ***ligne*** $i$ ***et colonne*** $j$ vaut $t_{i,j}$ est notée $T$ et s'appelle ***matrice de transition du graphe***.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne $P^{(k)} = \left(p_1^{(k)}; p_2^{(k)}; ...; p_{n-1}^{(k)}; p_n^{(k)}\right)$ où, pour $i \in [\![1; n]\!]$, $p_i^{(k)}$ est la probabilité que le point soit sur le sommet numéro $i$ à l'étape $k$ de la marche.

1) Justifier que, pour tout entier naturel $k$, $p_1^{(k)} + ... + p_n^{(k)} = 1$.

2) Montrer que, pour tout entier naturel $k$, $P^{(k+1)} = P^{(k)} T$.

3) En déduire, pour tout entier naturel $k$, une expression de $P^{(k)}$ en fonction de $T$, $k$ et $P^{(0)}$.

4) On suppose que la suite de vecteur $\left(P^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $P = (p_1; ...; p_n)$ (au sens où chacune des composantes de $P^{(k)}$ converge vers la composante correspondante de $P$).
Montrer que $PT = P$, que, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $p_i \in [0; 1]$ et que $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

5) ***Marche aléatoire sur un tétraèdre***

Dans cette question, on considère que

$$\begin{cases} S = \{1; 2; 3; 4\} \\ A = \{(1;2); (1;3); (1;4); (2;1); (2;3); (2;4); (3;1); (3;2); (3;4); (4;1); (4;2); (4;3)\} \end{cases}$$

La Figure 1 représente ce graphe.

On rappelle que, lorsque le point se trouve sur un sommet du graphe, il a la même probabilité de se rendre, à la prochaine étape, sur chacun des trois autres sommets du graphe.

Enfin, on pose $J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

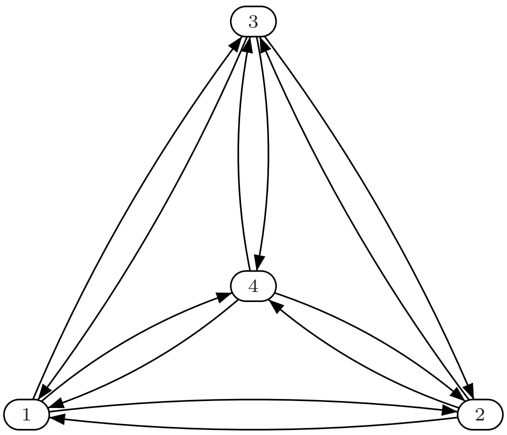



***Figure 1*** : graphe du tétraèdre.

a) Exprimer la matrice de transition $T$ en fonction de $I_4$ et $J_4$.

b) Soit $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right); \left(\frac{2}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{-2}{\sqrt{10}}; \frac{-1}{\sqrt{10}}\right); \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}; \frac{2}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{-2}{\sqrt{10}}\right)\right)$.
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à $T$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $R^4$.
Donner la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

d) On pose $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
Donner les coefficients de la matrice $Q$.

e) Justifier que $Q$ est inversible et vérifier que $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$.

f) Déduire des questions précédentes une relation donnant la matrice $T$ en fonction des matrices $M$, $Q$ et $Q^{\mathrm{T}}$.

g) En déduire une relation donnant $T^k$ en fonction de $M$, $Q$, $Q^{\mathrm{T}}$ et $k \in \mathbb{N}$.

h) Montrer que, quel que soit $P^{(0)} = \left(p_1^{(0)}; p_2^{(0)}; p_3^{(0)}; p_4^{(0)}\right)$ donnant les probabilités que le point mobile se trouve au début de la marche aléatoire sur chacun des sommets du tétraèdre, la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur ligne $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

# Correction DS n°6

## Exercice 1.

1) Effectuons l'algorithme du pivot sur la matrice $(A|X)$ :

$$\begin{aligned}
(A|X) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 2 & -1 & 1 & x \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -z \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 3 & x+2z \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -z \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & x+2z-y \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y-z \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x}{2}+z-\frac{y}{2} \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y-z \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{x}{2}+\frac{3y}{2}-z \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x}{2}+z-\frac{y}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $A$ est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

2) Il s'agit de montrer que $\mathcal{B} = (b_1; b_2; b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Commençons par remarquer que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$ : il suffit donc de démontrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
Soit $(\lambda; \mu; \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 = (0; 0; 0)$.
On a donc $(\mu; \lambda+\mu; \lambda+\nu) = (0; 0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu &= 0 \\ \lambda+\mu &= 0 \\ \lambda+\nu &= 0 \end{cases}$
La première ligne permet d'affirmer que $\mu = 0$, en reportant dans la seconde on obtient $\lambda = 0$ et la dernière ligne donne alors $\nu = 0$.
Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Les coordonnées de $f(b_1)$ dans la base canonique sont données par

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc $f(b_1) = (0;2;2) = 2b_1$.

De même, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $f(b_2) = (1;1;0) = b_2$.

Enfin $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $f(b_3) = (1;1;1) = b_2 + b_3$.

Donc la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) On note $P$ la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ : $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
Par définition des matrices de passage, et par définition de la famille $\mathcal{B}$, on a donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus :
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5) Par définition :
- $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$
- $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
- $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$

D'après la formule de changement de bases pour les endomorphismes, on a donc

$$A = PTP^{-1}$$

6) On note $T = N + D$ où $D$ est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par définition, $D = T - N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

De plus $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$

et $DN=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=N$

Donc $N$ et $D$ commutent.

7) $N^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3$

Donc, pour tout entier $n\geqslant 2$, $N^n=N^2\times N^{n-2}=0_3\times N^{n-2}=0_3$.

8) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}T^n &= (D+N)^n\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^{n-k}N^k \qquad \text{car } N \text{ et } D \text{ commutent}\\ &= \binom{n}{0}D^nI_3+\binom{n}{1}D^{n-1}N \qquad \text{d'après la question précédente}\\ &= D^n+nN \qquad \text{car } D^{n-1}N=D(D(...(DN)...))=N\end{aligned}$$

Ainsi,

$$T^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

9) Par définition de la matrice $A$ et des suites $u$, $v$ et $w$, on a, pour tout entier naturel $n$ :

$$X_{n+1}=AX_n$$

10) Par analogie avec les suites réelles géométriques, on démontre donc par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N}, X_n=A^nX_0$$

L'***initialisation*** est immédiate puisque $A^0=I_3$.

Pour l'***hérédité*** : supposons la formule vraie pour un entier $n$ donné.

Alors $X_{n+1}=AX_n=A\left(A^nX_0\right)=\left(AA^n\right)X_0=A^{n+1}X_0$.

***Conclusion*** : pour tout entier naturel $n$, $X_n=A^nX_0$.

11) Montrons à nouveau par récurrence que, pour $n\in\mathbb{N}$, $A^n=PT^nP^{-1}$.

***Initialisation*** : pour $n=0$, $A^n=I_3$ et $PT^nP^{-1}=PI_3P^{-1}=PP^{-1}=I_3$.

***Hérédité*** : supposons que pour $n$ entier naturel donné, on ait $A^n=PT^nP^{-1}$.

Alors $A^{n+1}=AA^n=PTP^{-1}PT^nP^{-1}=PTT^nP^{-1}=PT^{n+1}P^{-1}$.

***Conclusion*** : la formule est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc

$$\forall n\in\mathbb{N}, A^n=PT^nP^{-1}$$

12) En reprenant les résultats des questions 8), 10) et 11), on obtient donc, pour $n$ entier naturel :

$X_n=A^nX_0=PT^nP^{-1}X_0$.

Or $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $T^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $X_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Donc $X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n \\ 2^n & 1 & n \\ 2^n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n \\ 2^n & 1 & n \\ 2^n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1-2^n \\ 1-2^n \end{pmatrix}$

On a donc pour les suites $u$, $v$ et $w$ les formules explicites suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n & = & n+1 \\ v_n & = & n+1-2^n \\ w_n & = & 1-2^n \end{cases}$$

## Exercice 2.

1) En notant $A_{i,k}$ l'événement « le point mobile se trouve sur le sommet $i$ à l'étape $k$ », étant donné un entier $k$, la famille $(A_{i,k})_{i \in [\![1;n]\!]}$ est un système complet d'événements puisque, à l'étape $k$, le point se trouve toujours sur un sommet, et sur un seul !
   Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_{k,i}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
   Donc $p_1^{(k)} + ... + p_n^{(k)} = 1$.

2) La famille $(A_{i,k})_{i \in [\![1;n]\!]}$ est un système complet d'événements, et on admet qu'aucune des probabilités $\mathbb{P}\left(A_{i,k}\right) = p_i^{(k)}$ n'est nulle (hypothèse fondamentale pour pouvoir conditionner par les événements de la famille).
   On a alors, en utilisant la formule des probabilités totales, pour $j \in [\![1;n]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$ donnés :
   $p_j^{(k+1)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_{i,k}}\left(A_{j,k+1}\right) \mathbb{P}\left(A_{i,k}\right)$
   Or $\mathbb{P}_{A_{i,k}}\left(A_{j,k+1}\right) = t_{i,j}$ par définition. Et $\mathbb{P}\left(A_{i,k}\right) = p_i^{(k)}$.
   Donc $p_j^{(k+1)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} t_{i,j}$ et ceci pour tout $j \in [\![1;n]\!]$.
   On retrouve ici la formule du produit matriciel entre le vecteur ligne $P^{(k)}$ et la matrice $T$ : donc, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,
   $$P^{(k+1)} = P^{(k)} T$$

3) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $P^{(k)} = P^{(0)} T^k$.
   ***Initialisation*** : pour $k = 0$, $P^{(0)} T^0 = P^{(0)} I_n = P^{(0)}$.
   ***Hérédité*** : supposons que pour $k \in \mathbb{N}$ donné on ait $P^{(k)} = P^{(0)} T^k$.
   Alors $P^{(k+1)} = P^{(k)} T = P^{(0)} T^k T$ par hypothèse de récurrence.
   Donc $P^{(k+1)} = P^{(0)} T^{k+1}$.
   ***Conclusion*** : la propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc vraie pour tout entier naturel $k$.

4) D'après la question précédente, pour $j \in [\![1;n]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$ donnés : $p_j^{(k+1)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} t_{i,j}$
   En passant à la limite $k \to +\infty$ dans cette égalité, dans la mesure où toutes les suites $\left(p_i^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, on a donc :
   $$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i t_{i,j}$$

Ceci étant vrai pour tout $j$, on a donc, à nouveau en interprétant cette somme comme issue d'un produit matriciel :

$$P = PT$$

Par ailleurs, pour $i$ et $k$ donnés, $p_i^{(k)}$ est une valeur de probabilité donc
$\forall i \in [\![1; n]\!], \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant p_i^{(k)} \leqslant 1$.
Par passage à la limite $k \to +\infty$ dans cet encadrement, ceci pour tout $i$, on a donc

$$\forall i \in [\![1; n]\!], p_i \in [0; 1]$$

Enfin, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $p_1^{(k)} + p_2^{(k)} + ... + p_n^{(k)} = 1$ car $(A_{i,k})_{i \in [\![1;n]\!]}$ est un système complet d'événements.
À nouveau par passage à la limite, on a donc $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

5) ***Marche aléatoire sur un tétraèdre***

a) Chaque sommet du tétraèdre possède 3 voisins, et il y a équiprobabilité pour les transitions d'un sommet à ses voisins.
Donc, partant par exemple du sommet 1, on a $t_{1,2} = t_{1,3} = t_{1,4} = \dfrac{1}{3}$ (et $t_{1,1} = 0$) et de même en partant des autres sommets.
Donc $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $T = \dfrac{1}{3}(J_4 - I_4)$.

b) Soit $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right); \left(\frac{2}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{-2}{\sqrt{10}}; \frac{-1}{\sqrt{10}}\right); \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}; \frac{2}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{-2}{\sqrt{10}}\right)\right)$.
Card $\mathcal{B} = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$.
Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit donc de démontrer qu'elle est libre.
Soit $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ tels que
$a\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) + b\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right) + c\left(\frac{2}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{-2}{\sqrt{10}} + d\frac{-1}{\sqrt{10}}\right); \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}; \frac{2}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{-2}{\sqrt{10}}\right) = (0; 0; 0; 0)$.
Ceci conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} a & +b & +c & +d & =0 \\ a & -b & +c & -d & =0 \\ 2a & +b & -2c & -d & =0 \\ -a & +2b & +c & -2d & =0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrll} a & +b & +c & +d & =0 & \\ & -2b & & -2d & =0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & -b & -4c & -3d & =0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ & 3b & +2c & -d & =0 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrll} a & +b & +c & +d & =0 & \\ & b & & +d & =0 & L_2 \leftarrow \dfrac{-1}{2} L_2 \\ & & 8c & +4d & =0 & L_3 \leftarrow -2L_3 + L_2 \\ & & 4c & -8d & =0 & L_4 \leftarrow 2L_4 + 3L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrll} a & +b & +c & +d & =0 & \\ & b & & +d & =0 & \\ & & 8c & +4d & =0 & \\ & & & -20d & =0 & L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3 \end{array}\right.$$

D'où l'on déduit que $d = 0$, donc $c = 0$ et $b = 0$, donc $a = 0$ : la famille $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à $T$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Notons $e_1, e_2, e_3$ et $e_4$ les 4 vecteurs de la famille $\mathcal{B}$.

$f(e_1)$ a pour coordonnées dans la base canonique $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Donc $f(e_1) = e_1$.

De même, en effectuant les produits matriciels correspondants, on obtient :

$f(e_2) = \left(\frac{-1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{-1}{6}; \frac{1}{6}\right) = \dfrac{-1}{3} e_2$

$f(e_3) = \left(\frac{-2}{3\sqrt{10}}; \frac{-1}{3\sqrt{10}}; \frac{2}{3\sqrt{10}}; \frac{1}{3\sqrt{10}}\right) = \dfrac{-1}{3} e_3$

$f(e_4) = \left(\frac{1}{3\sqrt{10}}; \frac{-2}{3\sqrt{10}}; \frac{-1}{3\sqrt{10}}; \frac{2}{3\sqrt{10}}\right) = \dfrac{-1}{3} e_4$

Par définition, la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) On pose $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

Par définition, la matrice $Q$ est donc la matrice des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique.

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

e) $Q$ est inversible puisque c'est une matrice de passage.
De plus, on vérifie que
$$QQ^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}=I_4$$
donc que $Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}$.

f) $T=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$
$M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
$Q=P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$
$Q^{\mathrm{T}}=Q^{-1}=P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$
Donc, en utilisant la formule de changement de base pour les matrices d'endomorphismes, on a :
$$T=QMQ^{-1}=QMQ^{\mathrm{T}}$$

g) On en déduit que, pour $k\in\mathbb{N}$, $T^k=(QMQ^{-1})\dots(QMQ^{-1})=QM^kQ^{-1}=QM^kQ^{\mathrm{T}}$ par télescopage (ou en le démontrant par récurrence).

h) D'après la question 3), $P^{(k)}=P^{(0)}T^k=P^{(0)}QM^kQ^{\mathrm{T}}$ en utilisant aussi le résultat de la question précédente.

Donc $P^{(k)}=\begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} & p_3^{(0)} & p_4^{(0)} \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^k}{3^k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^k}{3^k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)^k}{3^k} \end{pmatrix} Q^{\mathrm{T}}$.

Les produits matriciels étant des combinaisons linéaires des coefficients des matrices en facteur, la limite d'une combinaison linéaire étant la combinaison linéaire des limites, on peut effectuer la limite $k\to+\infty$ directement dans la matrice $M^k$, avant d'effectuer le produit. Donc la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge (car les coefficients de $M^k$ convergent quand $k\to+\infty$) et la limite de la suite vaut

$$P=\begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} & p_3^{(0)} & p_4^{(0)} \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{\mathrm{T}}.$$

Ou encore, en effectuant les produits par $Q$ à gauche, et $Q^{\mathrm{T}}$ à droite :

$$P=\begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} & p_3^{(0)} & p_4^{(0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit
$$P=\left(\frac{p_1^{(0)}+p_2^{(0)}+p_3^{(0)}+p_4^{(0)}}{4};\frac{p_1^{(0)}+p_2^{(0)}+p_3^{(0)}+p_4^{(0)}}{4};\frac{p_1^{(0)}+p_2^{(0)}+p_3^{(0)}+p_4^{(0)}}{4};\frac{p_1^{(0)}+p_2^{(0)}+p_3^{(0)}+p_4^{(0)}}{4}\right).$$

Or $p_1^{(0)}+p_2^{(0)}+p_3^{(0)}+p_4^{(0)}=1$ (et ce par définition d'une probabilité et quel que soit le vecteur $P^{(0)}$).

Donc $P=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ est la limite de la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, indépendante du premier terme de cette suite.

# Cinquième partie

# Info

# Sixième partie

# DM Info

# Septième partie

# Appendices

# Correction DM n°Table des matières