Maths - Chapitre 1

Ensembles finis, calcul littéral

I. Les entiers

I.1. Relation d'ordre totale

Définition 1.1 (Relation d'ordre totale)

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels sont munis d'une relation d'ordre $\leqslant$, c'est-à-dire d'une relation binaire vérifiant

- Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{Z}, x \leqslant x$.
- Antisymétrie : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow y = x$.
- Transitivité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$.

Cette relation d'ordre est totale, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Remarque

- Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $x \leqslant y$ équivaut à $y \geqslant x$.
- Le fait d'exiger qu'une relation d'ordre soit totale garantit qu'elle est réflexive.
- La relation binaire $<$ n'est pas une relation d'ordre.

I.2. Bornes et extremums d'une partie

Définition 1.2 (Majorant, minorant)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{Z}$ est ***majorée par*** $M \in \mathbb{Z}$ et on dit que M ***est un majorant de*** E si pour tout $x \in E$, $x \leqslant M$.
On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{Z}$ est ***minorée par*** $m \in \mathbb{Z}$ et on dit que m ***est un minorant de*** E si pour tout $x \in E$, $m \leqslant x$.
Une partie qui est minorée par m et majorée par M est dite ***bornée*** par m et M.

Définition 1.3 (Maximum, minimum, extremums)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{Z}$ possède ***un plus grand élément*** $M \in \mathbb{Z}$ aussi appelé ***maximum de*** E si ....
On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{Z}$ possède ***un plus petit élément*** $m \in \mathbb{Z}$ aussi appelé ***minimum de*** E si ....

Proposition 1.4 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

Démonstration

Notation

On note $\max E$ le maximum de E s'il existe et $\min E$ le minimum de E s'il existe.

Axiome 1.5 (Propriété fondamentale des entiers)

Toute partie ***non vide minorée*** de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.
Toute partie ***non vide majorée*** de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.
Comme $\mathbb{N}$ est lui-même minoré par 0, toute partie ***non vide*** de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

I.3. Démonstration par récurrence

Méthode : Démonstration par récurrence faible

Étant donné $n_0 \in \mathbb{Z}$, pour démontrer qu'un prédicat $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geqslant n_0$, on peut effectuer une ***récurrence faible, que l'on présentera toujours ainsi*** :

- **Initialisation** : ***on vérifie que*** $P(n_0)$ ***est vrai***. On peut ***éventuellement*** vérifier que $P(n_0+1)$, $P(n_0+2)$ sont aussi vrais pour avoir une idée de la façon dont on va effectuer la prochaine étape de la démonstration.
- **Hérédité** : on suppose que pour un entier $n \geqslant n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie, ***en énonçant clairement cette propriété appelée hypothèse de récurrence***. On démontre alors, sous cette hypothèse, que $P(n+1)$ ***est vraie***.
- **Conclusion** : on termine par une simple phrase résumant les deux étapes de la démonstration :
  « ***La propriété est initialisée au rang $n = n_0$ et héréditaire à partir de ce rang, elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.*** »

En résumé, on démontre : $\overbrace{P(n_0)}^{\text{Initialisation}} \Rightarrow P(n_0+1) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{P(n) \Rightarrow P(n+1)}_{\text{Hérédité}} \Rightarrow \ldots$

Ex. 1.1 Soit u la suite définie par : $\begin{cases} & u_0 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} &= \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$

Calculer (et simplifier) u_1, u_2 et u_3.
Montrer que la suite u est minorée par 0 et majorée par 3.
Cette suite est-elle monotone ?
A-t-elle une limite ? Si oui, peut-on obtenir cette limite ?

I.4. Division euclidienne

Propriété 1.6 (Division euclidienne dans $\mathbb{N}$)

Étant donnés $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il existe un couple $(q,r) \in \mathbb{N} \times [\![0, b-1]\!]$ tel que $a = bq + r$.

Démonstration

Corollaire 1.7 (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$)

Étant donnés $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, b-1]\!]$ tel que $a = bq+r$.
q est appelé ***quotient*** et r est appelé ***reste*** de la ***division euclidienne*** de a par b.

Définition 1.8 (Multiple, diviseur)

Étant donnés $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, si le reste de la division euclidienne de a par b est nul, on dit :

- que b ***divise*** a ou que b est ***un diviseur de*** a ;
- que a est ***un multiple de*** b.

Notation

Si $b \in \mathbb{N}^*$ divise $a \in \mathbb{Z}$, on note $b|a$ ou encore $a \equiv 0\,[b]$.
Sinon, on note $b \nmid a$.

Ex. 1.2 Soit $x \in \mathbb{N}$, $0 \leq x < 100$.
Montrer que le nombre obtenu en juxtaposant trois fois x est divisible par 37.

Cor. 1.2

I.5. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun

Proposition 1.9 (PGCD,PPCM)

Étant donnés $a, b \in \mathbb{N}^*$, les deux entiers suivants sont toujours définis

- on appelle ***plus grand diviseur commun*** à a et b le maximum de l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ n \in \mathbb{N}^*, (n|a \textbf{ et } n|b) \right\}$$

- on appelle ***plus petit multiple commun*** à a et b le minimum de l'ensemble

$$\mathcal{M} = \left\{ n \in \mathbb{N}^*, (a|n \textbf{ et } b|n) \right\}$$

Démonstration

Notation

On note PGCD$(a;b)$ le plus grand diviseur commun à a et b et PPCM$(a;b)$ le plus petit multiple commun à a et b.

I.6. Algorithme d'Euclide

Méthode : Algorithme d'Euclide

Étant donnés deux entiers a et b strictement positifs, l'algorithme suivant permet d'obtenir PGCD$(a;b)$:

- ***Initialisation*** : on pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$;
- ***Propagation*** : tant que $v_k \neq 0$, on pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{k+1} & = & v_k \\ v_{k+1} & = & (\text{reste dans la division euclidienne de } u_k \text{ par } v_k) \end{array} \right.$$

- ***Arrêt*** : lorsque $v_k = 0$, la valeur de u_k est PGCD$(a;b)$.

Ex. 1.3 Calculer (en utilisant l'algorithme d'Euclide) $\mathrm{PGCD}(a,b), \mathrm{PGCD}(a,c), \mathrm{PGCD}(b,c)$ pour $a = 105$, $b = 170$ et $c = 231$.

Cor. 1.3

I.7. Nombres premiers

Définition 1.10

On dit qu'un entier $n > 1$ est ***premier*** s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Théorème 1.11 (Théorème fondamental de l'arithmétique)

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose de façon unique (à l'ordre près) en produit de facteurs premiers.

Démonstration hors programme

Ex. 1.4 Donner l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 30.

Cor. 1.4

Ex. 1.5 Décomposer les nombres $a = 105$, $b = 170$ et $c = 231$ en produit de facteurs premiers puis calculer $\mathrm{PGCD}(a,b), \mathrm{PGCD}(a,c), \mathrm{PGCD}(b,c), \mathrm{PPCM}(a,b), \mathrm{PPCM}(a,c), \mathrm{PPCM}(b,c)$.

Cor. 1.5

I.8. Ensembles finis, infinis

Définition 1.12

On dit qu'un ensemble E est ***fini*** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $e : E \to [\![1; n]\!]$. Sinon, on dit que E est ***infini***.

Remarque

- Par convention, $\emptyset$ est considéré comme un ensemble fini : on choisit $n = 0$ et $e : \emptyset \to [\![1; n]\!] = \emptyset$.
- L'entier $n \in \mathbb{N}$ intervenant dans la définition 1.12 s'interprète simplement comme ***le nombre d'éléments*** d'un ensemble fini E et la bijection $e : E \to [\![1; n]\!]$ comme ***une numérotation de ses éléments***.

Proposition 1.13 (Cardinal d'un ensemble fini)

Si E est un ensemble fini alors l'entier $n \in \mathbb{N}$ intervenant dans la définition 1.12 est unique. On appelle ***cardinal*** de E cet entier.

Démonstration hors programme

Notation

Le cardinal d'un ensemble E fini est noté $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$ ou encore $\#E$.

II. Sommes et produits finis

II.1. Famille finie d'éléments d'un ensemble

Définition 1.14 (Famille finie)

Étant donné un ensemble E, on appelle ***famille de*** $n \in \mathbb{N}$ ***éléments de*** E toute application $a : [\![1; n]\!] \to E$. Si $n = 0$, la famille est dite ***vide***.

$a(1)$, $a(2)$, etc... sont appelés ***éléments de la famille*** a.

Un même élément de E peut apparaître plusieurs fois dans une même famille.

Notation

On préfère généralement la notation a_1, a_2, etc... pour les éléments de la famille a.

II.2. Sommes et produits finis de nombres réels

Notation

Étant donnés un entier $n \in \mathbb{N}$ et une famille a de n éléments de $\mathbb{R}$, on note

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i \in [\![1;n]\!]} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ (somme vide)} \\ a_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i \in [\![1;n]\!]} a_i = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ (produit vide)} \\ a_n \times \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} a_i & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

et $\quad n! = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ prononcé .... avec $\quad 0! = 1$.

Remarque

De façon plus simple, on pourrait écrire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.
Cependant, la définition précédente, ***donnée par récurrence***, montre qu'un des outils principaux pour le calcul des sommes et des produits finis est ....
Par ailleurs, les écritures du type $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i$ sont valides et la section II.6. les généralisera plus encore.

Propriété 1.15

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration

Propriété 1.16

Étant donnés $n, p \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$ et une famille a de n éléments de $\mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \prod_{i=1}^{n} (\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad \prod_{i=1}^{n} (a_i)^p = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^p$$

La démonstration rigoureuse se fait par récurrence. Plus simplement, la première formule consiste à factoriser le facteur commun λ, la seconde à regrouper les n facteurs λ en début de produit, la dernière à utiliser la formule $(ab)^p = a^p b^p$ sur un nombre fini de facteurs.

II.3. Exemples fondamentaux

Propriété 1.17

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration

Ex. 1.6 Écrire chacune des sommes suivantes à l'aide du signe $\displaystyle\sum_{k=...}^{...} ...$ puis donner une expression simplifiée de cette somme.
Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel.
$A_n = n \times 1 + (n-1) \times 2 + (n-2) \times 3 + ... + 1 \times n$
$B_n = 2 + 4 + 6 + ... + (2n)$
$C_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1)$
$D_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2$
$E_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n+1)^2$

II.4. Techniques de calcul de sommes et de produits

Ex. 1.7 Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}$ puis simplifier pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$.

Cor. 1.7

Méthode : Regroupement de termes, changement d'indice, télescopage

Pour simplifier l'expression d'une somme ou d'un produit fini, on peut utiliser les principes suivants :

- ***Regroupement de termes*** : pour $m, n \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

  Dans l'exemple précédent, on a écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}$.
- ***Changement d'indice*** : pour $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_{i+k} = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_i$ et $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_{m+n-i}$

  Dans l'exemple précédent, on a écrit $\displaystyle -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n+1} = -\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i}$.
- ***Télescopage*** : pour $m, n \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} a_{i+1} = a_m - a_{n+1}$ car les termes s'annulent deux à deux sauf le premier terme de la première somme et le dernier terme de la

seconde somme.

Dans l'exemple précédent :

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$	1	$\cancel{\frac{1}{2}}$	$\cancel{\dots}$	$\cancel{\frac{1}{n}}$	
$\displaystyle -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}$		$\cancel{-\frac{1}{2}}$	$\cancel{\dots}$	$\cancel{-\frac{1}{n}}$	$-\frac{1}{n+1}$

- Des principes similaires sont applicables aux produits.

Ex. 1.8 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$.

Cor. 1.8

II.5. Somme d'une progression arithmétique ou géométrique finie

Proposition 1.18 (Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

La somme de $n \in \mathbb{N}$ termes consécutifs d'une suite arithmétique réelle vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = n\frac{u_{p+1} + u_{p+n}}{2}$$

Autrement dit, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au ***produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique du premier et du dernier*** de ces termes.

Démonstration

Proposition 1.19 (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

La somme de $n \in \mathbb{N}$ termes consécutifs d'une suite géométrique réelle de raison $q \neq 1$ vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = u_{p+1}\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Autrement dit, la somme de n ***termes*** consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est égale au ***produit du premier terme par*** $\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

Démonstration

Corollaire 1.20

Quels que soient $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$, $x^n - y^n = (x - y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k$.

Démonstration

Remarque

Pour $n = 0$, le corollaire précédent s'écrit $x^0 - y^0 = 1 - 1 = 0$ d'une part, $(x-y)\displaystyle\sum_{k=0}^{-1} x^{-1-k}y^k = 0$ d'autre part, car la somme est vide.

Ex. 1.9 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $f_n(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} ix^{i-1}$.

Cor. 1.9

Ex. 1.10 Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbb{N}$ le nombre $4^n - 1$ est-il premier ?

Cor. 1.10

II.6. Généralisations des sommes finies

Définition 1.21 (Famille finie (bis))

Étant donnés un ensemble E et un ensemble I ***fini***, on appelle ***famille d'éléments de*** E ***indexée par*** I toute application $a : I \to E$.
Si $I = \emptyset$, la famille est dite ***vide***.

Notation

Un cas fréquent de généralisation de la notion de famille finie est celui où $I = [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$ avec $n, p \in \mathbb{N}$. Les éléments de la famille $a : [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!] \to E$ sont alors le plus souvent notés $a_{i,j}$ pour $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$.

Ex. 1.11 Le tableau ci-dessous présente les valeurs des termes de la famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

$j = ...$ $i = ...$	1	2	3	...	p
1	1	2	3	...	p
2	3	4	5	...	$p+2$
3	5	6	7	...	$p+4$
...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n	$2n-1$	$2n$	$2n+1$	...	$p+2n-2$

Que vaut $a_{4,5}$?
Donner (sans justifications) une formule donnant $a_{i,j}$ en fonction des valeurs de i et de j.

Définition 1.22 (Somme double)

Étant donnés deux entiers $n, p \in \mathbb{N}$ et une famille a de nombres réels indexée par $I = [\![1; n]\!] \times [\![1; p]\!]$, on appelle ***somme double*** des éléments de a la somme

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

Remarque

En principe, dans la définition précédente, il faudrait démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel on effectue les ***sommes finies*** n'a pas d'incidence sur le résultat.

Méthode : Somme double

Pour le calcul d'une somme double $S = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}$, il est ***souvent plus facile***

- de commencer par calculer $T_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$ puis de calculer $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} T_i$
- ou de commencer par calculer $U_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ puis de calculer $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} U_j$.

Ex. 1.12 Simplifier pour $n, p \in \mathbb{N}$ la somme $S = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} i - j$.

Cor. 1.12

Ex. 1.13 (Cor.) Simplifier pour $n, p \in \mathbb{N}$ la somme $S = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} (i-j)^2$.

Proposition 1.23 (Produit de deux sommes finies)

Étant donnés une famille a de $n \in \mathbb{N}$ nombres réels et une famille b de $p \in \mathbb{N}$ nombres réels, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} (a_i b_j)$$

Démonstration

Ex. 1.14 Simplifier pour $n, p \in \mathbb{N}$ la somme $S = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} ij$.

Cor. 1.14

Définition 1.24 (Sommes triangulaires)

Étant donnés un entier $n \in \mathbb{N}$ et une famille a de nombres réels indexée par $I = [\![1;n]\!]^2$, on appelle ***somme triangulaire*** des éléments de a les sommes du type

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right) \qquad \text{(triangulaire large)}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}\right) \qquad \text{(triangulaire stricte)}$$

Méthode : Sommes triangulaires

Pour le calcul d'une somme triangulaire, on peut utiliser la même méthode que pour le calcul des sommes doubles.
Par ailleurs, il existe un lien entre les sommes triangulaires et les sommes doubles explicité ci-dessous :

$$\begin{array}{c|ccccc} & & & j & & \\ \hline & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ & a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ i & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{array}$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce lien peut permettre de calculer
- des sommes doubles à l'aide de sommes triangulaires, ou réciproquement
- des sommes triangulaires à l'aide de sommes doubles.

Ex. 1.15 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |i-j|$.

Cor. 1.15

Ex. 1.16 (Cor.) Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i-j)^2$.

III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

III.1. Coefficients binomiaux

Définition 1.25

On appelle ***coefficients binomiaux*** les nombres définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!], \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1 \times 2 \times \dots \times p}$$

$\binom{n}{p}$ se lit « p ***parmi*** n ».

Propriété 1.26

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!], \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \text{ et } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Démonstration

Ex. 1.17 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} =$ ...., $\binom{n}{3} =$ ....

De même, $\binom{n+1}{2} =$ ...., $\binom{n+2}{3} =$ ...., etc.Que valent $\binom{7}{2}$, $\binom{8}{6}$, $\binom{10}{7}$? ....

Propriété 1.27 (Formule de Pascal [1])

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![0; n-1]\!], \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Démonstration

Méthode : Triangle de Pascal

Les propriétés des coefficients binomiaux permettent de les calculer en remplissant le triangle ci-dessous appelé ***triangle de Pascal***. Cette méthode est ***beaucoup plus efficace que le recours aux factoriels.***

1. **Blaise Pascal**(1623 ;1662), mathématicien, physicien et philosophe français, il a notamment contribué à fonder la théorie des probabilités et la théorie statique des gaz.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	1	1	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2	1		1	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
3	1			1	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
4	1				1	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
5	1					1	$\downarrow$	$\downarrow$
6	1						1	$\downarrow$
7	1							1

III.2. Formule du binôme de Newton [2]

Théorème 1.28 (Formule du binôme de Newton)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Démonstration

Corollaire 1.29

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Démonstration

Ex. 1.18 Développer les expressions suivantes en utilisant la formule du binôme et le triangle de Pascal :

$(a+b)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(a-b)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(a+b)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(a-b)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(x+1)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(x-2)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ex. 1.19 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} 2^i \binom{n}{i}$.

Cor. 1.19

2. **Newton**(1643 ;1727), mathématicien et physicien anglais ayant fondé la mécanique des solides, la théorie de la gravitation et le calcul différentiel (en même temps et indépendamment de Leibniz).

Ex. 1.20 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ pair}}} \binom{n}{i} - \sum\limits_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ impair}}} \binom{n}{i}$.

En déduire $T = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ pair}}} \binom{n}{i}$ et $U = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ impair}}} \binom{n}{i}$.

Cor. 1.20

IV. Exercices corrigés

Cor. 1.13 : On a $T_i = \sum\limits_{j=1}^{p} (i-j)^2 = \sum\limits_{j=1}^{p} \left(i^2 - 2ij + j^2\right) = pi^2 - 2i\dfrac{p(p+1)}{2} + \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$. D'où :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} \left(pi^2 - ip(p+1) + \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}\right) \\ &= p\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - p(p+1)\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \\ &= pn\frac{2n^2 + 2n + n + 1 - 3pn - 3p - 3n - 3 + 2p^2 + 2p + p + 1}{6} \\ &= \frac{np\left(2n^2 + 2p^2 - 1 - 3np\right)}{6} \end{aligned}$$

Cor. 1.16 : On a $S' = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} (i-j)^2 = \dfrac{n^2\left(n^2-1\right)}{6}$ d'après l'exercice 1.13.

Or $S' = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i-j)^2 + \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (i-i)^2 + \sum\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (i-j)^2 = 2S$. Donc $S = \dfrac{n^2\left(n^2-1\right)}{12}$.