Maths - Chapitre 2

Logique, ensembles, applications

I. Éléments de logique

Les thèmes abordés dans cette section sont aussi utiles en Automatique (SI) et en Informatique.

I.1. Vocabulaire

Définition 2.1

Une phrase mathématique bien construite est appelée ***énoncé*** ou ***assertion***.
On appelle ***définition*** un énoncé introduisant un nouveau mot.
On appelle ***axiome*** ou ***principe*** un énoncé concernant des mots déjà définis et considéré comme ***vrai*** dans le cadre d'une théorie mathématique.

Il est ***impossible de tout définir***. Par exemple, dans la définition précédente, nous n'avons pas défini ce qu'est « une phrase mathématique bien construite ». Cette notion repose essentiellement sur notre propre intuition.
Les axiomes complètent les définitions en donnant les propriétés fondamentales vérifiées par les mots définis. Ainsi le principe fondamental de la logique est le suivant :

Axiome 2.2 (Principe du tiers exclus)

Un énoncé est soit ***vrai***, soit ***faux***. Il n'y a pas de troisième possibilité.

Définition 2.3

On dit qu'un énoncé est ***démontré*** lorsqu'on l'a déduit au moyen de ***modes de raisonnements*** à partir de définitions, d'axiomes ou d'autres énoncés déjà démontrés.
Nous préciserons plus loin quels modes de raisonnements peuvent être utilisés dans une démonstration. Un énoncé démontré est appelé :

- ***proposition*** ou ***propriété*** ;
- ***théorème*** (lorsqu'il est particulièrement important) ;
- ***lemme*** (lorsqu'il est utilisé pour la démonstration d'un autre énoncé) ;
- ***corollaire*** (lorsque c'est une conséquence simple d'une proposition plus importante).

On appelle ***conjecture*** un énoncé que l'on pense être vrai mais qui n'est pas encore démontré.

I.2. Valeurs de vérité

D'après le principe du tiers exclus, un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux. C'est ce qu'on appelle la ***valeur de vérité*** de cet énoncé. En dehors des mathématiques, les valeurs de vérité pourront être notées différemment. Le tableau suivant regroupe les différentes traductions possibles de ces valeurs :

Notation

Notation mathématique	Notation électronique	Notation Python
Faux	0	`False`
Vrai	1	`True`

Ex. 2.1 ***En Python,*** `False` ***et*** `0` ***sont deux objets différents ayant la même valeur. De même pour*** `True` ***et*** `1`***.***

```
>>> False is 0
False
>>> False==0
True
```

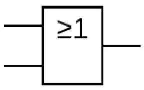
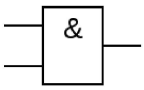
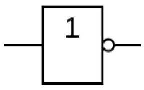
I.3. Opérateurs et fonctions logiques

Définition 2.4

Étant donnés deux énoncés A, B, on définit les nouveaux énoncés suivants :

- A **ou** B qui est vrai lorsque l'***un au moins*** des deux énoncés A,B est vrai, et qui est faux sinon ;
- A **et** B qui est vrai lorsque ***les deux*** énoncés A,B sont vrais, et qui est faux sinon ;
- **non** A qui est vrai lorsque A est faux, et qui est faux lorsque A est vrai.
  non A est aussi appelé ***négation*** de A.

Notation

Opérateur	Notation formelle	Symbole électronique	Opération booléenne	Syntaxe Python
A **ou** B	$A \vee B$		$A + B$	`A or B`
A **et** B	$A \wedge B$		$A.B$	`A and B`
non A	$\neg A$		$\bar{A} = 1 - A$	`not A`

Ex. 2.2 ***Comment traduire simplement le test logique suivant ?***

```
>>> (a==b)or(a==-b)
True
```

I.4. Tables de vérité

Une façon de définir un opérateur ou une fonction logique est de donner sa table de vérité.
Remplir les tables ci-dessous :

A	**non** A
Vrai	Faux
Faux	Vrai

A	B	A **ou** B
Faux	Faux	......
Faux	Vrai	......
Vrai	Faux	......
Vrai	Vrai	......

A	B	A **et** B
Faux	Faux	......
Faux	Vrai	......
Vrai	Faux	......
Vrai	Vrai	......

Ex. 2.3 ***Pour chacun des énoncés suivants, donner sa valeur de vérité et écrire sa négation***

- $A : 6 < 2 \times 3$
- B : Je suis grand et fort.
- $C : x \leqslant 2$ **ou** $x > 3$.

Cor. 2.3

Propriété 2.5

Étant donnés deux énoncés A, B

- **non** (A **ou** B) s'écrit aussi ....
- **non** (A **et** B) s'écrit aussi ....

Démonstration

A	B	A **et** B	A **ou** B	**non** (A **et** B)	**non** (A **ou** B)
Faux	*Faux*	......	......	......	......
Faux	*Vrai*	......	......	......	......
Vrai	*Faux*	......	......	......	......
Vrai	*Vrai*	......	......	......	......

A	B	**non** A	**non** B	(**non** A) **et** (**non** B)	(**non** A) **ou** (**non** B)
Faux	*Faux*	......	......	......	......
Faux	*Vrai*	......	......	......	......
Vrai	*Faux*	......	......	......	......
Vrai	*Vrai*	......	......	......	......

Méthode

Comme nous venons de le voir, une méthode pour démontrer une ***équivalence*** logique est d'écrire des tables de vérité.

Méthode

Étant donnés deux énoncés A, B, pour démontrer A **ou** B, on rédige ainsi :

« ***Supposons que*** A ***soit faux et démontrons qu'alors*** B ***est vraie.*** »

En effet, dire que A **ou** B est vrai revient à dire :

- ou bien A est vrai et alors A **ou** B est aussi vrai ;

- ou bien A est faux et pour démontrer que A **ou** B est vrai, il faut démontrer que B est vrai.

Ex. 2.4 Soit I un intervalle (non vide) réel et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f s'annule ou ne change pas de signe.

Cor. 2.4

I.5. Implication logique

Définition 2.6

Étant donnés deux énoncés A, B, le nouvel énoncé « A implique B » signifie que si A est vrai, alors B l'est aussi. En revanche, ***si A est faux, $A \Rightarrow B$ reste vraie que B soit vrai ou faux***.

Notation

« A implique B » est noté $A \Rightarrow B$

Méthode

Pour démontrer que $A \Rightarrow B$ est ***vraie***, on rédige donc ainsi :
« ***Supposons que A soit vrai. Démontrons alors que B est vrai...*** »

Méthode

De même, pour démontrer qu'une implication $A \Rightarrow B$ est ***fausse***, on peut rédiger comme suit :
« ***Trouvons un contre-exemple où A est vrai et B faux.*** »

Propriété 2.7 (propriété de transitivité)

$((A \Rightarrow B)\ \textbf{et}\ (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Démonstration

I.6. Conditions nécessaires, conditions suffisantes

L'implication $A \Rightarrow B$ signifie que si A est vrai, alors B l'est aussi.
Autrement dit, lorsque $A \Rightarrow B$ ***il suffit*** que A soit vrai pour que B le soit.
De même, si B est faux, alors A ne peut pas être vrai : ***il faut*** que B soit vrai pour que A le soit.

Définition 2.8

Lorsque $A \Rightarrow B$ on dit que

- A est une ***condition suffisante*** à B ;
- B est une ***condition nécessaire*** à A.

Démontrer que A est une condition suffisante à B, démontrer que B est une condition nécessaire à A et démontrer que $A \Rightarrow B$ ont exactement la même signification.

Ex. 2.5 ***Rappel :*** on dit qu'un entier p divise un entier n et on note $p|n$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $n = p \times k$. Sinon, on dit que p ne divise pas n ce que l'on note $p \nmid n$.

1) n étant un entier, montrer que $(6|n) \Rightarrow (2|n)$.
2) $6|n$ est-elle une condition nécessaire à ce que n soit pair ?
3) $6|n$ est-elle une condition suffisante à ce que n soit pair ?

Cor. 2.5

I.7. Réciproque

Définition 2.9 (Réciproque)

Étant donnée une implication $A \Rightarrow B$, on appelle ***implication réciproque*** l'énoncé $B \Rightarrow A$.

Remarque

Une implication peut être vraie et sa réciproque fausse !

En fait, tous les cas sont possibles !

Ex. 2.6

1) Écrire $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ en toutes lettres puis donner leurs valeurs de vérité.
   A : (il pleut) B : (il y a des nuages)
2) Trouver des énoncés A et B tels que :
   - $A \Rightarrow B$ est vrai et $B \Rightarrow A$ est vrai.
   - $A \Rightarrow B$ est faux et $B \Rightarrow A$ est vrai.
   - $A \Rightarrow B$ est faux et $B \Rightarrow A$ est faux.

Cor. 2.6

I.8. Équivalence

Définition 2.10 (Équivalence)

Lorsqu'une implication $A \Rightarrow B$ et sa réciproque $B \Rightarrow A$ sont ***toutes les deux vraies***, on dit que A et B sont ***équivalents***. On dit aussi

A ***équivaut à*** B ou encore

A ***si et seulement si*** B ou enfin

- A est ***une condition nécessaire et suffisante*** à B.

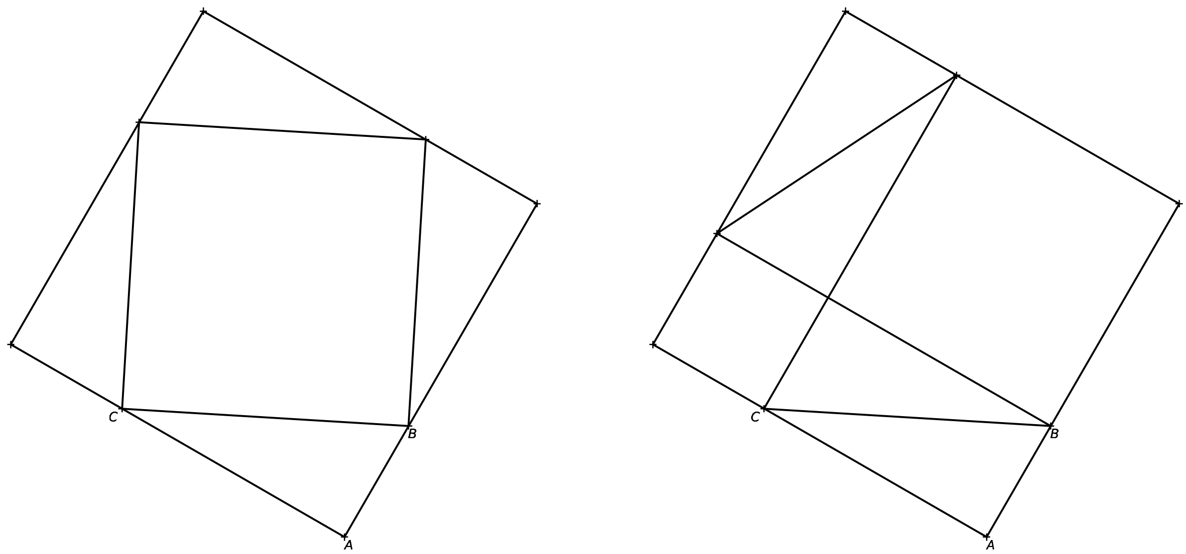
Notation

A équivaut à B est noté $A \Leftrightarrow B$

Méthode

D'une manière générale, pour montrer une équivalence, ***on doit donc montrer deux implications*** ! On peut donc rédiger ainsi :
« ***Supposons que*** A ***soit vrai. Démontrons alors que*** B ***est vrai...*** »
« ***Réciproquement, supposons que*** B ***soit vrai, démontrons que*** A ***est vrai...*** »

Ex. 2.7 Démontrer le ***théorème de Pythagore***, à savoir :
Soient A, B, C trois points du plan.
Le triangle ABC est rectangle en A ***si, et seulement si,*** on a l'égalité $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Indication : on pourra s'inspirer du dessin suivant.



I.9. Contraposée

Définition 2.11 (Contraposée)

Étant donnée une implication $A \Rightarrow B$, on appelle ***implication contraposée*** l'énoncé (**non** B) $\Rightarrow$ (**non** A).

Propriété 2.12 (équivalence d'un énoncé et de sa contraposée)

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\textbf{non}\, B) \Rightarrow (\textbf{non}\, A))$

Démonstration

Une implication et sa contraposée sont équivalentes d'après la propriété précédente. Autrement dit, ***il revient au même de démontrer qu'une implication est vraie ou que sa contraposée l'est***.

Méthode

Ainsi, pour démontrer qu'une implication $A \Rightarrow B$ est ***vraie***, on peut rédiger comme suit :
« ***Démontrons la contraposée. Supposons que*** B ***est faux, et montrons alors que*** A ***est faux aussi.*** »

Ex. 2.8 ***Quelle est la contraposée de*** $(6|n) \Rightarrow (2|n)$ ***?***

Cor. 2.8

Ex. 2.9 Démontrer que le produit de deux entiers est pair si et seulement si l'un ou l'autre des deux entiers est pair.

Cor. 2.9

Ex. 2.10 ***Étant donnés deux entiers*** a ***et*** b***, démontrer que***
ab est impair si et seulement si a et b sont impairs.

Cor. 2.10

I.10. Démonstration par l'absurde

Habituellement, pour démontrer un énoncé A, on part d'axiomes ou d'hypothèses que l'on sait être vrais, puis on déduit par des implications que A est lui aussi vrai. Autrement dit, une démonstration de A est en général du type

$$\text{Énoncés vrais} \Rightarrow \cdots \Rightarrow A$$

Or d'après le paragraphe précédent, on peut démontrer cette implication en démontrant sa contraposée, c'est-à-dire qu'une démonstration possible de l'énoncé A est

$$(\textbf{non}\, A) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \text{Énoncé faux}$$

Définition 2.13 (Démonstration par l'absurde)

On appelle ***démonstration par l'absurde*** de l'énoncé A une suite d'implications partant de **non** A et aboutissant à un énoncé faux.

Méthode

Pour démontrer l'énoncé A, on peut rédiger ainsi :
« ***Supposons que*** A ***est faux et montrons que c'est absurde.*** »

Ex. 2.11 ***Démontrer que*** $\sqrt{2}$ ***est irrationnel*** (c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme quotient d'entiers).

Cor. 2.11

Propriété 2.14

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration

Faite au chapitre 1.

II. Ensembles et quantificateurs

II.1. Définitions

Définition 2.15

Un ***ensemble*** est une « collection » d'objets mathématiques, sans répétition possible d'un même objet.
Ces objets sont appelés ***éléments*** de l'ensemble.
Un ensemble est dit ***fini*** s'il possède un nombre fini d'éléments, sinon il est dit ***infini***.
L'ensemble qui n'a aucun élément est appelé ***ensemble vide***.
Un ensemble possédant un unique élément est appelé ***singleton***.
Lorsque tous les éléments d'un ensemble A appartiennent aussi à un ensemble B, on dit que A ***est inclus dans*** B ou que A ***est une partie de*** B.
Si A et B ont exactement les mêmes éléments, on dit qu'ils sont ***égaux***.

Notation

L'assertion « x est un élément de l'ensemble E » est notée $x \in E$.
Elle se lit « x appartient à E ».
L'assertion « x n'est pas un élément de l'ensemble E » est notée $x \notin E$.
Elle se lit « x n'appartient pas à E ».
L'ensemble vide est noté $\emptyset$.
L'assertion « A est inclus dans B » est notée $A \subset B$ et l'assertion « A est égal à B » notée

$A = B$.
Les ensembles et inclusions suivants sont supposés connus :
$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $\emptyset \subset \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}^* \subset \mathbb{D}^* \subset \mathbb{Q}^* \subset \mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}^*$.

Ex. 2.12 Dans les cas suivants, dire si l'on a $A \subset B$, $B \subset A$, $A \in B$ ou $B \in A$.

$A = [-1; 5[$, $B =]3; 5]$	$A = -2$, $B = \mathbb{Z}$	$A = [-1; 5[$, $B = \mathbb{Z}$
$A = \mathbb{C}$, $B =]-1; 1[$	$A = \{-5; 3; \pi\}$, $B = -3$	$A = \mathbb{D}$, $B = \emptyset$

II.2. Prédicats

Définition 2.16

On appelle ***prédicat*** un énoncé qui fait intervenir une ou plusieurs ***variable(s)***.

Ex. 2.13 Nous avons déjà vu des prédicats dans ce chapitre :
- $(6|n) \Rightarrow (2|n)$ est un prédicat faisant intervenir une variable n qui est un entier ;
- $\overline{A \,\mathbf{ou}\, B} \Leftrightarrow \left(\bar{A} \,\mathbf{et}\, \bar{B}\right)$ est un prédicat ....

Remarque

Pour qu'un prédicat ait un sens, il faut toujours préciser ce que représentent ses variables ! C'est ce que l'on fait lorsqu'on écrit :
- Étant donné un entier n, $(6|n) \Rightarrow (2|n)$;
- ....

II.3. Quantificateurs

Définition 2.17

Un ***quantificateur*** précise les valeurs prises par une variable dans un prédicat.

On utilise deux quantificateurs.

Définition 2.18 (Quel que soit)

Étant donnés un ensemble E et un prédicat A faisant intervenir une variable de E, l'énoncé $\forall x \in E, A(x)$ se lit « Quel que soit l'élément x de l'ensemble E, l'assertion $A(x)$ est vraie ». On peut aussi le lire « Soit $x \in E$ (sous-entendu quelconque), l'assertion $A(x)$ est vraie » ou encore « Étant donné $x \in E$ (sous-entendu quelconque), l'assertion $A(x)$ est vraie ».

Méthode

Pour démontrer une propriété de ce type, on rédige ainsi :
« ***Soit*** $x \in E$***. Montrons que*** $A(x)$ ***est vrai.*** »

Ex. 2.14
1) Quelle est la signification de $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \in \mathbb{N}$?
2) Cet énoncé est-il vrai ou faux ?

Cor. 2.14

Définition 2.19 (Il existe)

Étant donnés un ensemble E et un prédicat A faisant intervenir une variable de E, l'énoncé $\exists x \in E, A(x)$ se lit « Il existe un élément x de l'ensemble E tel que l'assertion $A(x)$ est vraie ».

Méthode

Pour démontrer une propriété de ce type, ***il suffit de donner un exemple*** d'un élément de E vérifiant le prédicat $A(x)$.

Ex. 2.15

1) Quelle est la signification de $\exists x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}$?
2) Cet énoncé est-il vrai ou faux ?

Cor. 2.15

II.4. Enchainement de quantificateurs

Axiome 2.20

Lorsque plusieurs quantificateurs se suivent,

- leur ordre ***n'a pas d'importance si les quantificateurs sont identiques*** ;
- leur ordre ***est important si les quantificateurs sont différents***.

Ex. 2.16 ***Écrire en toutes lettres les énoncés suivants, puis dire s'ils sont vrais ou faux.***

1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$.
2) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \leq y$.

Cor. 2.16

II.5. Négation des quantificateurs

Axiome 2.21

Étant donnés un ensemble E et un prédicat A faisant intervenir une variable de E

non $(\forall x \in E, A(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \textbf{non } A(x))$

non $(\exists x \in E, A(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \textbf{non } A(x))$

Dans le cas où des quantificateurs sont enchainés, on fait de même ***sans changer l'ordre***

. ***des quantificateurs***.

Ex. 2.17 ***Écrire en toutes lettres les énoncés suivants. Dire, si possible, s'ils sont vrais ou faux.***

1) **non** $(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y)$
2) La négation de « Tout homme est mortel ».
3) La négation de « Il existe un homme plus grand que toutes les femmes ».

Cor. 2.17

Remarque

À l'aide des quantificateurs, pour deux ensembles E et F, la définition de l'inclusion $E \subset F$ s'écrit :

$(E \subset F) \Leftrightarrow$ ....

De même, la définition de l'égalité $E = F$ s'écrit :

$(E = F) \Leftrightarrow$ ....

Cette remarque conduit aux méthodes suivantes :

Méthode

Étant donnés deux ensembles E et F, pour démontrer que $E \subset F$, on rédige ainsi :
« ***Soit*** $x \in E$***. Montrons que*** $x \in F$***.*** »

Méthode

Le plus souvent, pour démontrer l'égalité $E = F$ on démontre que $E \subset F$ puis que $F \subset E$. On rédige donc ainsi :

- « ***Soit*** $x \in E$***. Montrons que*** $x \in F$***.*** »
- « ***Soit*** $x \in F$***. Montrons que*** $x \in E$***.*** »

Ex. 2.18 Soit $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 1; 4t + 3), t \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $A = B$.

II.6. Opérations sur les ensembles

Définition 2.22

Étant donnés deux ensembles E,F, on définit les nouveaux ensembles suivants :

- l'***intersection de*** E ***et de*** F qui est formée des éléments appartenant à E ***et*** à F.
- la ***réunion de*** E ***et de*** F qui est formée des éléments appartenant à E ***ou*** à F.
- la ***différence de*** E ***et de*** F qui est formée des éléments appartenant à E ***mais pas*** à F ;

- ***si de plus*** $F \subset E$, la différence de E et de F est appelée ***complémentaire de*** F ***dans*** E.

Notation

- l'intersection de E et F est notée $E \cap F$ et se lit E ***inter*** F ;
- la réunion de E et F est notée $E \cup F$ et se lit E ***union*** F ;
- la différence de E et F est notée $E \backslash F$ et se lit E ***privé de*** F ;
- le complémentaire de F dans E est noté $\complement_E^F$ ou $\overline{F}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E.

Ex. 2.19 ***Compléter en utilisant les opérateurs logique*** **et , ou , non .**

1) $x \in E \cap F \Leftrightarrow$ ....
2) $x \in E \cup F \Leftrightarrow$ ....
3) $x \in E \backslash F \Leftrightarrow$ ....

Propriété 2.23

Les opérateurs d'intersection et de réunion vérifient :
•Commutativité : étant donnés deux ensembles A et B
$A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
•Associativité : étant donnés trois ensembles A, B et C
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Démonstration

•*Commutativité : soit $x \in A \cap B$. x appartient à A et à B. Donc x appartient à B et à A. Donc $x \in B \cap A$.*
L'inclusion réciproque et la propriété similaires concernant la réunion se démontrent de même.
•*Associativité : soit $x \in (A \cap B) \cap C$. x appartient à $A \cap B$ et à C. Donc x appartient à A et B et à C.*
Donc x appartient à A et à $B \cap C$ donc à $A \cap (B \cap C)$.
L'inclusion réciproque et la propriété similaires concernant la réunion se démontrent de même.

Ex. 2.20 Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.
Montrer que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

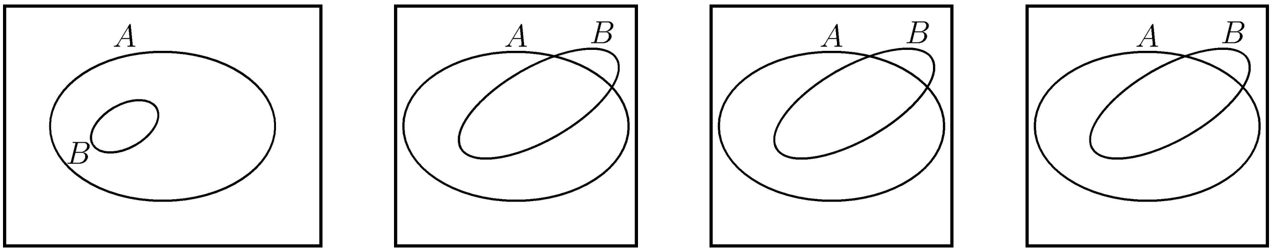
et que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Comment s'appellent ces propriétés vérifiées par la réunion et l'intersection ?

II.7. Diagrammes de Venn

On représente graphiquement les ensembles généralement grâce à des ***diagrammes de Venn*** :



(a) Inclusion, appartenance (b) Intersection (c) Réunion (d) Différence

FIGURE 2.1 – Diagrammes de Venn

II.8. Produit cartésien d'ensembles

Définition 2.24

Étant donnés deux ensembles E, F, on définit le ***produit cartésien de*** E ***par*** F comme l'ensemble des ***couples*** d'éléments $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.
Cette définition se généralise à un ***nombre fini d'ensembles***.

Notation

Le produit cartésien de E par F est noté $E \times F$ et se lit E ***croix*** F.

Remarque

La définition précédente se généralise à un nombre fini d'ensembles : pour trois ensembles E, F et G, $E \times F \times G$ est l'ensemble des ***triplets*** $(x; y; z)$ où $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$. $E \times E$ est noté E^2, $E \times E \times E$ est noté E^3...
En particulier, dans le plan ou l'espace rapportés à un repère, l'ensemble des coordonnées des points du plan est noté ... et l'ensemble des coordonnées des points de l'espace est noté ....

II.9. Modes de définition d'ensembles

a) Définition en extension

Définition 2.25

On dit qu'un ensemble est défini ***en extension*** lorsqu'on donne explicitement tous ses éléments.

Notation

On note alors les éléments entre accolades, séparés par des (points-)virgules : $E = \{e_1; e_2; \dots\}$.

b) Définition en compréhension

Définition 2.26

Étant donné un ensemble E et un prédicat A sur une variable de E, ***l'ensemble des éléments de*** E ***pour lesquels le prédicat*** A ***est vrai*** est un sous-ensemble de E noté $F = \{x \in E, A(x)\}$.
On dit alors que F est défini ***en compréhension***.

Notation

Étant donné un réel r et un sous-ensemble $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}$ on note $r\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{K}, x = rk\}$.
Par exemple, $3\mathbb{N}$ est ....
Étant deux entiers relatifs p et q et deux réels a et b, on appelle ***intervalles*** et on note :

- $[\![p;q]\!] = \{n \in \mathbb{Z}, p \leq n \leq q\}$ ....
- $[a;b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$, $]a;b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$, $[a;b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ $]a;b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$, $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$, $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$, etc...
  En particulier $[\![p;q]\!] = \emptyset$ si $p > q$ et $[a;b] = \emptyset$ si $a > b$.

Ex. 2.21 ***Expliciter les ensembles suivants*** $A = \{n \in \mathbb{N}, 2|n\}$, $B = 2\mathbb{R}$, $C = \{x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$, $D = \{p \in \mathbb{N}, p > 1 \,\mathbf{et}\, \forall n \in [\![2;p-1]\!], n \nmid p\}$, $E = \pi\mathbb{Z}$.

Cor. 2.21

c) Définition comme image directe

En anticipant sur la section III., on peut aussi donner un troisième mode de définition d'ensembles :

Définition 2.27

Étant donné deux ensembles E, F et une application $f : E \to F$, ***l'ensemble des éléments de*** F ***qui peuvent s'écrire*** $f(x)$ ***pour*** $x \in E$ est un sous-ensemble de F noté

$$A = \{f(x), x \in E\}$$

On dit alors que A est défini ***comme image directe***.

Notation

$A = \{f(x), x \in E\}$ est aussi noté $f(E)$.

Remarque

Un ensemble défini comme image directe peut aussi être défini en compréhension puisque $A = \{f(x), x \in E\}$ ....

Ex. 2.22 ***Expliciter (sans justification) les ensembles suivants*** $A = \exp(\mathbb{R})$, $B = \sin(\mathbb{R})$, $C = \cos^2(\mathbb{R})$, $D = \ln(\mathbb{R}_+^*)$.

Cor. 2.22

III. Applications et fonctions

III.1. Définitions et notations

Définition 2.28

On appelle ***application*** ou ***fonction*** f d'un ensemble E ***dans*** un ensemble F (ou ***vers*** F) une correspondance qui à tout élément de E associe un ***unique*** élément de F.
E est appelé ***ensemble de départ*** de la fonction f et F est appelé ***ensemble d'arrivée*** de la fonction f.
Étant donné $x \in E$, $f(x)$ est appelé ***l'image de*** x ***par*** f
et x ***un antécédent de*** $f(x)$ ***par*** f.

Important !

Pour définir une fonction il faut donc donner ***deux ensembles*** E et F, et un procédé permettant d'associer à ***tout*** élément de E ***un unique*** élément de F. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, il peut cependant arriver que l'on omette de donner E ou F.
On retiendra par ailleurs que l'image d'un élément $x \in E$ par f ***existe et est unique*** tandis qu'il ***est possible qu'un élément*** $y \in F$ ***ne possède aucun ou plusieurs antécédents***.

Notation

Les éléments nécessaires à la définition d'une fonction sont résumés dans les notations
$f : \begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ ou plus simplement $f : x \in E \mapsto f(x) \in F$.
L'ensemble de toutes les applications d'un ensemble E donné vers un ensemble F donné est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E. On note $\mathcal{F}(E) = E^E$ l'ensemble de toutes les applications de E vers lui-même.

Définition 2.29

On appelle fonction ***réelle*** d'une variable ***réelle*** toute application d'une partie $I \subset \mathbb{R}$ vers une partie $J \subset \mathbb{R}$.

III.2. Restriction d'une application

Définition 2.30 (Restriction d'une application)

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $P \subset E$ une partie de E. On appelle ***restriction*** de f à P l'application $\tilde{f} : \begin{cases} P & \to & F \\ x \in P \subset E & \mapsto & f(x) \end{cases}$.

Notation

On note souvent $f_{|P}$ la restriction de f à $P \subset E$. Il peut aussi arriver qu'on note par abus f la restriction de f à P en précisant simplement une fois à quelle partie P on se restreint par la suite.

III.3. Composition d'applications

Définition 2.31 (Composée)

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.
On appelle ***composée de*** g ***et de*** f l'application notée $g \circ f$ et définie par :

$$g \circ f : \begin{cases} E & \to & G \\ x & \mapsto & g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) \end{cases}$$

Important ! La composition n'est pas commutative

La définition que nous venons de donner de la composée de deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$ est cohérente puisque dans l'expression de $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, l'image de x par f est un élément de F qui possède à son tour une image par g :

$$\begin{tikzcd} x \in E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & f(x) \in F \arrow[r, "g"] & g\big(f(x)\big) \in G \end{tikzcd}$$

En revanche, $\cancel{f \circ g}$ n'a à priori ***aucune signification***.

III.4. Injections, surjections, bijections

Définition 2.32 (Injections)

On dit qu'une application f de E dans F est une ***injection***, ou encore qu'elle est ***injective***, si tout élément de F a ***au plus un*** antécédent par f.
Traduction symbolique : f est injective $\Leftrightarrow$ ....

Définition 2.33 (Surjections)

On dit qu'une application f de E dans F est une ***surjection***, ou encore qu'elle est ***surjective***, si tout élément de F a ***au moins un*** antécédent par f. Traduction symbolique : f est surjective $\Leftrightarrow$ ....

Définition 2.34 (Bijections)

On dit qu'une application f de E dans F est une ***bijection***, ou encore qu'elle est ***bijective***, si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de F a ***exactement un*** antécédent par f.

Méthode

- Pour démontrer qu'une ***fonction continue d'un intervalle*** $I \subset \mathbb{R}$ ***à valeurs dans un intervalle*** $J \subset \mathbb{R}$ est injective, surjective ou bijective, une simple étude de fonction peut suffire :
  - ⋆ on étudie la monotonie de la fonction : si elle est strictement monotone, alors elle est injective ;
  - ⋆ on étudie ses extremums ou ses limites : si ils correspondent aux bornes de l'ensemble d'arrivée ***et que la fonction est continue***, alors elle est surjective ;
  - ⋆ si la fonction est injective et surjective, ...

  Le tout peut être résumé dans un tableau de variations.
- Sinon :
  - ⋆ Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est injective on rédige ainsi :
    « ***Soient*** x ***et*** x' ***deux éléments de*** E ***tels que*** $f(x) = f(x')$***. Montrons que*** $x = x'$***.*** »
  - ⋆ Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective on rédige ainsi :
    « ***Soit*** $y \in F$***. Montrons qu'il existe*** $x \in E$ ***tel que*** $y = f(x)$***.*** »
  - ⋆ Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on montre qu'elle est ***injective et surjective***.

Ex. 2.23 ***Les applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?***

$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array} \right.$ $\qquad g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + x^2 \end{array} \right.$

$h : \left\{ \begin{array}{l} [\![0;9]\!] \to [\![0;9]\!] \\ k \mapsto (k \times 7)\%10 \end{array} \right.$ autrement dit, $h(k)$ est le reste de la division euclidienne de $7k$ par 10.

Cor. 2.23

Ex. 2.24 Étudier la fonction $k : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 2x^2 + x \end{array} \right.$.

Montrer que $k_{|[1;+\infty[}$ est une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

Cor. 2.24

Proposition 2.35 (Composée d'injections, de surjections, de bijections)

Soit E, F, G trois ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$ deux applications.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Les réciproques des implications précédentes sont fausses.

Démonstration

Ex. 2.25 Soit E, F et G trois ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1) Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
3) Montrer que les réciproques des deux implications précédentes sont fausses.
4) Que peut-on conclure si $g \circ f$ est bijective ?

Cor. 2.25

III.5. Bijection réciproque

Définition 2.36

Étant donnée une bijection $f : E \to F$, on appelle ***bijection réciproque*** de f l'application $F \to E$ qui à tout $y \in F$ associe l'unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Notation

On note $f^{-1} : F \to E$ la bijection réciproque de $f : E \to F$.

Propriété 2.37 (Propriétés des bijections réciproques)

Si $f : E \to F$ est bijective :

1) $\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x$;
2) $\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y$;
3) on a l'équivalence suivante : $\forall x \in E, \forall y \in F, (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$.

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

Définition 2.38 (Application identité)

Étant donné un ensemble E, on appelle ***application identité de*** E et on note id_E l'application de E dans E qui à tout élément x de E associe x lui-même :

$$\mathrm{id}_E : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \mathrm{id}_E(x) = x \end{cases}$$

Remarque

La propriété 2.37 s'écrit donc, pour $f : E \to F$ bijective :

1) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$;
2) $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

La troisième propriété - $\forall x \in E, \forall y \in F, (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$ - est utile pour ***obtenir l'expression de la bijection réciproque d'une application*** f ***bijective*** : en effet, étant donnée une application $f : E \to F$ bijective, obtenir l'expression de sa bijection réciproque revient à ***résoudre l'équation*** $y = f(x)$ ***d'inconnue*** $x \in E$ ***où*** $y \in F$ ***est donné***.

Ex. 2.26 ***Compléter***

- Pour une bijection $f : E \to F$, on a $f^{-1} : F \to E$ bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1}$ ....
- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sont ....
- La fonction carré $c : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$ .... mais sa restriction à $\mathbb{R}_+$ ... . et la fonction racine carrée $r : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$ est ....
- La fonction $h : \begin{cases} [\![0;9]\!] \to [\![0;9]\!] \\ k \mapsto (k \times 7)\%10 \end{cases}$ de l'exercice 2.23 est une bijection dont la bijection réciproque est h^{-1} : ....

Ex. 2.27 Soit E et F deux ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, E)$.

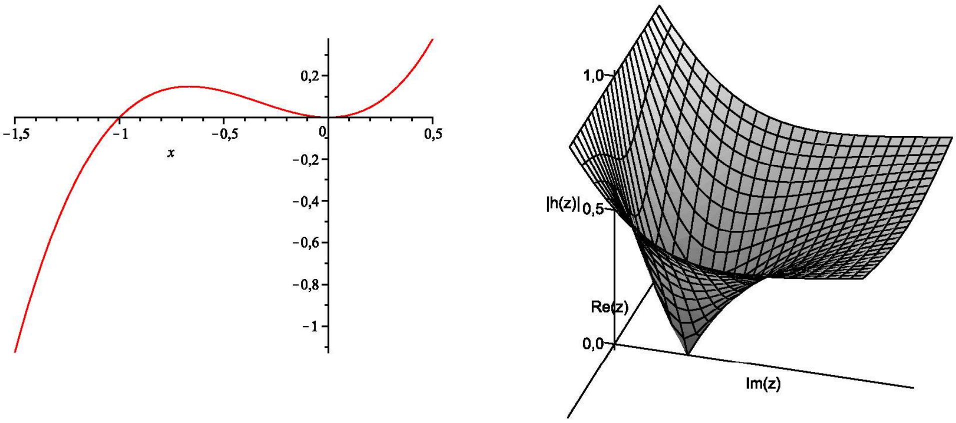
1) Montrer que f et g sont deux bijections réciproques l'une de l'autre si et seulement si $g \circ f = \mathrm{id}_E$ **et** $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
2) Que peut-on affirmer si $g \circ f = \mathrm{id}_E$?

Cor. 2.27

III.6. Graphe, représentations graphiques

Définition 2.39

On appelle ***graphe*** d'une application $f : E \to F$ l'ensemble $\{(x; f(x)), x \in E, f(x) \in F\}$. Dans le cas où ce graphe est une partie de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, on l'appelle aussi ***représentation graphique de*** f (souvent notée $\mathcal{C}_f$) et il s'interprète comme un ensemble de points du plan ou de l'espace rapporté à un repère.



(a) Fonction g de l'exercice 2.23 (b) Fonction $|h|$ de l'exercice 2.23

FIGURE 2.2 – Représentations graphiques

Propriété 2.40 (Représentations graphiques d'une bijection et de sa réciproque)

On rapporte le plan à un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ orthonormé. Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une bijection. Alors la représentation graphique de la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est déduite de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale autour de la droite d'équation $y = x$.

Démonstration

Ex. 2.28 (Cor.) Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \in J$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. Donner une expression de f^{-1}. Représenter graphiquement f et sa bijection réciproque.

IV. Équations

IV.1. Définitions

Définition 2.41

On appelle ***équation*** une égalité faisant intervenir une ou plusieurs variables ***inconnues***.
On appelle ***inéquation*** une inégalité faisant intervenir une ou plusieurs variables ***inconnues***.
Les parties gauche et droite sont appelées ***membres*** de l'équation ou de l'inéquation.
On appelle ***système*** un ensemble d'équations ou d'inéquations.
L'ensemble des valeurs des inconnues pour lesquelles l'équation, l'inéquation ou le système ont une signification est appelé ***ensemble ou domaine de définition***.
Les valeurs des inconnues pour lesquelles l'équation, l'inéquation ou le système sont vrais sont appelées ***solutions***. Trouver ces valeurs, c'est ***résoudre*** l'équation, l'inéquation ou le système.

Méthode

Pour résoudre une équation, une inéquation ou un système, il faut ***toujours commencer par obtenir leur domaine de définition***.

IV.2. Résolution d'une équation

Méthode : Pour résoudre une équation

- il faut ***autant que possible raisonner par équivalences***. La propriété 2.37 garantit qu'on obtient une équation équivalente en appliquant une même bijection aux deux membres d'une équation ;
- si on utilise des implications, ***il faut vérifier que les valeurs obtenues sont solution de l'équation de départ*** ;
- dans le cas d'équations de degré 2 ou plus, factoriser puis utiliser le fait ***qu'un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul***. On dispose aussi de la méthode du discriminant pour les équations polynomiales du second degré ;
- si l'équation dépend d'un paramètre, il est parfois nécessaire de distinguer (le plus tard possible) différents cas permettant de conclure.

Ex. 2.29 (Cor.) Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes
1) $\sqrt{6-x}+\sqrt{3-x}=\sqrt{x+5}+\sqrt{4-3x}$ 2) $m(m+5)x = 6x$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre

IV.3. Résolution d'un système d'équations

Méthode : Pour résoudre un système d'équations

- à nouveau ***autant que possible raisonner par équivalences***. Notamment, ***on prendra soin de toujours conserver le même nombre de lignes pour les systèmes***, sauf dans le cas où plusieurs lignes sont identiques.
- utiliser ***soit la méthode par combinaisons des lignes***, ***soit la méthode de substitutions des inconnues*** (voir exemple).
  D'une manière générale, la méthode par combinaisons des lignes est préférable car plus efficace.

Remarque

On retiendra par ailleurs qu'un système linéaire de $n \in \mathbb{N}^*$ équations à n inconnues peut avoir :

- soit un unique n-uplet solution ;
- soit aucune solution ;
- soit une infinité de solutions.

Ex. 2.30 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant par les méthodes de combinaison et de substitution :
$$\begin{cases} 3x - 5y &= -9 \\ x - y &= 1 \end{cases}$$

Cor. 2.30

Ex. 2.31 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants par la méthode de combinaison des lignes :
$$S_1 : \begin{cases} 2x+5 &= y+z \\ y &= 1+3x-z \\ x+2y+2z &= 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad S_2 : \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+3z &= 0 \\ x+4y+9z &= -1 \end{cases}$$

Cor. 2.31

V. Exercices corrigés

Cor. 2.28 : Étudions f : il s'agit d'une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotients de deux fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Calculons sa dérivée :

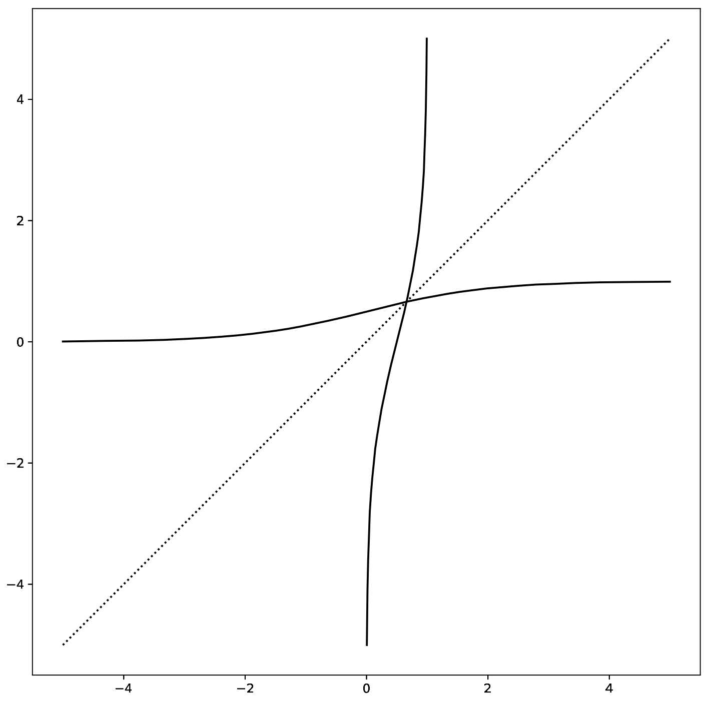
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective. De plus

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{-x}+1} = 1$.

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$ et sa réciproque est définie de $]0;1[$ sur $\mathbb{R}$.

N.B. : les limites en $\pm\infty$ ne sont pas atteintes, donc $J =]0;1[$ est un intervalle ouvert.



Cor. 2.29 : 1) Ensemble de définition : pour que cette équation ait un sens il faut que :
• $6 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 6$
• $3 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 3$
• $x + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$
• $4 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{4}{3}$
On résout donc l'équation sur $\left[-5; \frac{4}{3}\right]$. Les deux membres étant positifs et la fonction carrée étant bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, l'équation équivaut à $\left(\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x}\right)^2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad 9 - 2x + 2\sqrt{6-x}\sqrt{3-x} = 9 - 2x + 2\sqrt{x+5}\sqrt{4-3x} \\ &\Leftrightarrow \quad (6-x)(3-x) = (x+5)(4-3x) \\ &\Leftrightarrow \quad 18 - 9x + x^2 = 20 - 11x - 3x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 + x - 1 = 0 \end{aligned}$$

La méthode du discriminant ou l'utilisation de la racine évidente -1 permettent de conclure que cette équation possède deux solutions $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$ - qui appartiennent toutes les deux à l'ensemble de définition $\left[-5; \frac{4}{3}\right]$.
2) $m(m+5)x = 6x \Leftrightarrow \left(m^2 + 5m - 6\right)x = 0$.
Si $m^2 + 5m - 6 \neq 0$, alors il existe une unique solution $x = 0$.
Si $m^2 + 5m - 6 = 0$, c'est-à-dire si $m \in \{-6; 1\}$, alors tout réel x est solution.