Ensembles finis, calcul littéral

I. Entiers, récurrence

Ex. 1.1 (Cor.) Déterminer les valeurs possibles du chiffre a pour que $999999993a4$ soit divisible par 12.

Ex. 1.2 (Cor.) [*] ***Algorithme d'Euclide***
On rappelle que étant donnés deux entiers a et b positifs distincts non nuls, l'algorithme d'Euclide est le suivant :

- on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$;
- tant que c'est possible - c'est-à-dire tant que $b_n \neq 0$ -, on définit $a_{n+1} = b_n$ et b_{n+1} comme le reste de la division de a_n par b_n ;
- lorsque, pour un certain entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $b_{n_0} = 0$, la valeur de a_{n_0} est le $\text{PGCD}(a;b)$ recherché.

1. Écrire l'algorithme d'Euclide pour $a = 1653$ et $b = 2717$.
2. Montrer que si $n > 0$ alors $a_{n+1} < a_n$ et $b_{n+1} < b_n$ si ces termes sont définis.
3. Montrer que tant que a_n, b_n, a_{n+1} et b_{n+1} sont strictement positifs, $\text{PGCD}\,(a_n; b_n) = \text{PGCD}\,(a_{n+1}; b_{n+1})$
   Remarque : ce type d'égalité entre des quantités calculées à chaque pas d'un algorithme est appelé ***invariant de boucle*** en informatique.
4. En déduire que l'algorithme d'Euclide se termine.
5. Montrer que si $b_n = 0$ alors $a_n = \text{PGCD}(a;b)$.
6. Écrire un code Python permettant étant données deux variables `a` et `b` de calculer leur PGCD.

Ex. 1.3 (Cor.) [*] Soit p un nombre premier supérieur à 4. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Ex. 1.4 (Cor.) [*] Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\text{PGCD}(a;b)\,\text{PPCM}(a;b) \leqslant ab$.

Ex. 1.5 (Cor.) [**] Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\text{PGCD}(a;b)\,\text{PPCM}(a;b) = ab$.

Ex. 1.6 Trouver ***tous*** les entiers naturels x, y tels que
$$\begin{cases} x + y &= 56 \\ \text{PPCM}(x;y) &= 105 \end{cases}.$$

Ex. 1.7 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^x$.
Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de f est la fonction
$$f^{(n)} : x \in \mathbb{R} \mapsto (x+n)e^x$$

Ex. 1.8 On définit les suites u et v par :

- $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n$
- $v_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = n - v_n$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
2. Trouver une formule explicite similaire pour la suite v, et la démontrer.

Ex. 1.9 Pour tout entier $n \geq 3$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par :
« il existe $(u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ tel que $u_1 < u_2 < ... < u_n$ et $1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$. »

1. Analyse du cas $n = 3$: on suppose qu'il existe $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $u_1 < u_2 < u_3$ et $1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}$.
   A. Montrer que $u_1 < 3$. En déduire la valeur de u_1.
   B. Trouver les valeurs de u_2 et u_3.
2. Montrer que $\mathcal{P}(4)$ est vraie et trouver tous les quadruplets qui satisfont cette propriété.
3. Montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

II. Sommes et produits finis

Ex. 1.10 Transformer en utilisant le signe $\sum$ puis simplifier pour $n \in \mathbb{N}$:
$I = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n+1)$
Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Ex. 1.11 (Cor.) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$,
$S_n = 1 \times (n+1) + 2 \times n + 3 \times (n-1) + ... + n \times 2 + (n+1) \times 1$

Ex. 1.12 Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=5}^{30} \frac{k^2 - 2k - 3}{k+1}$.
Indication : on pourra effectuer le changement d'indice $j = k+1$ ou remarquer que $\dfrac{k^2-2k-3}{k+1} = ...$

Ex. 1.13 Simplifier les sommes suivantes (n étant un entier naturel) :

- $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} 2^{k-1}$ • $\displaystyle\sum_{k=-2}^{n} \frac{1}{3^{k+1}}$ • $\displaystyle\sum_{k=-5}^{15} k(10-k)$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$ • $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n-k+1$ • $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n-1} \sin(2k+1)$

Ex. 1.14 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$S_n = \displaystyle\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \min(i;j)$ et $T_n = \displaystyle\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \max(i;j)$.

Ex. 1.15 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Ex. 1.16 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} k}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k} = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$

Ex. 1.17 Calculer et simplifier (pour $n \in \mathbb{N}$) les sommes suivantes :
$I = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ $\qquad J = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times (k!)$

III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

Ex. 1.18 ***Petite formule*** Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

En déduire une expression simplifiée de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}$$

et de

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$$

Ex. 1.19 Simplifier les sommes suivantes : étant donnés un entier naturel n, $p \in [\![0;n]\!]$ et un complexe z

$S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$ $\qquad S_2 = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$ $\qquad S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$

$S_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^n$ $\qquad S_5(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{k+1}(1-z)^{n-k}$

$T_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$

Ex. 1.20 $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant p \leqslant n$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$.

   Indication : on pourra tenter d'utiliser la formule de Pascal pour faire apparaître un télescopage.
   Ou bien faire une démonstration par récurrence.

2. Simplifier la somme $\displaystyle S_n=\sum_{k=0}^{n}k\binom{2n-1}{2n-1-k}$

   puis la fraction $A_n=\dfrac{S_n}{\binom{2n}{n}}$.

Ex. 1.21 Soient $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\dfrac{p+1}{\binom{n+p-1}{p}}-\dfrac{p+1}{\binom{n+p}{p}}=\dfrac{p}{\binom{n+p}{p+1}}$.

2. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}$

   et

   $\displaystyle T_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)(i+3)}$.

Corrections

Cor. 1.1 : Soit $N = 99999999304 + a \times 10$. N doit être divisible par 12 or $99999999300 = 12 \times 25 \times 333333331$. Donc $12|N \Leftrightarrow 12|(10a+4)$.
Deux solutions s'offrent alors :

- comme a est un *chiffre*, $a \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. On essaye toutes les valeurs de a et on montre que $12|(10a+4)$ pour
  - ⋆ $a=2$: $20+4=24=2\times 12$;
  - ⋆ $a=8$: $84=7\times 12$.
- on écrit : $10a+4=(12-2)a+4=12a+4-2a$ est divisible par 12 si et seulement si $4-2a$ l'est. On retrouve à nouveau les deux cas possibles, $a=2$ donne $4-2a=0$ et $a=2+6=8$ donne $4-2a=-12$, de façon plus simple à calculer.

Cor. 1.2 :

1.

a_i	b_i	$a_i = qb_i + r$
1653	2717	$1653 = 0 \times 2717 + 1653$
2717	1653	$2717 = 1 \times 1653 + 1064$
1653	1064	$1653 = 1 \times 1064 + 589$
1064	589	$1064 = 1 \times 589 + 475$
589	475	$589 = 1 \times 475 + 114$
475	114	$475 = 4 \times 114 + 19$
114	19	$114 = 6 \times 19 + 0$
19	0	Impossible

   Le PGCD de 1653 et 2717 est 19.

2. À partir du rang $n=1$, les termes a_n et b_n sont définis par la formule de récurrence $a_n=b_{n-1}$ et b_n est le reste de la division euclidienne de a_{n-1} par b_{n-1} : donc $b_n<b_{n-1}=a_n$.
   De plus, comme $a_{n+1}=b_n$, $a_{n+1}<a_n$.

3. Soit d un diviseur commun de a_n et b_n. $d|a_{n+1}$ puisque $a_{n+1}=b_n$.
   De plus, la division euclidienne $a_n=qb_n+r$ permet d'écrire $r=a_n-qb_n$ qui est donc divisible par d (comme différence de deux nombres divisibles par d).
   Donc d divise $r=b_{n+1}$.
   Donc l'ensemble D_n des diviseurs communs à a_n et b_n est inclus dans l'ensemble D_{n+1} défini de même.
   Réciproquement, en écrivant que $a_n = qa_{n+1}+b_{n+1}$, on montre que $D_{n+1}\subset D_n$.
   Donc $D_n=D_{n+1}$
   et $\mathrm{PGCD}\,(a_n;b_n)=\max D_n=\max D_{n+1}=\mathrm{PGCD}\,(a_{n+1};b_{n+1})$.

4. On a montré que tant que l'algorithme n'est pas terminé $b_n<b_{n-1}$. La suite (b_n) est donc une suite strictement décroissante d'entiers positifs (puisque le reste d'une division euclidienne est positif). Il est donc impossible que cette suite soit infinie (il n'y a qu'un nombre fini d'entiers positifs inférieurs $b_0=b$).
   L'algorithme d'Euclide se termine donc en un nombre fini d'étapes, lorsque le reste de la division euclidienne effectuée dans une boucle est nul.

5. Supposons que $b_n=0$. Alors $a_{n-1}=qb_{n-1}+0$ est multiple de b_{n-1}. Donc $\mathrm{PGCD}\,(a_{n-1};b_{n-1})=\mathrm{PGCD}\,(qb_{n-1};b_{n-1})=b_{n-1}=a_n$.
   Or pour tout n valide $\mathrm{PGCD}\,(a_n;b_n)=\mathrm{PGCD}\,(a;b)$ (c'est un invariant, sa valeur est la même qu'au début de l'algorithme).
   Donc $\mathrm{PGCD}\,(a;b)=a_n$ lorsque $b_n=0$.

6.
```
def euclide(a,b):
    while b>0:
```

```
        a,b=b,a%b
        print(a,b)
    return a
```

Cor. 1.3 : Si p premier est supérieur à 4, en particulier $2 \nmid p$ et $3 \nmid p$. Donc $p = 1+6k$ ou $p = 5+6k$, $k \in \mathbb{N}$ (tous les autres cas donnent un nombre divisible par 2 ou 3).
Donc $p^2-1 = 12k+36k^2 = 12k(1+3k)$ ou $p^2-1 = 24+60k+36k^2 = 24+12k(5+3k)$.
Or si k est pair, alors $12k$ est un multiple de 24.
Et si k est impair, $12(1+3k)$ et $12(5+3k)$ sont des multiples de 24.
Donc p^2-1 est divisible par 24 pour tout nombre premier p supérieur à 4.

Cor. 1.4 : Considérons la fraction $F = \dfrac{ab}{\mathrm{PGCD}(a;b)}$.
D'une part, $F = \dfrac{a}{\mathrm{PGCD}(a;b)} \times b$. Comme $\mathrm{PGCD}(a;b)$ divise a, F est un entier multiple de b et de $a' = \dfrac{a}{\mathrm{PGCD}(a;b)} \in \mathbb{N}$.
D'autre part, $F = \dfrac{b}{\mathrm{PGCD}(a;b)} \times a$. Comme $\mathrm{PGCD}(a;b)$ divise b, F est un entier multiple de a et de $b' = \dfrac{b}{\mathrm{PGCD}(a;b)} \in \mathbb{N}$.
F est donc un multiple de a **et** de b. Par conséquent $\mathrm{PPCM}(a;b)$ qui est ***le plus petit*** des multiples de a **et** de b vérifie

$$\mathrm{PPCM}(a;b) \leqslant F$$

En remplaçant F par sa définition on obtient donc
$\mathrm{PGCD}(a;b)\,\mathrm{PPCM}(a;b) \leqslant ab$

Cor. 1.5 : En reprenant les notations et la démonstration de l'exercice 1.4, on a $F = \dfrac{ab}{\mathrm{PGCD}(a;b)} = k\,\mathrm{PPCM}(a;b)$ pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$.
En posant $G = \dfrac{ab}{\mathrm{PPCM}(a;b)}$, on a donc $G = k\,\mathrm{PGCD}(a;b)$. En particulier, G est un entier.
Or $\mathrm{PPCM}(a;b)$ est un multiple (strictement positif) de a donc il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{PPCM}(a;b) = ia$. De même, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{PPCM}(a;b) = jb$.
Donc $G = \dfrac{ab}{ia} = \dfrac{b}{i}$ divise b et de même $G = \dfrac{ab}{jb} = \dfrac{a}{j}$ divise a.
Or $\mathrm{PGCD}(a;b)$ est le plus grand diviseur commun à a et b donc $\mathrm{PGCD}(a;b) \geqslant G$.
En remplaçant G par sa définition, on obtient donc $\mathrm{PGCD}(a;b)\,\mathrm{PPCM}(a;b) \geqslant ab$.
Le résultat de l'exercice 1.4 permet alors de conclure que
$\mathrm{PGCD}(a;b)\,\mathrm{PPCM}(a;b) = ab$.

Cor. 1.11 : Le premier travail à faire est d'exprimer cette somme à l'aide d'un signe $\sum$:
$S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i(n+2-i)$
Ensuite, on utilise les différentes techniques du cours. Par exemple :

$$\begin{aligned} S_n &= (n+2)\sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = (n+2)\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= (n+1)(n+2)\frac{3n+6-2n-3}{6} \\ &= \binom{n+3}{3} \end{aligned}.$$