Logique, ensembles, applications

I. Éléments de logique

Ex. 2.1 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Écrire chacune d'elles comme une implication.

1. Une condition suffisante pour qu'un nombre réel soit supérieur ou égal à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
2. Une condition nécessaire pour qu'un nombre entier soit strictement supérieur à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
3. Pour qu'un nombre réel soit strictement supérieur à 2, il faut que son carré soit strictement supérieur à 4.

Ex. 2.2 [∗] Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+$ tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels. Montrer (par l'absurde) que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est aussi irrationnel.

Ex. 2.3 [∗] On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

Ex. 2.4 [∗] On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une. Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intrus en trois pesées ?

II. Ensembles et quantificateurs

Ex. 2.5

1. Donner une définition par compréhension puis comme image directe de l'ensemble I des entiers relatifs impairs.
2. Donner une définition symbolique des ensembles suivants :
   - $E = \{-28; -21; -14; -7; 0; 7; 14; 21; 28; 35\}$
   - $F = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100\}$

Ex. 2.6 Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E. Prouver les égalités suivantes :
$\bullet \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\bullet \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\bullet A \cup B = (A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)$

Ex. 2.7 Donner comme réunion d'intervalles les parties de $\mathbb{R}$ constituées des valeurs de x vérifiant les assertions suivantes :

1. $(x > 0 \textbf{ et } x < 1) \textbf{ ou } x = 0$;
2. $x > 3 \textbf{ et } x < 5 \textbf{ et } x \neq 4$;
3. $(x \leqslant 0 \textbf{ et } x > 1) \textbf{ ou } x = 4$;
4. $x \geqslant 0 \Rightarrow x > 3$.

III. Applications et fonctions

Ex. 2.8 Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x^2 - x - 1 \end{array} \right.$$

et calculer $\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\mathrm{d}x$.

Ex. 2.9 [∗] Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1;1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$.
Montrer que f est bijective et donner une expression de sa bijection réciproque.

Ex. 2.10 (Cor.) [∗] L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array} \right.$ est-elle injective ? surjective ?

Ex. 2.11 [∗] ***ENAC 2023, 5 premières questions***

1. Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :
   - A. La négation de $(\exists x \in E, A(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, A(x))$ est :
   $$(\exists x \in E, A(x)) \wedge (\exists x \in E, \neg A(x))$$
   - B. La négation de $(\exists x \in E, A(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, A(x))$ est :
   $$(\exists x \in E, A(x)) \vee (\exists x \in E, \neg A(x))$$
   - C. La négation de $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leqslant N$ est :
   $$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N$$
   - D. La négation de $\exists! x \in \mathbb{R}, x = x^2$ est $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq x^2$.
   - E. Aucune assertion n'est vraie.
2. Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :
   - A. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$
   - B. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$
   - C. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$
   - D. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$
   - E. Aucune assertion n'est vraie.
3. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et les assertions P, Q, R suivantes :
   $$P : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$$
   $$Q : (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$$
   $$R : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \vee \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$$
   $\neg P$ désigne la négation de P. Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :
   - A. $\neg R \Rightarrow Q$
   - B. $\neg Q \Rightarrow \neg P$
   - C. $\neg P \Rightarrow \neg R$
   - D. $Q \Rightarrow R$
   - E. Aucune assertion n'est vraie.
4. Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :
   - A. Une restriction au départ d'une fonction injective est une fonction injective.
   - B. Une restriction au départ d'une fonction surjective est une fonction surjective.
   - C. Un prolongement au départ d'une fonction injective est une fonction injective.
   - D. Un prolongement au départ d'une fonction surjective est une fonction surjective.
   - E. Aucune assertion n'est vraie.
5. Soient f et g les deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par : $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $g(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair, et $g(n) = 0$ sinon.
   - A. f est bijective
   - B. g est bijective
   - C. $f \circ g$ est bijective
   - D. $g \circ f$ est bijective
   - E. Aucune assertion n'est vraie.

IV. Équations et systèmes

Ex. 2.12 Vrai ou faux ?

1. Quel que soit la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, l'équation $mx = m$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution.
2. Le système d'équations $\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2} - x - \frac{3y}{2} & = & 0 \\ 5(x+y) + 3 & = & 8 - 5x - 10y \end{array} \right.$ est équivalent à la seule équation $2x + 3y = 1$.

Ex. 2.13 Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x :

(a) $(3x+2)(x+1) = -\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

(b) $(2x+1)(x-3)(x+2) - (2x+1)(x-7) = 0$

(c) $\ln(x+1) - \ln(1-x) = \ln 2$

Ex. 2.14 Résoudre l'équation d'inconnue réelle x et de paramètre réel m :

$(m+1)x + 3 = 2mx + m^2 + 2m.$

Ex. 2.15 Résoudre le système suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} z-y &=& 1 \\ x-az &=& 2 \\ ay-x &=& 3 \end{array}\right.$$

Ex. 2.16 Donner la nature et si possible une équation paramétrique de l'ensemble des solutions des systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$:

$$S_1 : \left\{\begin{array}{rcl} 3x-y+2z &=& 5 \\ -8x+3y+z &=& 1 \end{array}\right. \qquad S_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 1 \\ 2x+2y-z &=& 3 \end{array}\right.$$

Ex. 2.17

1. Résoudre et discuter suivant la valeur de $a, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ le système

$$S_3 : \left\{\begin{array}{ccccccc} ax &+& y &+& z &=& \alpha \\ x &+& ay &+& z &=& \beta \\ x &+& y &+& az &=& \gamma \end{array}\right.$$

2. Généraliser le résultat à un système de 4 équations à 4 inconnues, 5 équations à 5 inconnues, etc..., n équations à n inconnues.

Ex. 2.18 [*] Résoudre avec $\forall i \in [\![1;n]\!]\,, a_i \in \mathbb{R}^*$ et $s \in \mathbb{R}$ le système d'inconnues $x_1, ..., x_n$ réelles suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \dfrac{x_1}{a_1} &=& \dfrac{x_2}{a_2} &=& \cdots &=& \dfrac{x_n}{a_n} \\ x_1 &+& \cdots &+& x_n &=& s \end{array}\right.$$

Corrections

Cor. 2.10 : L'application n'est ni injective, ni surjective.
En effet, $f(1,2) = (3,2) = f(2,1)$ donc l'application n'est pas injective.
De plus, montrons qu'il n'existe pas de couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x+y=0$ et $xy=1$. Comme le produit $xy \neq 0$, x et y sont non nuls. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ xy=1 & & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ y &=& \frac{1}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+\frac{1}{x} &=& 0 \\ y &=& \frac{1}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+1 &=& 0 \\ y &=& \frac{1}{x} \end{array}\right.$$

Or l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solutions réelles, donc f n'est pas surjective.