Sommes finies

Exercice 1.

Soit n un entier naturel. Pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$ on définit les fonctions

$$B_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^{n-k}$$

Par exemple, pour $n = 2$ et $x \in \mathbb{R}$, on a ainsi défini

$$B_0(x) = (1-x)^2, B_1(x) = 2x(1-x) \quad \text{et} \quad B_2(x) = x^2$$

1) Dans cette question ***uniquement***, on suppose que $n = 3$.
   a) Donner l'expression des quatre fonctions B_0, B_1, B_2 et B_3.
   b) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, la somme $S(x) = B_0(x) + B_1(x) + B_2(x) + B_3(x)$.
2) Dans la suite de l'exercice, n est un ***entier naturel quelconque***.
   a) Simplifier, pour tout réel x, la somme $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_k(x)$.
   b) Montrer que $\forall k \in [\![0;n]\!], \forall x \in [0;1], B_k(x) \geqslant 0$.
   c) Déduire des deux questions précédentes que $\forall k \in [\![0;n]\!], \forall x \in [0;1], B_k(x) \leqslant 1$.
3) Montrer que pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, on a

$$k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$$

4) Montrer que, pour tout réel x,

$$\sum_{k=1}^{n} k B_k(x) = nx$$

5) En prenant pour x une valeur bien choisie dans $[0;1]$, déduire de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n 2^{n-1}$$

6) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 2^{k-1} = n 3^{n-1}$$

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n, on définit :

$$S_n = 1 \times (2n-1) + 2 \times (2n-3) + 3 \times (2n-5) + ... + n \times 1$$

$$T_n = n \times n + (n-1) \times (n+1) + ... + 1 \times (2n-1)$$

$$U_n = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) a) Donner une expression de S_n à l'aide du signe $\sum$.

   b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) a) Donner une expression de T_n à l'aide du signe $\sum$.

   b) Simplifier T_n.

3) a) Donner une expression de U_n à l'aide du signe $\sum$.

   b) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 4$, $\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k \\ 4 \end{pmatrix}$.

   c) À l'aide de la question précédente, montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$

$$U_n = \begin{pmatrix} n+1 \\ 4 \end{pmatrix}$$