Correction DM n°1

Exercice 1.

Soit n un entier naturel. Pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$ on définit les fonctions

$$B_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

1) Dans cette question ***uniquement***, on suppose que $n = 3$.

   a) Pour $n = 3$, on a, pour tout réel x :
   $B_0(x) = (1-x)^3 \quad B_1(x) = 3x(1-x)^2 \quad B_2(x) = 3x^2(1-x) \quad B_3(x) = x^3$.

   b) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $S(x) = B_0(x) + B_1(x) + B_2(x) + B_3(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^k(1-x)^{3-k} = (x+1-x)^3$ d'après la formule du binôme de Newton.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(x) = 1$.

2) Dans la suite de l'exercice, n est un ***entier naturel quelconque***.

   a) Soit x un réel.
   $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n$ en reconnaissant à nouveau la formule du binôme de Newton.
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, S_n(x) = 1$.

   b) Soit $k \in [\![0;n]\!]$ et $x \in [0;1]$.
   $B_k(x) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$: or
   $\binom{n}{k} \geqslant 1 > 0$
   $x \geqslant 0$ donc $x^k \geqslant 0$
   et $x \leqslant 1$ donc $1 - x \geqslant 0$, d'où $(1-x)^{n-k} \geqslant 0$.
   $B_k(x)$ est donc le produit de trois facteurs positifs : $B_k(x) \geqslant 0$.

   c) Soit $k \in [\![0;n]\!]$ et $x \in [0;1]$.
   D'après la question 2)a), $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} B_j(x) = 1$.
   Donc $B_k(x) = 1 - \displaystyle\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} B_j(x)$.
   Or, d'après la question 2)b), pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, $B_j(x) \geqslant 0$.
   Donc $-\displaystyle\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} B_j(x) \leqslant 0$.
   On en déduit que, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ et tout $x \in [0;1]$, $B_k(x) \leqslant 1$.

3) Soit $k \in [\![1;n]\!]$, on a
$k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$
Donc $k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$.
Remarque : cette formule n'est valable que pour $k \geqslant 1$, car, pour $k = 0$, $(-1)!$ ***n'est pas défini***.

4) Soit x un réel.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kB_k(x) = \sum_{k=1}^{n} k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}$ d'après la question précédente.
Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1} n\begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} x^{j+1}(1-x)^{n-j-1}$ en effectuant le changement d'indice $j = k-1$.
Donc
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kB_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} n\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} x^{k+1}(1-x)^{n-k-1} = nx\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-1-k}$
Finalement, en reconnaissant à nouveau la formule du binôme, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} kB_k(x) = nx(x+1-x)^{n-1} = nx$$

Remarque : pour $n = 0$, la formule reste valable car la somme du membre de gauche est vide donc nulle, et $nx = 0$ aussi.

5) Utilisons le résultat de la question précédente pour $x = \dfrac{1}{2}$ et n un entier positif.
On a :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kB_k(1/2) = \sum_{k=1}^{n} k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.
D'après la question précédente, on a aussi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kB_k(1/2) = \frac{n}{2}$.
En identifiant les deux résultats précédents, on obtient donc
$\displaystyle\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n}{2}$.
En multipliant cette dernière identité par 2^n, on a bien démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n2^{n-1}$$

6) On fait le même raisonnement qu'à la question précédente, mais cette fois en évaluant en $x = \dfrac{2}{3}$.
Alors :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kB_k(2/3) = \sum_{k=1}^{n} k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{2^k}{3^k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \frac{1}{3^n}\sum_{k=1}^{n} k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 2^k$.
Or d'après la question 4), on a aussi
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kB_k(2/3) = \frac{2n}{3}$.

En identifiant les deux résultats et en multipliant par $\frac{3^n}{2}$, on obtient bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} 2^{k-1} = n3^{n-1}$$

Exercice 2.

1) a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(2n+1-2k)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} k(2n+1-2k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(2n+1) - 2\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= (2n+1)\frac{n(n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n(n+1)(2n+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

2) a) $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(n+k)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(n+k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} n^2 - k^2 \\ &= n \times n^2 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= n \times \left(\frac{6n^2 - 2n^2 + 2n + n - 1}{6}\right) \\ &= n \times \frac{4n^2 + 3n - 1}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \end{aligned}$$

3) a) $U_n = \sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3}$.

b) Soit k un entier supérieur ou égal à 4.

D'après la formule de Pascal, $\binom{k}{3} + \binom{k}{4} = \binom{k+1}{4}$.

Donc

$$\binom{k}{3} = \binom{k+1}{4} - \binom{k}{4}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3} \\
&= \binom{3}{3} + \sum_{k=4}^{n} \binom{k}{3} \\
&= 1 + \sum_{k=4}^{n} \binom{k+1}{4} - \binom{k}{4} \\
&= 1 + \binom{n+1}{4} - \binom{4}{4} \qquad \text{par télescopage} \\
&= \binom{n+1}{4}
\end{aligned}$$

On a donc bien,

$$U_n = \binom{n+1}{4}$$