Maths - Chapitre 3

Nombres complexes

I. Définitions

Axiome 3.1

Il existe un nombre i ayant la propriété $i^2 = -1$.

Remarque

$i \notin \mathbb{R}$ puisque le carré de tout nombre réel est positif.

Définition 3.2

On appelle ***nombre imaginaire*** le produit de i par un nombre réel et ***nombre complexe*** la somme d'un nombre réel et d'un nombre imaginaire.
Autrement dit, ***un nombre complexe*** z ***peut toujours s'écrire sous la forme***

$$z = a + ib, \text{ où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

Cette écriture est appelée ***forme algébrique*** du nombre complexe.

Notation

On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble $i\mathbb{R} = \{ib, b \in \mathbb{R}\}$ des nombres imaginaires.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{C} = \{a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ des nombres complexes.
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on note $a = a + 0i$ (réel pur), $ib = 0 + ib$ (imaginaire pur) et $0 = 0 + 0i$.
On peut donc écrire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

Axiome 3.3

L'addition et la multiplication des nombres complexes vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication des nombres réels, à ceci près que

$$i^2 = \ldots$$

En particulier, les techniques de calcul des sommes finies du chapitre 1 restent valables pour des familles de nombres complexes, tout comme les identités remarquables.

Ex. 3.1 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique (a et b sont des nombres réels, n un entier naturel) :

$A = i^3$ $\quad B = i^4$ $\quad C = i^5$ $\quad D = i^n$

$E = (1 + 2i) \times \dfrac{3 + 4i}{5}$ $\quad F = (a + ib)(a - ib)$ $\quad G = (1 - i)^4$ $\quad H = \dfrac{a + ib}{6 - 8i}$

Ex. 3.2 Simplifier les expressions suivantes (a et b sont des nombres réels) :

$A = (1 + i)^2$ $\quad B = (1 + i)^4$ $\quad C = (2 + i)(3 - i)$ $\quad D = (1 + i)^2 + (1 - i)^2$

$E = (1 + i)(1 - i)$ $\quad F = (3 - 4i)(3 + 4i)$ $\quad G = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2} \times (a + ib)$ $\quad H = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^6$

Définition 3.4

Étant donné un nombre complexe $z = a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ on appelle

- ***conjugué*** de z le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$;
- ***module*** de z le nombre réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$;
- ***partie réelle*** de z le nombre réel $\mathcal{R}e\,(z) = a = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$;
- ***partie imaginaire*** de z le nombre **réel** $\mathcal{I}m\,(z) = b = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

Propriété 3.5

Quels que soient $z, z' \in \mathbb{C}$ on a :

1) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
2) $\overline{-z} = -\bar{z}$
3) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
4) Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
5) $\bar{\bar{z}} = z$
6) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
7) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$
8) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
9) $z\bar{z} = |z|^2$
10) Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
11) $|\bar{z}| = |z| = |-z|$
12) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
13) Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Méthode : Parties réelles et imaginaires

Pour obtenir la partie réelle ou la partie imaginaire d'un nombre complexe, les formules $\mathcal{R}e\,(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ et $\mathcal{I}m\,(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ peuvent s'avérer ***extrêmement efficaces***.

Pour montrer qu'un nombre complexe z est réel, on montre que $\mathcal{I}m\,(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i} = 0$ c'est-à-dire que $\bar{z} = z$.

Pour montrer qu'un nombre complexe z est imaginaire, on montre que $\mathcal{R}e\,(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2} = 0$ c'est-à-dire que $\bar{z} = -z$.

Ex. 3.3 On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$. Montrer que $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Cor. 3.3

Théorème 3.6 (Première inégalité triangulaire)

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 3.7 (Seconde inégalité triangulaire)

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Définition 3.8

On appelle ***affixe*** du point $M(a;b)$ ou du vecteur $\vec{u}(a;b)$ le nombre complexe $z = a + ib$.

Notation

Étant donnés $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note :
$\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ le ***disque ouvert de centre*** z_0 ***et de rayon*** r ***;***
$\overline{\mathcal{D}}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leqslant r\}$ le ***disque fermé de centre*** z_0 ***et de rayon*** r ***;***
$\mathcal{C}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$ le ***cercle de centre*** z_0 ***et de rayon*** r***.***
Notamment, $|z - z_0|^2 = r^2$ est ***une équation cartésienne du cercle de centre*** $C(z_0)$ ***et de rayon*** r.

Ex. 3.4 Donner une équation cartésienne du cercle de centre $A(3; -1)$ et de rayon 3.

Cor. 3.4

Propriété 3.9 ($\mathbb{R}$-linéarité des parties réelle et imaginaire)

Les fonctions $\mathcal{R}e : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{I}m : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$-***linéaires*** c'est-à-dire

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} \mathcal{R}e\,(\lambda z_1 + \mu z_2) & = & \lambda \mathcal{R}e\,(z_1) + \mu \mathcal{R}e\,(z_2) \\ \mathcal{I}m\,(\lambda z_1 + \mu z_2) & = & \lambda \mathcal{I}m\,(z_1) + \mu \mathcal{I}m\,(z_2) \end{cases}$$

« ***Essentiellement, les calculs avec les nombres complexes suivent les mêmes règles que ceux avec les nombres réels*** ».

- $0 \in \mathbb{C}$: il existe un ***élément neutre pour l'addition*** vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C}, z + z' = 0$: tout complexe possède un ***symétrique*** pour l'addition
  z' est noté $-z$ et appelé ***opposé*** de z
- $\forall(z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' = z' + z$: l'addition complexe est ***commutative***
- $\forall(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') + z'' = z + (z' + z'') = z + z' + z''$: l'addition complexe est ***associative***
- $1 \in \mathbb{C}$: il existe un ***élément neutre pour la multiplication*** vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, z \times 1 = 1 \times z = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z' \in \mathbb{C}^*, z \times z' = 1$: tout complexe non nul possède un ***symétrique*** pour la multiplication
  z' est noté $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ et appelé ***inverse*** de z
- $\forall(z, z') \in \mathbb{C}^2, z \times z' = z' \times z$: la multiplication complexe est ***commutative***
- $\forall(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'') = zz'z''$: la multiplication complexe est ***associative***
- $\forall(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$: la multiplication complexe est ***distributive*** sur l'addition complexe

Définition 3.10 (Structure de corps)

Pour résumer l'ensemble de ces propriétés, on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un ***corps*** : cela signifie très exactement que ***l'ensemble des nombres complexes possède une addition et une multiplication internes*** qui vérifient les propriétés que nous venons de donner.

II. Nombres complexes de module 1

Notation

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, autrement dit
$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$
$\mathbb{U}$ a notamment pour éléments 1, i, -1 et $-i$.

Propriété 3.11

L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 vérifie les propriétés :
- le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est un élément de $\mathbb{U}$;
- il existe dans $\mathbb{U}$ un élément neutre pour la multiplication (c'est 1) ;
- tout élément de $\mathbb{U}$ possède un inverse dans $\mathbb{U}$;
- la multiplication est commutative et associative.

Définition 3.12

On résume les propriétés précédentes en disant que $(\mathbb{U}, \times)$ est un ***groupe commutatif***.

Proposition 3.13

Tout nombre complexe non nul s'écrit de façon unique comme produit d'un réel strictement positif et d'un nombre complexe de module 1 :
$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists!(r, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}, z = ru.$

Ex. 3.5 Écrire les nombres complexes suivantes sous la forme ru où $r \in \mathbb{R}_+$ et $u \in \mathbb{U}$:
$A = 3 + 3i \qquad B = -3 - 3i \qquad C = -3 + 4i \qquad D = 12 - 5i$

Proposition 3.14 (Existence des arguments)

Pour tout élément u de $\mathbb{U}$, il existe une infinité de valeurs $\theta \in \mathbb{R}$ telles que $u = \cos\theta + i\sin\theta$. De plus, deux quelconques de ces valeurs diffèrent d'un multiple entier de 2π.

Définition 3.15 (Arguments d'un nombre complexe non nul)

Les deux propositions précédentes nous permettent d'affirmer que
$\forall z \in \mathbb{C}, \exists!\rho \in \mathbb{R}_+, \exists\theta \in \mathbb{R}, z = \rho\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$
Cette écriture est appelée ***forme trigonométrique de*** z dans laquelle ρ est le module de z et θ est ***un argument*** de z.

Définition 3.16 (Argument principal)

Pour un nombre complexe non nul, la proposition 3.14 affirme l'existence d'une infinité d'arguments, différant entre eux d'un multiple entier de 2π.
On dit que l'argument est défini ***à** 2π **près*** ou encore ***modulo*** 2π.
On appelle ***argument principal*** l'unique argument compris dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Notation

On note $\arg(z)$ tout argument d'un nombre complexe non nul et $\mathrm{Arg}(z)$ l'argument principal de z. Pour signifier que $\arg(z)$ est défini à 2π près, on écrira
$\arg(z) \equiv \mathrm{Arg}(z)\,[2\pi]$ qui se lit « tout argument de z est **congru** à son argument principal modulo 2π » ***ce qui équivaut à*** $\exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$.

Notation

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \in \mathbb{U}$.
$\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$, on note e^z le nombre complexe $e^z = e^a e^{ib} \in \mathbb{C}^*$.

Propriété 3.17 (Propriétés de l'exponentielle complexe)

$\forall(\theta;\theta') \in \mathbb{R}^2$, $\forall(z;z') \in \mathbb{C}^2$:

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\begin{aligned} e^{i\theta} = 1 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \theta \equiv 0\,[2\pi] \end{aligned}$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'\,[2\pi]$

- $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$
- $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $\dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$
- $\begin{aligned} e^z = 1 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi \\ &\Leftrightarrow z \equiv 0\,[2i\pi] \end{aligned}$
- $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z \equiv z'\,[2i\pi]$

Important !

Il n'existe pas de logarithme complexe !

Corollaire 3.18

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\,[2\pi]$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\,[2\pi]$

Méthode : Obtention de la forme trigonométrique d'un complexe non nul

La démonstration de la proposition 3.14 fournit une méthode pour l'obtention de la forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul :

1) on commence par calculer $r = |z|$ puis on écrit z sous la forme $z = ru$ où u est de module 1 ;
2) on cherche ensuite $\phi \in [0;\pi]$ tel que $\mathcal{R}e\,(u) = \cos(\phi)$; on verra au chapitre 6 comment obtenir cette valeur dans le cas général.
3) enfin, si $\mathcal{I}m\,(u) \geqslant 0$ alors $\theta = \mathrm{Arg}(z) = \phi$,

sinon $\mathcal{I}m\,(u) < 0$ et $\theta = \operatorname{Arg}(z) = -\phi$.

On en conclut que $z = |z|e^{i\theta}$.
Il est fréquent que l'on utilise en physique une méthode similaire faisant intervenir la fonction Arctan et le signe de $\mathcal{R}e\,(z)$ (voir chapitre 6).

Ex. 3.6 Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :
$A = 3 + 3i \qquad B = -3 - 3i \qquad C = -3 + \sqrt{3}i \qquad D = 1 - \sqrt{3}i$

Ex. 3.7 On pose $z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
Calculer z^2 et en déduire la valeur de $\Theta = \operatorname{Arg}(z)$.

Cor. 3.7

Ex. 3.8 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E) \ : \ \bar{z} = z^3$$

Cor. 3.8

III. Utilisations en trigonométrie

Proposition 3.19 (Formules d'Euler)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ qui s'écrit aussi $e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ qui s'écrit aussi $e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

Proposition 3.20 (Formule de Moivre)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ qui s'écrit aussi $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Ex. 3.9 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $A = \left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{-1+i}\right)^{50}$.

Cor. 3.9

```
>>> ((1-(3**0.5)*1j)/(-1+1j))**50
(29058990.52155743-16777215.999999903j)
```

Méthode : Somme de deux complexes de même module

Pour écrire sous forme trigonométrique la somme de deux complexes de même module, on « ***factorise par l'angle moitié*** » :
$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{i\frac{-\theta+\theta'}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.

Il s'agit de la forme trigonométrique si $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) > 0$. Sinon, on obtient la forme trigonométrique en écrivant $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\pi}$ avec $-\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \geqslant 0$.

Ex. 3.10 Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $z = 1 + e^{i\theta}$ et $Z = 1 - e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi;\pi]$.

Cor. 3.10

Méthode : Développement de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en polynômes trigonométriques

Pour obtenir pour tout entier n et tout réel x les expressions de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ on utilise la formule 3.20 de Moivre et la formule du binôme de Newton.

Ex. 3.11 Écrire pour x réel $\cos(3x), \sin(3x), \cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Cor. 3.11

Méthode : Linéarisation des polynômes trigonométriques

Réciproquement, pour transformer, pour $x \in \mathbb{R}$, des produits de $\cos x$ et $\sin x$ en sommes de cosinus et de sinus d'un multiple entier de x, on utilise les formules 3.19 d'Euler et la formule du binôme de Newton.

Ex. 3.12 Linéariser $\cos^2(x)$, $\cos(x)\sin(x)$, $\sin^2(x)$, $\cos^3(x)$, $\sin^3(x)$, $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a)\sin(b)$.

Cor. 3.12

Méthode : Factorisation de certaines sommes trigonométriques

Une expression faisant intervenir une somme de fonctions trigonométriques peut parfois être simplifiée en écrivant $\cos x$ et $\sin x$ comme parties réelle et imaginaire de e^{ix} puis en factorisant l'expression obtenue.

Ex. 3.13 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$

et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

Cor. 3.13

Ex. 3.14 Factoriser pour $p, q \in \mathbb{R}$, $A = \cos(p) + \cos(q)$ et $B = \sin(p) - \sin(q)$.

Cor. 3.14