Nombres complexes

I. Conjugué, module, parties réelle et imaginaire

Ex. 3.1 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :
$A = \dfrac{1}{2-i}$ $\quad B = (1+i)^9$ $\quad C = \dfrac{7+3i}{5-2i}$ $\quad D = (1+2i)^{-3}$

Ex. 3.2 Soit z un nombre complexe différent de i.
Montrer que $Z = \dfrac{iz-1}{z-i}$ ***est bien défini*** et que $Z \neq i$.

Ex. 3.3 Soit $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$

Ex. 3.4 Montrer que si z_1 et z_2 sont des complexes de module inférieur ou égal à 1 alors $|z_1+z_2| \leq \sqrt{2}$ ou $|z_1 - z_2| \leq \sqrt{2}$.

Ex. 3.5 Soit z un nombre complexe de module 1, différent de -1.
Montrer que $u = \dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{2}$ est bien défini et que $u \in i\mathbb{R}$.

II. Trigonométrie

Ex. 3.6 Écrire sous la forme trigonométrique les complexes suivants :
$z_1 = -3$ $\quad z_2 = -3i$ $\quad z_3 = -2+2i$ $\quad z_4 = \sqrt{3} - i$ $\quad z_5 = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) - i$

Ex. 3.7 Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $a = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ et $b = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$.

1. Montrer que $\bar{a} = b$ puis calculer $a+b$ et ab.
2. En déduire a et b.

Ex. 3.8 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Écrire $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
2. En prenant $\theta = \frac{\pi}{5}$, déduire de la question précédente la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
3. Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}$.

Ex. 3.9 Linéariser les polynômes trigonométriques :
$A(x) = \sin^5 x$ $\quad B(x) = \cos^3 x \sin^2 x$ $\quad C(x) = \cos^6 x$

Ex. 3.10 Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Ex. 3.11 [**] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $D_n : x \in [-\pi;\pi] \mapsto 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$ et $F_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$.

1. Que vaut $D_n(0)$?
2. Montrer que pour tout $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$,
$$D_n(x) = 2\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 1.$$
3. En déduire que pour tout $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$,
$$D_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
4. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$?
5. Montrer que pour tout $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$,
$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$
6. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0} F_n(x)$?

III. Divers

Ex. 3.12 Soit z un nombre complexe et $Z = 1 + z + z^2$.
Montrer que $Z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$ ou $\mathcal{R}e\,(z) = \frac{-1}{2}$.

Ex. 3.13 Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant j \leqslant n} \binom{k}{j}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} (-1)^j \binom{k}{j}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n \\ j \texttt{ pair}}} \binom{k}{j}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n \\ j \texttt{ impair}}} \binom{k}{j}$.

Ex. 3.14 Soit z un nombre complexe et n un entier strictement positif.
Simplifier la somme

$$A_n = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} z^j$$

en distinguant les cas $z = 1$ et $z \neq 1$.

Ex. 3.15

1. Soient k un entier naturel non nul et $p \in [\![0; k-1]\!]$.
   Montrer que $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.
2. En déduire une expression simplifiée de

$$S_{n,p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$$

Ex. 3.16 Résoudre les systèmes suivants d'inconnues ***complexes*** :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} (1+i)x & + & y & = & 2i \\ ix & + & (1+i)y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & iy & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Ex. 3.17 Résoudre et ***discuter suivant la valeur du paramètre*** a ***complexe*** le système suivant d'inconnues $(x; y; z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 1 \\ & & ay & + & z & = & 1 \\ x & & & + & az & = & 1+i \end{array}\right.$$

Ex. 3.18 Soit $h : \left\{\begin{array}{l} H \to D \\ z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}\right.$ où $H = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{I}m\,(z) > 0\}$,
$D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

1. Justifier rapidement que h est bien définie sur H.
2. Soit $z \in H$. Montrer que $h(z) \in D$.
3. Soit $Z \in D$. Montrer qu'il existe $z \in H$ tel que $Z = h(z)$.
4. Que peut-on déduire des deux questions précédentes concernant l'application h ?
5. Soit $z \in H$ et $z' \in H$ tels que $h(z) = h(z')$.
   Montrer que $z = z'$.
6. Que peut-on déduire de la question précédente concernant l'application h ?
7. Montrer que h est une bijection de H vers D et donner l'expression de sa bijection réciproque.
   Espace de départ. Espace d'arrivée. Animation de la transformation.

Corrections