Maths - Chapitre 4

Techniques de calcul différentiel

I. Inégalités dans $\mathbb{R}$

I.1. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est, comme l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, muni d'une relation d'ordre totale $\leqslant$. Cette relation est ***compatible avec les opérations du corps*** $(\mathbb{R}, +, \times)$:

Définition 4.1 (Compatibilité de la relation d'ordre avec les opérations)

La relation d'ordre $\leqslant$ vérifie les propriétés suivantes, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

- compatibilité avec l'addition : $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$;
- compatibilité avec la multiplication : $(x \leqslant y$ et $0 \leqslant z) \Rightarrow x \times z \leqslant y \times z$.

Elle est dite ***compatible avec les opérations du corps*** $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Ex. 4.1 Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Cor. 4.1

Remarque

L'exemple précédent montre que des notions comme celle de croissance d'une fonction ne sont pas définies pour les fonctions à valeurs complexes. Il s'ensuit que certains théorèmes se généralisent mal - ou pas du tout - à de telles fonctions.

Il convient donc de bien comprendre d'emblée qu'il existe une différence fondamentale entre $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, même si certaines généralisations sont possibles.

Propriété 4.2

Si x et y sont deux réels, alors

$$x \leqslant y \Leftrightarrow -x \geqslant -y \qquad xy \geq 0 \Leftrightarrow (x \text{ et } y \text{ ont même signe}) \qquad x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} \text{ ont même signe}$$

$$0 < x \leqslant y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} \qquad 0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant y^2$$

Démonstration

Remarque

On peut reformuler les propriétés

$x \leqslant y \Leftrightarrow -x \geqslant -y \qquad 0 < x \leqslant y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} \qquad 0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant y^2$

de la façon suivante :

- $x \in \mathbb{R} \mapsto -x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$;
- $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Attention cependant :

- $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x}$ ***n'est pas décroissante*** sur $\mathbb{R}_*$ puisque $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{1}$;
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est ***décroissante*** sur $\mathbb{R}_-$.

I.2. Bornes et extremums d'une partie

Les notions de majorant, minorant, bornes, maximum, minimum et extremums vues pour les entiers au chapitre 1 se généralisent à $\mathbb{R}$ puisqu'il est totalement ordonné. Notamment :

Proposition 4.3 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

Ex. 4.2 Quels sont les majorants et les minorants de $\mathbb{R}_+$? de $\mathbb{R}_-$?

Cor. 4.2

Ex. 4.3 $[0; 1[$ admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? Mêmes questions pour $\mathbb{R}_-$.

Cor. 4.3

Ex. 4.4 Soit $E = \left\{ y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, y = x + \dfrac{1}{x} \right\}$.
E est-il minoré ? Possède-t-il un minimum ?

Cor. 4.4

I.3. Valeur absolue

Définition 4.4

Pour tout réel x, on appelle ***valeur absolue de*** x le maximum de x et de $-x$.

Notation

On note $|x| = \max\{x; -x\}$ la valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$.

Les propriétés de la proposition suivante sont laissées à titre d'exercice.

Proposition 4.5 (Propriétés élémentaires de la valeur absolue)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
- $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
- $|x-y| = r \Leftrightarrow (x = y - r$ ou $x = y + r)$
- $|x| = x \Leftrightarrow x \geqslant 0$
- $|xy| = |x| \times |y|$
- si $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$
- $|x| \leqslant r \Leftrightarrow (-r \leqslant x \leqslant r)$
- $|x| < r \Leftrightarrow (-r < x < r)$
- $|x| \geqslant r \Leftrightarrow (x \geqslant r$ **ou** $x \leqslant -r)$
- $|x| = r \Leftrightarrow (x = r$ ou $x = -r)$
- $|x-y| \leqslant r \Leftrightarrow (y - r \leqslant x \leqslant y + r)$
- $|x| = -x \Leftrightarrow x \leqslant 0$
- si $x \neq 0$, $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|}$

Proposition 4.6 (Inégalités triangulaires)

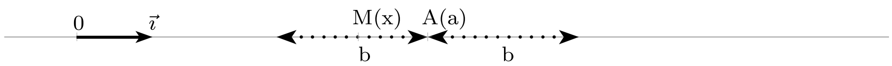
Soit x et y des réels. Alors

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \qquad \text{et} \qquad ||x| - |y|| \leqslant |x-y|$$

Démonstration

Remarque

- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$. De plus, si $r \geq 0$, alors
  $|x| \leqslant r \Leftrightarrow x^2 \leqslant r^2$ et
  $|x| \geqslant r \Leftrightarrow x^2 \geqslant r^2$.
- On rapporte la droite réelle à un repère $(O; \vec{\imath})$. Pour deux réels x et y, la valeur absolue $|y-x|$ s'interprète géométriquement comme la distance entre les points $M(x)$ et $N(y)$: $MN = |y-x|$. Étant donnés deux réels a et b, l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x-a| \leqslant b$ d'inconnue x s'interprète donc géométriquement comme l'ensemble des points $M(x)$ dont la distance au point $A(a)$ est inférieure à b.



Ex. 4.5 Résoudre les inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $(x+5)(2x-1) \leq (3x-7)(2x-1)$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} > \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

Cor. 4.5

Ex. 4.6 Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.

Cor. 4.6

Ex. 4.7 Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x : $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| > 3$.

Cor. 4.7

Ex. 4.8 (Cor.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité $|x+1|+|x-3|<6$.

Ex. 4.9 (Cor.) [$*$] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) \leqslant g(x)+g(y)$$

I.4. Partie entière d'un nombre réel

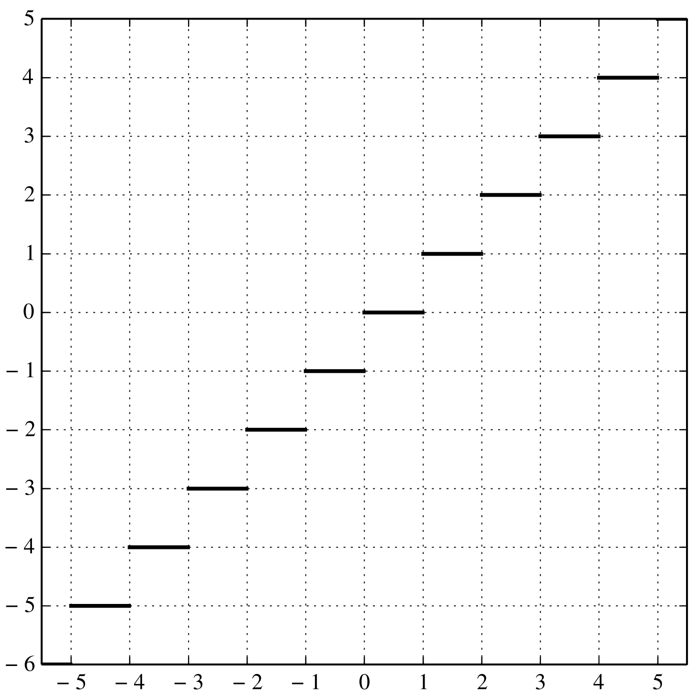
Définition 4.7

Pour tout réel x, on appelle ***partie entière de*** x le plus grand entier $N \in \mathbb{Z}$ inférieur ou égal à x.
Cet entier existe toujours d'après la propriété 1.5 (propriété fondamentale des entiers).

Notation

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Représentation graphique de $x \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor x \rfloor$



Propriété 4.8

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}, x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

3) Si $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \leq x$ alors $n \leq \lfloor x \rfloor$.

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

Démonstration

Méthode

Les deux premières propriétés ci-dessus permettent de traiter la plupart des problèmes faisant intervenir la fonction partie entière. ***Il faut donc absolument les connaître***.

Ex. 4.10

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers positifs a_n et b_n tels que

$$\begin{cases} (2+\sqrt{3})^n & = & a_n + b_n\sqrt{3} \\ 3b_n^2 & = & a_n^2 - 1 \end{cases}$$

2) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^n} \right\rfloor$ est un entier impair.

Cor. 4.10

II. Fonctions réelles d'une variable réelle

Dans ce qui suit, on rapporte le plan à un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ orthonormé.

II.1. Représentations graphiques

Définition 4.9

Une fonction f réelle d'une variable réelle n'est bien définie que lorsqu'on explicite à la fois ses ensembles de départ D et d'arrivée A et une manière d'obtenir l'image $f(x) \in A$ de tout élément $x \in D$. Lorsque l'ensemble de départ est omis, on appelle ***ensemble de définition*** de la fonction f, souvent noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ donnée peut être calculée. Par exemple, l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^*$.

Proposition 4.10

Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une bijection. Alors la représentation graphique de la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ de f est déduite de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale autour de la droite d'équation $y = x$.

Démonstration

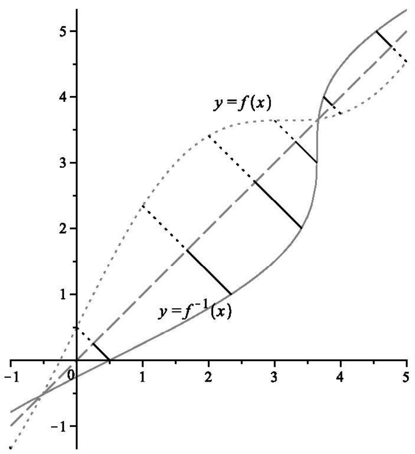


FIGURE 4.1 – Représentations graphiques de f et f^{-1}

II.2. Symétries des représentations graphiques

Définition 4.11 (Parité d'une fonction)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in D$, $-x \in D$, A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to A$ une fonction.

- On dit que f est ***paire*** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est ***impaire*** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Définition 4.12 (Périodicité d'une fonction)

Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$, D une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in D$, $x + p \in D$, A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to A$ une fonction.

On dit que f est ***périodique de période*** p si pour tout $x \in D$, $f(x+p) = f(x)$. On dit alors que p est ***une période*** de f.

Remarque

- Dans la définition précédente, on peut aussi admettre sans modification de signification les périodes strictement négatives.
- Si p est une période, alors tout multiple entier (positif) non nul de p en est aussi une.
- On dit souvent que p est ***la*** période d'une fonction périodique lorsque p est la plus petite période strictement positive de f.

Proposition 4.13 (Symétrie de la représentation graphique d'une fonction)

- Si f est une fonction paire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est une fonction impaire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.
- Si f est une fonction périodique de période p, alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de

vecteur $p\vec{\imath}$.

Démonstration

Ex. 4.11 Quelles sont les symétries de la représentation graphique de la fonction cos ?

Cor. 4.11

II.3. Bornes et extremums d'une fonction

Définition 4.14 (Majorant, minorant)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \to A$ une fonction.
On dit que f est ***majorée par*** $M \in \mathbb{R}$ et on appelle M ***majorant de*** f, si pour tout $x \in D$, $f(x) \leqslant M$.
On dit que f est ***minorée par*** $m \in \mathbb{R}$ et on appelle m ***minorant de*** f, si pour tout $x \in D$, $f(x) \geqslant m$.
Une fonction qui est minorée par m et majorée par M est dite ***bornée*** par m et M.

Remarque

Dire qu'une fonction est majorée (respectivement minorée, bornée) équivaut à dire que son image $f(D)$ est majorée (respectivement minorée, bornée). Les propriétés des parties de $\mathbb{R}$ bornées s'adaptent donc immédiatement aux fonctions réelles bornées.

Proposition 4.15 (Caractérisation des fonctions bornées)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$. La fonction $f : D \to A$ est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Démonstration

Définition 4.16 (Maximum global, minimum global)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \to A$ une fonction.
On dit que f admet un ***maximum global*** si

$$\exists x_0 \in D, \forall x \in D, f(x) \leqslant f(x_0)$$

On dit alors que $f(x_0)$ est ***le maximum*** de f.
On dit que f admet un ***minimum global*** si

$$\exists x_0 \in D, \forall x \in D, f(x) \geqslant f(x_0)$$

On dit alors que $f(x_0)$ est ***le minimum*** de f.

Important ! Unicité des extremums globaux

La proposition 4.3 permet d'affirmer que si une fonction admet un maximum global (ou un minimum global), alors celui-ci est unique. Cependant, ce maximum (ou ce minimum) possède alors un ***ou plusieurs*** antécédent(s).

Notation

On note $\max\limits_{x\in D} f(x)$ le maximum global de f s'il existe et $\min\limits_{x\in D} f(x)$ le minimum global de f s'il existe.

Ex. 4.12 La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est-elle majorée ? minorée ? Si oui, possède-t-elle un maximum global ? un minimum global ?

Cor. 4.12

Ex. 4.13 La fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est-elle majorée ? minorée ? Si oui, possède-t-elle un maximum global ? un minimum global ?

Cor. 4.13

II.4. Monotonie

Définition 4.17 (Croissance, décroissance, monotonie)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \to A$ une fonction et I une partie de D.

- On dit que f est ***croissante sur*** I si $\forall (x,y) \in I^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- On dit que f est ***strictement croissante sur*** I si $\forall (x,y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- On dit que f est ***décroissante sur*** I si $\forall (x,y) \in I^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
- On dit que f est ***strictement décroissante sur*** I si $\forall (x,y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- On dit que f est ***monotone sur*** I si elle est croissante ou décroissante sur I et ***strictement monotone sur*** I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Important ! Intervalles et monotonie

On a défini la croissance, la décroissance ou la monotonie de f sur une partie I quelconque de l'ensemble de départ D. Mais il vaut mieux penser à cette partie comme à un ***intervalle***. En effet, les propriétés caractérisant la monotonie d'une fonction dérivable par exemple (voir proposition 4.28) sont valables sur un intervalle. Ainsi, la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$ puisque $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$.

Proposition 4.18 (Stricte monotonie et injectivité)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \to A$ une fonction strictement monotone. Alors f est injective.
La réciproque est fausse.

Démonstration

Ex. 4.14 Démontrer que si $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ est une bijection strictement monotone, alors sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f.

Cor. 4.14

Méthode : Montrer qu'une fonction n'est pas monotone

Pour montrer qu'une fonction f n'est pas monotone sur un intervalle I, il suffit de trouver un triplet $(a; b; c) \in I^3$ tels que

$$(a < b < c)\,\mathbf{et}\Big(\big(f(a) < f(b)\,\mathbf{et}\,f(c) < f(b)\big)\,\mathbf{ou}\big(f(a) > f(b)\,\mathbf{et}\,f(c) > f(b)\big)\Big)$$

Ex. 4.15 Montrer que $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \frac{1}{x}$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cor. 4.15

II.5. Monotonie et continuité

Théorème 4.19

Soit f une fonction continue sur ***un intervalle*** I.
f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Théorème 4.20 (Bijection continue)

Soit f une fonction continue sur ***un intervalle*** I.
f est une bijection de I sur $f(I)$ si et seulement si f est strictement monotone.
De plus,

- $f(I)$ est alors un ***intervalle*** ;
- la bijection réciproque f^{-1} est alors continue sur $f(I)$, strictement monotone, de même monotonie que f.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction f continue ***de l'intervalle*** I sur J est bijective :

- on montre qu'elle est strictement monotone ;
- comme le théorème précédent ***permet d'affirmer que*** J ***est un intervalle***, on vérifie que $f(I) = J$ en calculant les limites de f aux bornes de I.

Ex. 4.16 (Cor.) Montrer que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to &]1;\infty[\\ x & \mapsto & e^{2x} + e^x + 1 \end{array} \right.$ est bijective.

Méthode

Si f est bijective continue de I (***intervalle***) sur J (***intervalle***), alors elle est strictement monotone et la propriété de stricte croissance (ou décroissance) est ***une équivalence logique***. Autrement dit, appliquer une même bijection aux deux membres d'une inégalité donne une inégalité équivalente.

Ex. 4.17 Résoudre l'inéquation d'inconnue x réelle $\ln(x-1) - \ln(2x+1) > 0$ ***en commençant par déterminer son ensemble de définition***.

Faire de même pour l'inéquation d'inconnue x réelle $\ln\left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right) > 0$.

Remarque ?

Cor. 4.17

III. Éléments de calcul différentiel

La plupart des résultats donnés dans cette section sont admis et ne seront démontrés que dans le cadre du chapitre consacré à la dérivabilité.

Dans toute la section, I et J sont deux ***intervalles*** réels ***contenant une infinité de points***.

III.1. Définition

Définition 4.21 (Dérivabilité en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I. On dit que f est ***dérivable en*** a si l'application $x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$ admet une limite finie en a. Cette limite s'appelle alors le ***nombre dérivé de*** f ***en*** a et se note $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Remarque

- Si f est dérivable en a, on peut aussi écrire $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.
- Pour $x \neq a$, le quotient $\tau_f(x,a) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ s'appelle le ***taux d'accroissement de la fonction*** f ***entre*** a ***et*** x ; il représente la pente de la droite passant par les

points $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ du plan rapporté à un repère.

- Le nombre dérivé représente donc la pente de la droite limite obtenue lorsque M tend vers A : cette droite est la tangente à la représentation graphique $\mathcal{C}_f$.

Définition 4.22 (Tangente en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a de I. Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la droite d'équation cartésienne

$$y = f(a) + f'(a) \times (x - a)$$

est la ***tangente à la courbe représentative*** $\mathcal{C}_f$ ***de*** f ***au point*** $A(a, f(a))$.
Cette définition est illustrée par la figure 4.2.

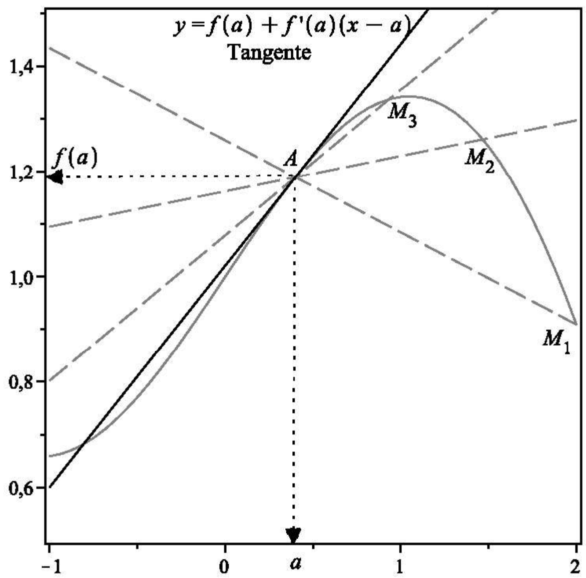


FIGURE 4.2 – Nombre dérivé et tangente en un point

Remarque

La notation de Leibniz $f'(a) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ est un ***moyen mnémotechnique*** de retenir l'équation réduite de la tangente :
$f'(a) = \dfrac{y - f(a)}{x - a} \Rightarrow y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Définition 4.23 (Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$ s'appelle la ***fonction dérivée*** de f.
On note f'' la dérivée de f' si elle existe, etc. et pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ la dérivée n^{e} de f.

III.2. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 4.24 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I.

- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la ***combinaison linéaire*** $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- Le produit fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas sur I, l'inverse $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.
- Si g ne s'annule pas sur I, le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Proposition 4.25 (Composition)

Si $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.

Théorème 4.26 (Dérivée de la bijection réciproque)

Soit $f : I \to J$ une application bijective et dérivable. L'application f^{-1} est dérivable en tout $y \in J$ pour lequel $f' \circ f^{-1}(y) \neq 0$ et alors $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$.
Cette proposition est illustrée par la figure 4.3 page 60.

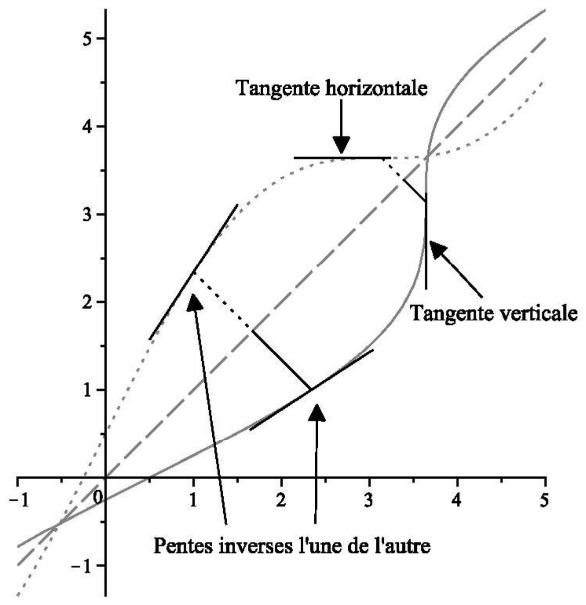


FIGURE 4.3 – Dérivées d'une bijection et de sa réciproque

Opérations sur les fonctions dérivables

Soit u et v deux fonctions satisfaisant aux hypothèses des propositions précédentes et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (\lambda u)' = \lambda u' \qquad (uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\tfrac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2} \qquad \left(\tfrac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u \qquad (u^{-1})' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}}$$

La formule de dérivation d'une fonction composée a été vue sur des exemples en terminale :

$$\big(\exp(u)\big)' = u' \times \exp(u) \qquad \big(\ln(u)\big)' = \frac{u'}{u} \qquad \big(\sqrt{u}\big)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

III.3. À propos des notations et de l'interprétation physique

Étant donnés deux points $M_1(x_1; y_1)$ et $M_2(x_2; y_2)$ (avec $x_1 \neq x_2$) appartenant à la droite (non parallèle à l'axe des ordonnées) d'équation $y = ax + b$, on a

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Donc $y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2)$ ou encore $a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.
Le coefficient directeur d'une droite est donc égal à

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Remplacer Δ par d signifie implicitement que l'on opère des « différences infinitésimales » c'est-à-dire que l'on calcule une ***limite*** :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Lorsque l'on souhaite dériver une ***fonction de plusieurs variables***, il devient important de préciser ***par rapport à quelle variable*** on effectue la dérivation. La notation adoptée (en mathématiques comme en physique) est alors la suivante

$$\frac{\partial E}{\partial x}(a,b,c) = \lim_{h \to 0} \frac{E(a+h,b,c) - E(a,b,c)}{h}$$
$$\frac{\partial E}{\partial y}(a,b,c) = \lim_{h \to 0} \frac{E(a,b+h,c) - E(a,b,c)}{h}$$
$$\frac{\partial E}{\partial z}(a,b,c) = \lim_{h \to 0} \frac{E(a,b,c+h) - E(a,b,c)}{h}$$

On parle alors de ***dérivée partielle par rapport à*** x (respectivement par rapport à y ou par rapport à z). Le symbole ∂ remplace le d des « différences infinitésimales » afin de bien insister sur le fait que la fonction que l'on dérive dépend de plusieurs variables et que l'on dérive partiellement par rapport à l'une d'entre elles.

Ex. 4.18 Calculer la dérivée de $g : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Trouver une primitive G de g, c'est-à-dire une fonction vérifiant $G' = g$.

Cor. 4.18

Ex. 4.19 Calculer les dérivées partielles de
$h : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy - \dfrac{y}{x}$ pour $x \neq 0$.

Cor. 4.19

Ex. 4.20 Calculer les dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.

Cor. 4.20

III.4. Propriétés des fonctions dérivables

On rappelle que I est un ***intervalle réel contenant une infinité de points***.

Proposition 4.27 (Fonction constante)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. La fonction f est constante sur I si et seulement si sa dérivée f' est nulle sur I.

Proposition 4.28 (Variation et dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur I.
- Si $f' \geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
- Si $f' \leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.

Définition 4.29 (Zéro isolé d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que $x_0 \in I$ est un ***zéro isolé de*** f si
- $f(x_0) = 0$;
- il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $x_0 \in J$ et tel que f ne s'annule pas sur $J \backslash \{x_0\}$.

Proposition 4.30 (Condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ ***continue et dérivable*** sur I. Alors f est strictement monotone si et seulement si f' est de signe constant sur I et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide.

Remarque

La condition donnée dans la proposition 4.30 s'interprète (et s'utilise) de la façon suivante :
- la dérivée f' est de signe constant, donc la fonction est monotone ;
- si de plus f' ne s'annule qu'en des ***points isolés*** alors la fonction est strictement monotone.

Ex. 4.21 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \sin(x) \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective.

III.5. Étude pratique des fonctions

Définition 4.31 (Asymptotes à une représentation graphique)

- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $x_0 \in \mathbb{R}$ ouvert en x_0 et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est appelée ***asymptote verticale*** $\mathcal{C}_f$.
- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $\pm\infty$ et si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = y_0$ est appelée ***asymptote horizontale*** $\mathcal{C}_f$.
- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $\pm\infty$ et s'il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax - b = 0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est appelée ***asymptote oblique*** $\mathcal{C}_f$.

Méthode : Étude et représentation graphique d'une fonction f

1) On commence, s'il n'est pas donné, par obtenir l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2) On cherche les symétries (parité, périodicité...), on réduit l'intervalle d'étude.
3) On cherche l'***ensemble de dérivabilité*** c'est-à-dire l'ensemble des réels x pour lesquels le nombre dérivé $f'(x)$ est défini.
4) On calculer f', éventuellement on cherche à prolonger cette dérivée aux points où elle n'était pas ***à priori*** définie.
5) On étudie le signe de $f'(x)$ puis on dresse le ***tableau de variations de*** f : sur la première ligne, les valeurs particulières de x obtenues aux étapes précédentes ; sur la seconde, le signe de $f'(x)$ et sur la troisième, les variations de f.
6) On complète le tableau de variations par les images et les limites éventuelles de f.
7) On construit la représentation graphique et on y place :
   - les points où la dérivée s'annule pour lesquels la tangente à la courbe est horizontale ;
   - les asymptotes ;
   - éventuellement quelques tangentes, notamment lorsqu'on connaît en un point la valeur de la fonction et la valeur ou la limite de sa dérivée.

Ex. 4.22 Étudier la fonction $L : x \mapsto \dfrac{2\ln(x)}{\ln(x^2+1)}$ après avoir déterminé son ensemble de définition. Tracer une représentation graphique rapide.

Ex. 4.23 Étudier la fonction $S : x \mapsto \dfrac{2e^x}{1+e^x} - 1$ après avoir déterminé son ensemble de définition. [***Indication*** : il peut être utile de chercher à savoir si S possède des symétries...]
Tracer une représentation graphique rapide.

Ex. 4.24 Soit $R : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array} \right.$.

1) R admet-elle des symétries ?

2) Étudier le sens de variations de R.
3) Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_R$.
4) Tracer une représentation graphique rapide de R.

Ex. 4.25 Les fonctions L, S R des exercices précédents sont-elles bornées ? possèdent-t-elles des extremums sur $\mathbb{R}$?

Méthode : Montrer qu'une fonction $f : I \to J$ dérivable est bijective

D'après la proposition 4.20, on vérifie que

- la dérivée f' est de signe constant sur I et ne s'annule qu'en des points isolés ;
- les limites ou les valeurs de f aux bornes de I donnent bien les bornes de J : $f(I) = J$.

Pour obtenir une expression de la bijection réciproque f^{-1}, on tente de résoudre l'équation l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x.
Si on parvient à le faire, on obtient alors $x = f^{-1}(y)$, c'est-à-dire une expression de la bijection réciproque.

Ex. 4.26 Les fonctions L, S R sont-elles bijectives ?
Si oui, de quel intervalle sur quel intervalle ? donner une expression de leur bijection réciproque.

Résoudre une inéquation/démontrer une inégalité

Pour résoudre une inéquation (ou démontrer une inégalité) du type $A(x) \geqslant B(x)$:

1) on peut éventuellement utiliser les propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ en partant d'inégalités satisfaites par hypothèses ou déjà démontrées ;
2) ***sinon, on commence par obtenir son ensemble de définition***.
Ensuite, ***on écrit*** $A(x) \geqslant B(x) \Leftrightarrow A(x) - B(x) \geqslant 0$ afin de se ramener à ***l'étude du signe de*** $A(x) - B(x)$.
Puis :
   - il est souvent fructueux d'utiliser la règle selon laquelle « le signe d'un produit est le produit des signes » en ***faisant un tableau de signes*** ;
   - étudier le signe des expressions entre valeurs absolues puis ***faire un tableau de signes*** permettant d'envisager tous les cas possibles se révèle souvent synthétique et efficace ;
   - il peut être intéressant d'étudier la fonction $A - B$ pour montrer qu'elle passe par un minimum (ou par un maximum suivant les cas).

Ex. 4.27 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$$

Ex. 4.28 Résoudre l'inéquation d'inconnue x réelle :

$$(I) : \frac{2e^x}{e^x + 1} - 1 > \frac{-1}{2}$$

III.6. Primitives d'une fonction continue

Définition 4.32

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que F est une ***primitive*** de f sur I si F est dérivable sur I et si $F' = f$.

Proposition 4.33 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction $F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est l'unique primitive de f s'annulant en a et toute primitive de f s'écrit $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Corollaire 4.34

Si f est continue sur $[a; b]$, alors elle admet une infinité de primitives sur $[a; b]$ et quelle que soit la primitive F choisie, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ noté $[F(t)]_a^b$.

IV. Correction des exercices

Cor. 4.8 : On a $|x+1| = x+1 \Leftrightarrow x \geqslant -1$ et $|x-3| = x-3 \Leftrightarrow x \geqslant 3$. On en déduit que l'inégalité à résoudre est donnée suivant la valeur de x par le tableau suivant :

Valeur de x	-1	3	
Inégalité à résoudre	$-x-1-x+3<6$	$x+1-x+3<6$	$x+1+x-3<6$

Sur $]-\infty; -1]$, l'inégalité équivaut donc à $-2x + 2 < 6$ d'où un premier ensemble de solutions $S_1 =]-2; -1]$. De même, sur $[-1; 3]$, l'inégalité devient $4 < 6$ qui est trivialement vraie d'où $S_2 = [-1; 3]$. Enfin, sur $[3; +\infty[$, on résout $2x < 8$ qui conduit à $S_3 = [3; 4[$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est $]-2; 4[$.

Cor. 4.9 : On distingue plusieurs cas :

- si x et y sont positifs, alors l'inégalité à démontrer est $\dfrac{x+y}{1+x+y} \leqslant \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{y}{1+y}$ qui est équivalente à $(x+y)(1+x)(1+y) \leqslant x(1+y)(1+x+y) + y(1+x)(1+x+y)$. En développant partiellement le membre de droite, cette inégalité devient $(x+y)(1+x)(1+y) \leqslant x(1+y)(1+x) + xy(1+y) + y(1+x)(1+y) + xy(1+x)$ c'est-à-dire après simplification $xy(2+x+y) \geqslant 0$. Or cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$.
- si $-x \leqslant y \leqslant 0$, alors $0 \leqslant x + y \leqslant x$.
  Donc $g(x+y) = \dfrac{x+y}{1+x+y} = \dfrac{x+y+1-1}{1+x+y} = 1 - \dfrac{1}{1+x+y} \leqslant 1 - \dfrac{1}{1+x} = g(x)$.
  La fonction g étant positive, on a a fortiori $g(x+y) \leqslant g(x) + g(y)$.
- les autres cas se ramènent aux précédents en échangeant le rôle de x et y et en utilisant la parité de g. Par exemple, pour $y \leqslant -x \leqslant 0$, on a $g(x+y) = g(-x-y) \leqslant g(-y)$ d'après le cas précédent, etc.

Cor. 4.16 : f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Il suffit donc de montrer qu'elle est strictement monotone et que $f(\mathbb{R}) =]1; +\infty[$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2e^{2x} + e^x > 0$.

Donc f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})$ est donc un intervalle et

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc $f(\mathbb{R}) =]1; +\infty[$ et f est bien une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]1; +\infty[$.