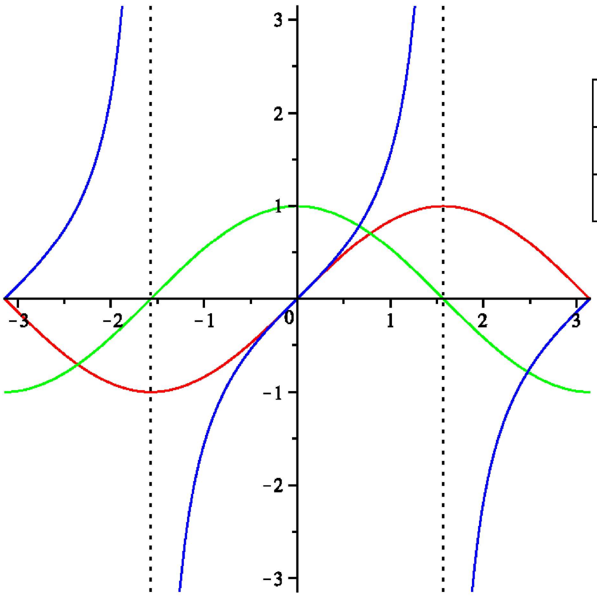
Synthèse sur les notions d'analyse censées être connues

V. Fonctions de référence

Fonctions trigonométriques



$\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos$

$\tan' = \dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$

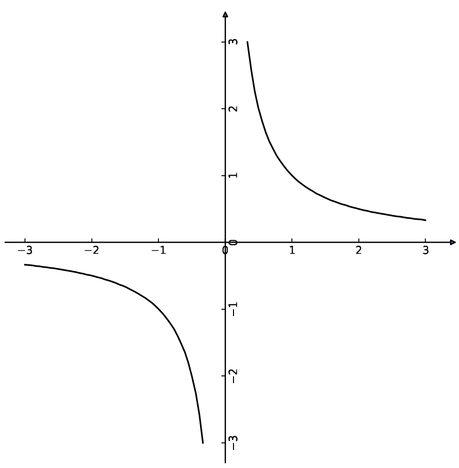
$\cos^2 + \sin^2 = 1$

Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $-\sin(x)$	0	$+$	0	$-$	0
Variations de cos	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\cos(x)$					
Variations de sin					

Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\frac{1}{\cos^2(x)}$					
Variations de tan					

Fonction « inverse »



Strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ ***mais pas sur*** $\mathbb{R}^*$.

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$

Permet de retenir les limites :

$\dfrac{1}{-\infty} = 0^- \qquad \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

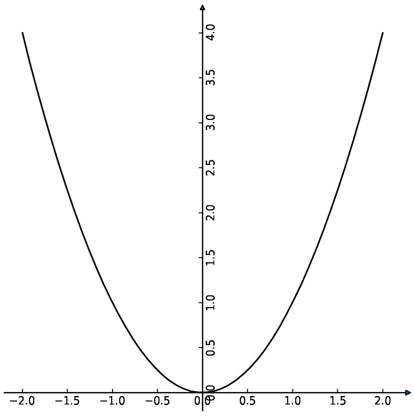
$\dfrac{1}{+\infty} = 0^+ \qquad \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

Plus précisément :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^- \qquad \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

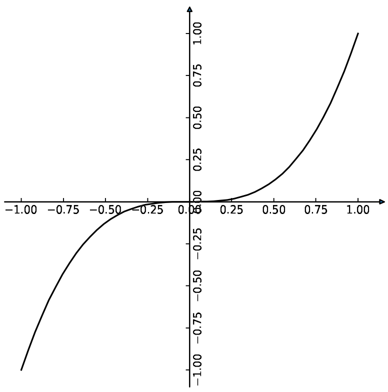
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+ \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

Fonction « carré »



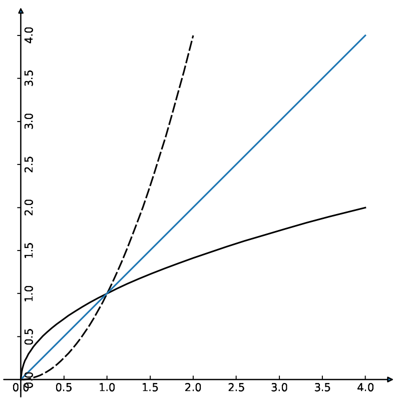
Strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
Strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
$(x^2)' = 2x$
Limites :
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Fonction « cube »



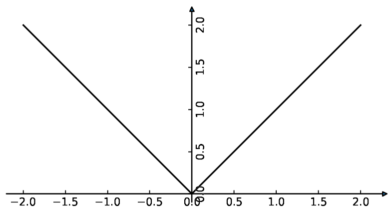
Strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$(x^3)' = 3x^2$
Limites :
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Fonction « racine carrée »



Strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Continue sur $\mathbb{R}_+$ ***mais dérivable sur*** $\mathbb{R}_+^*$.
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
C'est la bijection réciproque de
$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$.
Limite :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Fonction « valeur absolue »



Strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Continue sur $\mathbb{R}$ ***mais dérivable sur*** $\mathbb{R}_-^*$ ***et*** $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, (|x|)' = -1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (|x|)' = +1$

$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$.

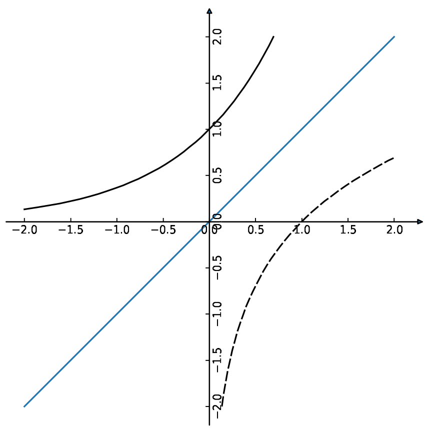
$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x}^2 = x$.

Limites :

$\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$

Fonctions exponentielle et logarithme (népérien)



$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

Bijective, strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$

$\exp' = \exp$

$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

Bij. réciproque de exp.

Strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)} = x$

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

VI. Limites, dérivées

VI.1. Limites

Proposition 4.35 (Somme de fonctions)

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}$	$\alpha + \alpha'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	???
$-\infty$	$-\infty$	???	$-\infty$

Proposition 4.36 (Produit de fonctions)

$\lim_{x\to a} f(x)$ \ $\lim_{x\to a} g(x)$	$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$	$\alpha \in \mathbb{R}_-^*$	$\alpha = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}_+^*$	$\alpha\alpha'$	$\alpha\alpha'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}_-^*$	$\alpha\alpha'$	$\alpha\alpha'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\alpha' = 0$	0	0	0	???	???
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	???	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	???	$-\infty$	$+\infty$

Méthode : Calcul de limite

- On utilise les tableaux précédents et les limites des fonctions de référence : dans le cas où cela donne la limite cherchée, ***on donne directement cette limite sans justification***.
- Dans les tableaux précédents, les cases où se trouve ??? sont des ***formes indéterminées*** (FI) : dans ce cas, il faut « lever l'indétermination ».
- Pour lever une indétermination, il y a plusieurs techniques :
  - ⋆ simplifier les expressions ;
  - ⋆ factoriser les expressions conduisant à une FI par leur ***terme prépondérant*** ;
  - ⋆ dans le cas d'expressions faisant intervenir une racine carrée, multiplier et diviser par « l'expression conjuguée » ;
  - ⋆ théorème des gendarmes ;
  - ⋆ interpréter la limite comme étant ***la dérivée d'une fonction en un point*** ;
  - ⋆ utiliser les « ***limites comparées*** » (que nous verrons plus tard dans l'année).

Exemples : calculer les limites suivantes (une seule de ces limites n'existe pas)

$A = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 3}$ $\quad B = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1 + x^3}{x + x^2}$ $\quad C = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{-5 + \frac{1}{x^2}}$ $\quad D = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\ln^2(x) + 1}$

$E = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$ $\quad F = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ $\quad G = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$ $\quad H = \lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x - 1}$

$I = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}$ $\quad J = \lim_{x\to+\infty} x\sin(x)$ $\quad K = \lim_{x\to 0} x\sin(x)$

VI.2. Dérivées

- Les formules $\big(cte\big)' = 0$, $\big(x\big)' = 1$, $\big(x^2\big)' = 2x$, $\big(x^3\big)' = 3x^2$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$, $\big(\sqrt{x}\big)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sont toutes résumées par l'unique formule
  $(x^n)' = nx^{n-1}$
- Soient λ, μ deux réels, u, v deux fonctions dérivables.
  $\big(\lambda u + \mu v\big)' = \lambda u' + \mu v'$ $\qquad \big(uv\big)' = u'v + uv'$ $\qquad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
  $(e^u)' = u' \times e^u$ $\qquad \big(\ln(u)\big)' = u' \times \dfrac{1}{u}$ $\qquad \left(\dfrac{1}{u}\right)' = u' \times \dfrac{-1}{u^2}$ $\qquad \big(\sqrt{u}\big)' = u' \times \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$
  $(u^2)' = u' \times 2u$ $\qquad (u^3)' = u' \times 3u^2$...