Maths - Chapitre 5

Nombres complexes : équations et géométrie

I. Utilisations en géométrie

Les formules concernant le module et l'argument des nombres complexes permettent une grande variété d'applications géométriques. Nous en donnons ici quelques exemples.
On rappelle que le plan est rapporté à un repère $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ ***orthonormal direct*** et que l'affixe d'un point $M(x; y)$ dans ce repère est le complexe $z = x + iy$.

I.1. Angle de vecteurs

Proposition 5.1

Étant donnés deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives z et z' on a
$(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \operatorname{Arg}(\bar{z}z')\, [2\pi]$
où $(\vec{u}; \vec{v})$ désigne l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration

Corollaire 5.2 (Vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont colinéaires si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}$.

Corollaire 5.3 (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont orthogonaux si et seulement si $\bar{z}z' \in i\mathbb{R}$.

Corollaire 5.4 (Points alignés)

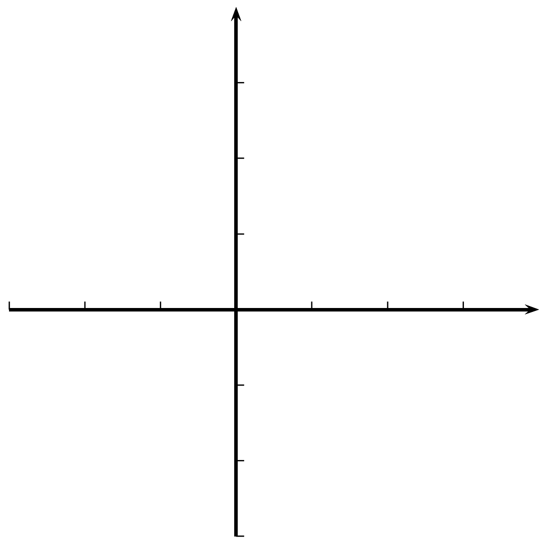
Trois point $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ sont alignés si et seulement si $(\overline{z_A} - \overline{z_B})(z_A - z_C) \in \mathbb{R}$.

I.2. Transformations du plan complexe

On identifie les points du plan et leur affixe, et les vecteurs du plan et leur affixe.
Autrement dit, pour $z \in \mathbb{C}$

- « le point z du plan complexe » signifie « le point M du plan d'affixe z » ;
- « le vecteur z du plan complexe » signifie « le vecteur $\vec{v}$ du plan d'affixe z ».

- Soit $c \in \mathbb{C}$. La transformation $z \mapsto z + c$ du plan complexe est
 ....
 ....
- La transformation $z \mapsto \bar{z}$ du plan complexe est
 ....
 ....
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. La transformation $z \mapsto \lambda z$ du plan complexe est
 ....
 ....
- Soit $u \in \mathbb{U}$. La transformation $z \mapsto uz$ est
 ....
 ....



Ex. 5.1 (Cor.) Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexe.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que ABC soit un triangle équilatéral ***direct***.
2) Montrer que cette condition est équivalente à $a + jb + j^2c = 0$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
3) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ABC soit un triangle équilatéral.
4) Existe-t-il des triangles équilatéraux à coordonnées entières ?
 [***Indication*** : on admettra que $\sqrt{3}$ est irrationnel.]

II. Utilisations en algèbre

II.1. Racine *réelle* n-ième d'un *réel positif*

Proposition 5.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n \in \mathbb{R}_+$ est bijective.

Démonstration

Définition 5.6 (Fonction racine n-ième)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$$
est la bijection réciproque de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n \in \mathbb{R}_+$.

II.2. Racines complexes n-ièmes de l'unité

Théorème 5.7 (Racines n-ièmes de l'unité)

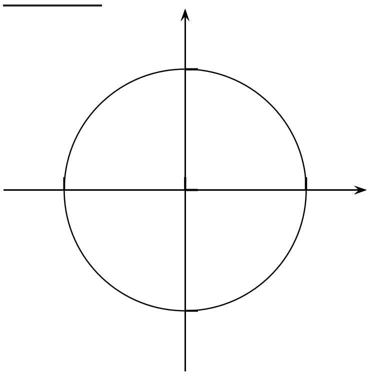
Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z \in \mathbb{C}, z^n = 1$ possède exactement n racine(s), toutes de module 1. L'ensemble des solutions de cette équation est $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!]\right\} \subset \mathbb{U}$.

Démonstration

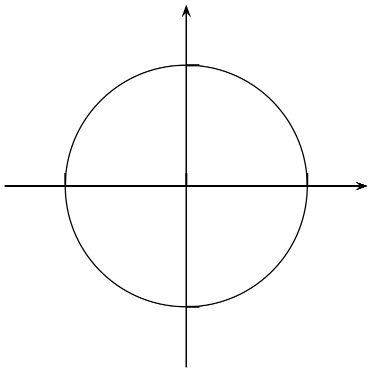
Important !

- Nous venons de voir que $n\theta \equiv 0\,[2\pi] \Leftrightarrow \theta$ ....
- D'après le théorème précédent, l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^n \end{array}\right.$ ***n'est pas une bijection*** si $n > 1$ (puisque 1 a n antécédents).
  En conséquence, elle ***n'admet pas de bijection réciproque***.
  La fonction $y \mapsto \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ est ***définie uniquement sur*** $\mathbb{R}_+$.

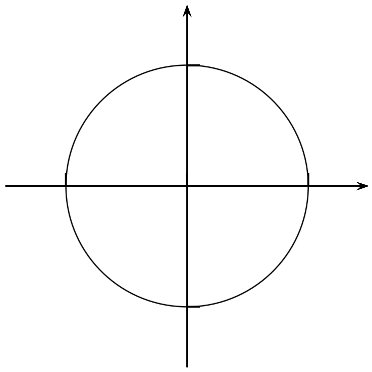
Ex. 5.2 Placer les racines complexes n-ièmes de l'unité dans les cas suivants



Racines cubiques : $n = 3$



Racines quatrièmes : $n = 4$



Racines sixièmes : $n = 6$

Méthode

Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{C}^*$, l'équation $z^n = c$ a exactement n solutions.
Pour la résoudre, on procède de la façon suivante

- on écrit c sous forme trigonométrique : $\exists! \rho \in \mathbb{R}_+^*, \exists \gamma \in \mathbb{R}, c = \rho e^{i\gamma}$;
- on en déduit $|z|$: $|z^n| =$ ....
- on termine en explicitant les différentes valeurs possibles pour $\theta = \arg(z)$:
  $z^n = c \Leftrightarrow$ ....

Ex. 5.3 Résoudre l'équation $z^3 = 1 + i$

Cor. 5.3

II.3. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Théorème 5.8

Étant donnés $a \neq 0$, b et c ***trois nombres complexes***, l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et de discriminant $\Delta = b^2-4ac$ possède :

- une solution ***double*** $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$;
- deux solutions distinctes $z_\pm = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ si $\Delta = \delta^2 \neq 0$.

Démonstration

Méthode

Pour résoudre une équation du second degré à ***coefficients complexes*** :

- on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$;
- si $\Delta = 0$, on a immédiatement la solution double ;
- si $\Delta \neq 0$, on cherche la partie réelle et la partie imaginaire de l'un des deux complexes δ vérifiant $\delta^2 = \Delta$ en résolvant le système $\begin{cases} \delta^2 & = & \Delta \\ |\delta|^2 & = & |\Delta| \end{cases}$ c'est-à-dire en adaptant au cas $n=2$ la méthode de résolution des équations du type $z^n = c$.

Ex. 5.4 Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (1+5i)z - 2(1-i) = 0$.

Cor. 5.4

II.4. Relations coefficients-racines

Théorème 5.9

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ avec $a \neq 0$, b et c ***trois nombres complexes*** alors

$\forall z \in \mathbb{C}, az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$, $\qquad z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $\qquad z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$

Démonstration

II.5. Factorisation d'un polynôme

Définition 5.10 (Polynôme)

On appelle ***polynôme*** à coefficients réels (ou complexes) toute expression $P(x)$ du type

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $(a_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une famille de nombres réels (ou complexes).

Le plus petit entier $k \in [\![0;n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$ est appelé ***degré du polynôme*** $P(x)$.
Le degré du polynôme nul ($P = 0$) est par convention égal à $-\infty$.
Souvent, la variable x n'est pas écrite : on parle simplement du ***polynôme*** P.

Théorème 5.11

Soit P un polynôme à coefficients réels ou complexes et a une racine (réelle ou complexe) de P.
Autrement dit, soit a tel que $P(a) = 0$.
Alors il existe un polynôme Q tel que $P = (X - a)Q$.

Démonstration

Méthode : Résolution des équations polynomiales de degré supérieur à 3

Le théorème précédent permet d'affirmer que si on connaît une solution a d'une équation polynomiale

$$P(x) = 0$$

alors on peut réécrire cette équation $(x - a)Q(x) = 0$.
Ceci conduit à la méthode suivante : pour résoudre une équation polynomiale de degré supérieur à 3

- on cherche une « racine évidente » a de l'équation $P(x) = 0$;
- on factorise P de sorte à ce que l'équation devient $(x - a)Q(x) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = a \\ \textbf{ou} \\ Q(x) = 0 \end{array} \right.$
- on recommence le même procédé sur l'équation $Q(x) = 0$.

Ex. 5.5 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $(E) \quad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$.

II.6. Propriétés de l'exponentielle complexe

Nous avons défini page 45 l'exponentielle complexe par $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = e^{\mathcal{R}e(z)} \times e^{i\mathcal{I}m(z)}$.
En voici quelques propriétés :

Propriété 5.12 (Propriétés de l'exponentielle complexe)

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$:

- $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$
- $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $\dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$

- $$\begin{aligned} e^z = 1 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi \\ &\Leftrightarrow z \equiv 0\,[2i\pi] \end{aligned}$$
- $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z \equiv z'\,[2i\pi]$

Propriété 5.13

$\forall z \in \mathbb{C}$,

- $|e^z| = e^{\mathcal{R}e(z)}$;
- $\arg(e^z) \equiv \mathcal{I}m(z)\,[2\pi]$.

Démonstration

Important !

L'équation $e^z = c \in \mathbb{C}^*$ possède une infinité de solutions complexes, la partie imaginaire de z étant définie à 2π près.

Méthode : Équations du type $e^z = c \in \mathbb{C}^*$

La propriété précédente donne une méthode de résolution des équations du type $e^z = c \in \mathbb{C}^*$: en effet, résoudre l'équation revient à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} |e^z| & = & e^{\mathcal{R}e(z)} = |c| \\ \arg(e^z) & \equiv & \mathcal{I}m(z) \equiv \arg(c)\,[2\pi] \end{array}\right.$$

Ex. 5.6 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$(E_1) : e^z = -7 \qquad (E_2) : e^z = 5 - 12i$

Cor. 5.6

III. Correction des exercices

Cor. 5.1 :

1) ABC est équilatéral direct si et seulement si C est l'image de B dans la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   Donc ABC est équilatéral direct si et seulement si $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.
2) À partir de l'équation précédente, on obtient :
   $$\begin{aligned} c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) &\Leftrightarrow \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)a - e^{i\frac{\pi}{3}}b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0 \end{aligned}$$
3) ABC est un triangle équilatéral si et seulement si c'est un triangle équilatéral ***direct OU indirect***. D'où :
   ABC est un triangle équilatéral$\Leftrightarrow (a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc) = 0$.
   En développant on obtient
   ABC est un triangle équilatéral$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$.

4) Traitons uniquement le cas direct, le cas indirect étant obtenu par permutation de deux sommets du triangle.

   Supposons que b et c soient à parties réelles et imaginaires entières, alors

   $$a = -jb - j^2c = \begin{array}{l} \dfrac{-\mathcal{R}e\,(b) + \sqrt{3}\mathcal{I}m\,(b) - \mathcal{R}e\,(c) - \sqrt{3}\mathcal{I}m\,(c)}{2} \\ +i\dfrac{\mathcal{I}m\,(b) - \sqrt{3}\mathcal{R}e\,(b) + \mathcal{I}m\,(c) + \sqrt{3}\mathcal{R}e\,(c)}{2} \end{array}$$

   Donc, pour que $\mathcal{R}e\,(a)$ soit entier, il est nécessaire que $\mathcal{I}m\,(b) = \mathcal{I}m\,(c)$ (car $\sqrt{3}$ est irrationnel).

   De même, pour que $\mathcal{I}m\,(a)$ soit entier, il est nécessaire que $\mathcal{R}e\,(b) = \mathcal{R}e\,(c)$.

   Donc les seuls triangles équilatéraux à coordonnées entières sont ceux réduits à un point !