

# Correction DS n°1

## Exercice 1.

1)

$$\begin{aligned}
 C^2 &= \left( -\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 \\
 &= \left( \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 \\
 &= 2 + \sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) + 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\
 &= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{4-2} \\
 &= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 C^4 &= (C^2)^2 \\
 &= (2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2})^2 \\
 &= 8(1+i)^2 \\
 &= 16i
 \end{aligned}$$

3) Écrivons  $C$  sous forme trigonométrique :  $C = re^{i\theta}$  où  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$C^4 = 16i \text{ donc } r^4 e^{i4\theta} = 16e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Donc } r^4 = 16 \text{ et } 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

$$\text{Donc } r = 2 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k.$$

Or  $C = -\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ , notamment  $\operatorname{Re}(C) < 0$  et  $\operatorname{Im}(C) < 0$ .

Donc  $\theta = \frac{\pi}{8} + \pi[2\pi]$  et finalement

$$C = 2e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

## Exercice 2.

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f(x) = \ln(1+e^x) - x = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right).$$

$$\text{Donc } f(x) = \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \ln(1+e^{-x}).$$

2)  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et composée.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - 1 = \frac{-1}{1+e^x}.$$

Donc,  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$  et  $f$  est donc décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) - x = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0^+.$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $f$	$+\infty$	$0^+$

3)  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  donc injective.

De plus, d'après le tableau de variations, et comme  $f$  est continue, elle est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $]0; +\infty[$ .

4) Sa bijection réciproque  $f^{-1}$  est donc définie sur  $\mathbb{R}_+^* = ]0; +\infty[$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln(1 + e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow e^y = 1 + e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^y - 1 = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln(e^y - 1)$$

Donc  $f^{-1}$  est la fonction

$$f^{-1} : \begin{cases} ]0; +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto -\ln(e^x - 1) \end{cases}$$

### Exercice 3.

1) *Quelques exemples*

$$\text{a) } c_0 = Z(1; 1) = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1-1+2i}{2} = i$$

$$\text{b) } c_1 = Z(2; 1) = \frac{2+i}{2-i} = \frac{4-1+4i}{4+1} = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$$

$$\text{c) } c_2 = Z(3; 1) = \frac{3+i}{3-i} = \frac{9-1+6i}{9+1} = \frac{4}{5} + i\frac{3}{5}$$

$$\text{d) } c_3 = Z(3; 2) = \frac{3+2i}{3-2i} = \frac{9-4+12i}{9+4} = \frac{5}{13} + i\frac{12}{13}$$

$$\text{e) } c_4 = Z(4; 2) = \frac{4+2i}{4-2i} = \frac{2+i}{2-i} = Z(2; 1) = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$$

2) *Quelques propriétés*

a) On veut montrer que  $\forall (u; v) \in A, Z(u; v) \in \mathbb{U}$ .

Or  $\mathbb{U}$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  constitué des complexes de module 1.

Il suffit donc de prouver que  $|Z(u; v)| = 1$ .

$$\text{Or } |Z(u; v)| = \left| \frac{u+iv}{u-iv} \right| = \frac{|u+iv|}{|u-iv|} = \frac{u^2+v^2}{u^2+v^2} = 1.$$

Donc

$$\forall (u; v) \in A, Z(u; v) \in \mathbb{U}$$

b) Soit  $(u; v) \in A$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Par définition de  $A$ ,  $u$  et  $v$  sont deux entiers dont l'un au moins est non nul.

Supposons par exemple que  $u \neq 0$ .

Alors, d'une part,  $nu \neq 0$  puisque  $n > 0$ .

D'autre part  $nu$  et  $nv$  sont produits de deux entiers relatifs, donc sont des entiers relatifs.

Donc  $(nu; nv) \in A$ .

$Z(nu; nv)$  est donc bien défini et

$$Z(nu; nv) = \frac{nu+inv}{nu-inv} = \frac{u+iv}{u-iv} = Z(u; v).$$

c) Soit  $(u; v) \in A$ .  $(-u; v)$  est alors aussi un élément de  $A$  et

$$Z(-u; v) = \frac{-u + iv}{-u - iv} = \frac{u - iv}{u + iv} = \frac{\overline{u + iv}}{u - iv}.$$

Donc

$$Z(-u; v) = \overline{Z(u; v)}$$

d) Soit  $(u; v) \in A$ .  $(v; u)$  est alors aussi un élément de  $A$  et

$$Z(v; u) = \frac{v + iu}{v - iu} = \frac{i(u - iv)}{i(-u - iv)} = \frac{-u + iv}{u + iv}.$$

$$\text{Donc } Z(v; u) = -\frac{u - iv}{u + iv} = -\frac{\overline{u + iv}}{u - iv}.$$

Donc

$$Z(v; u) = -\overline{Z(u; v)}$$

3) D'après la question 1,  $Z(4; 2) = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5} = Z(2; 1)$ .

Donc  $\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$  possède au moins 2 antécédents par  $Z$ .

Donc  $Z$  n'est pas injective.

4) Soit  $\frac{u + iv}{u - iv} \in \mathbb{W}$  (avec  $(u; v) \in A$ ).

Montrons que  $\frac{u + iv}{u - iv} \in \mathbb{V}$ .

Nous avons déjà démontré à la question 2)a) que  $Z(u; v) \in \mathbb{U}$ .

Il ne reste donc qu'à démontrer que la partie réelle et la partie imaginaire de  $\frac{u + iv}{u - iv}$  sont

**rationnelles**.

$$\text{Or } \frac{u + iv}{u - iv} = \frac{(u + iv)^2}{(u - iv)(u + iv)} = \frac{u^2 - v^2 + 2iuv}{u^2 + v^2}.$$

Donc  $\mathcal{R}e\left(\frac{u + iv}{u - iv}\right) = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}$  est le quotient de deux entiers, avec un dénominateur non

nul : on a bien  $\mathcal{R}e\left(\frac{u + iv}{u - iv}\right) \in \mathbb{Q}$ .

De même,  $\mathcal{I}m\left(\frac{u + iv}{u - iv}\right) = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$  est le quotient de deux entiers, donc  $\mathcal{I}m\left(\frac{u + iv}{u - iv}\right) \in \mathbb{Q}$ .

Donc  $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ .

5) a) Soit  $z_1 = \frac{15}{17} + i\frac{8}{17}$ .

$$15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 = 17^2 \text{ donc } z_1 \in \mathbb{V}.$$

On cherche un couple  $(u_1; v_1) \in A$  tel que  $z_1 = Z(u_1; v_1)$ .

$$\text{D'après la question précédente, on doit donc avoir } \begin{cases} \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} = \frac{15}{17} \\ \frac{2uv}{u^2 + v^2} = \frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\text{Il suffirait par exemple que } \begin{cases} u^2 - v^2 = 15 \\ 2uv = 8 \\ u^2 + v^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = 15 \\ uv = 4 \\ 2u^2 = 32 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

Or, en prenant  $u = 4$  et  $v = 1$ , ces trois égalités sont bien vérifiées.

$$\text{Donc } z_1 = \frac{15}{17} + i\frac{8}{17} = Z(4; 1).$$

$$(u_1; v_1) = (4; 1)$$

b) Soit  $z_2 = \frac{-8}{17} + i\frac{15}{17}$ .

$z_2 \in \mathbb{V}$  pour la même raison qu'à la question précédente.

De plus, le même raisonnement conduit à tenter de résoudre le système  $\begin{cases} \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} = \frac{-8}{17} \\ \frac{2uv}{u^2 + v^2} = \frac{15}{17} \end{cases}$

Cependant,  $2uv$  qui est pair ne peut clairement pas être égal à  $15 \dots$  Mais le système précédent peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} = \frac{-16}{34} \\ \frac{2uv}{u^2 + v^2} = \frac{30}{34} \end{cases}$$

Il suffirait par exemple que  $\begin{cases} u^2 - v^2 = -16 \\ 2uv = 30 \\ u^2 + v^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = -16 \\ uv = 15 \\ 2u^2 = 18 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

Or, en prenant  $u = 3$  et  $v = 5$ , ces trois égalités sont bien vérifiées.

Donc  $z_2 = \frac{-8}{17} + i\frac{15}{17} = Z(3; 5)$ .

$$(u_2; v_2) = (3; 5)$$

#### Exercice 4.

1)  $S_0(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$ .

2) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= k \times \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!(n-k)!} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\ &= n \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

3) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k \\ &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \quad \text{car le terme en } k=0 \text{ est nul} \\ &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \quad \text{d'après la question précédente et car } k \geq 1 \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\ &= n2^{n-1} \end{aligned}$$

4) Afin de simplifier l'expression des sommes  $S_2$  et  $S_3$ , on introduit la fonction

$$g_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kx} \end{cases}$$

a) Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kx} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^x)^k \times 1^{n-k} = (1 + e^x)^n.$$

b) Soit  $x$  un réel.

$$g'_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k e^{kx} \text{ puisque la dérivée d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées et que } (e^{kx})' = k e^{kx} \text{ pour tout entier } k \in \llbracket 0; n \rrbracket.$$

c) De même,  $g''_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 e^{kx}$  par linéarité de la dérivation.

d)  $g''_n$  est la dérivée seconde de  $g_n$  dont une expression est, pour  $x$  réel :  $g_n(x) = (1 + e^x)^n$ .

On a donc  $g'_n(x) = n e^x (1 + e^x)^{n-1}$ .

$$g''_n(x) = n e^x (1 + e^x)^{n-1} + n e^x \times (n-1) e^x (1 + e^x)^{n-2}$$

$$\text{et} \quad = n e^x (1 + e^x)^{n-2} (1 + e^x + (n-1)e^x)$$

$$= n e^x (1 + e^x)^{n-2} (1 + n e^x)$$

e) Par définition,  $S_2(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 = g''_n(0)$  d'après la question c).

Or d'après la question d),

$$g''_n(0) = n \times 1 \times (1 + 1)^{n-2} \times (1 + n) = n(n + 1)2^{n-2}$$

f)  $S_3(n) = g'''_n(0)$  de manière évidente, en dérivant l'expression de  $g''_n$  obtenue en question

c) et en évaluant en 0.

$$g'''_n(x) = n e^x (1 + e^x)^{n-2} (1 + n e^x) + n e^x \times (n-2) e^x (1 + e^x)^{n-3} (1 + n e^x) + n e^x (1 + e^x)^{n-2} \times n e^x$$

$$\text{Or} \quad = n e^x (1 + e^x)^{n-3} ((1 + e^x) (1 + n e^x) + (n-2) e^x (1 + n e^x) + (1 + e^x) n e^x)$$

$$= n e^x (1 + e^x)^{n-3} (1 + (n+1)e^x + n e^{2x} + (n-2)e^x + n(n-2)e^{2x} + n e^x + n e^{2x})$$

$$= n e^x (1 + e^x)^{n-3} (1 + (3n-1)e^x + n^2 e^{2x})$$

Donc  $S_3(n) = g'''_n(0) = n 2^{n-3} (n^2 + 3n)$ . C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_3(n) = n^2(n + 3)2^{n-3}$$