

# Techniques de calcul différentiel

## I. Généralités

**Ex. 4.1**

- Montrer que  $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ .
- Montrer que  $\forall (a; b; c) \in \mathbb{R}^3, ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$ .
- Montrer que  $\forall (a; b; c) \in \mathbb{R}^3, 3ab + 3bc + 3ac \leq (a + b + c)^2$ .

**Ex. 4.2**  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n$  des réels.

- Montrer que si  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 = n$  alors  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_i = 1$ .
- Est-il possible que  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 > n$ ?
- Trouver un exemple où  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 < n$ .

**Ex. 4.3** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  et représenter l'ensemble des solutions :

a.  $|x + 1| \leq 1$     b.  $|x - 1| \leq |x - 2|$     c.  $|2x - 1| - |x + 1| < |3x + 5|$

**Ex. 4.4** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  et représenter l'ensemble des solutions :

a.  $(y + 1)(y + 3) > (y + 1)^3$     b.  $(y + 2)(y + 3)y \leq 4y + 8$   
 c.  $\lambda \in \mathbb{R}$  donné,  $(\lambda^2 - 1)y^2 + 2\lambda y + 1 \geq 0$

**Ex. 4.5** Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle  $x$ , en effectuant un **changement d'inconnue** :

(A) :  $2e^{2x} - 5e^x + 2 \geq 0$     (B) :  $\cos(3x) + 2 \cos(x) \geq 0$  où  $x \in ]-\pi; \pi[$

**Ex. 4.6** On considère une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  périodique, admettant 2 et 3 comme période. Montrer que  $f$  est 1-périodique.

## II. Études de fonctions

**Ex. 4.7**

- Montrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$ .
- En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ .
- Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$ .
- Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ .
- Montrer que  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$ .
- Montrer que, pour tout entier  $n$  strictement supérieur à 1 et tout réel  $x$  **non nul et supérieur ou égal à  $-1$** , on a :

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

**Ex. 4.8 (Cor.)** Étude et représentation graphique de

$$f : x \mapsto \left| x - \sqrt{1 - x^2} \right|$$

**Ex. 4.9** Étudier la fonction  $P : x \in \mathbb{R} \mapsto x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2$ . Montrer que  $P(x) = 0$  possède exactement deux solutions réelles, dont une (que l'on ne cherchera pas à obtenir) dans l'intervalle  $]2; +\infty[$ .

**Ex. 4.10** Étudier la fonction  $g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 5)$ . Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  possède une unique solution réelle  $x_0$  (que l'on ne cherchera pas à obtenir). Montrer plus précisément que  $x_0 \in [1; 2]$ .

**Ex. 4.11** Ensemble de définition, parité, étude et représentation graphique de  $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ .

On montrera que  $h$  est bijective de son ensemble de définition sur un intervalle à préciser et on donnera une expression de sa bijection réciproque.

**Ex. 4.12 (Cor.)** [\*\*] Soit  $0 < a \leq b$ .  
On pose  $f : x \in ]0; +\infty[ \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ .

Étudier la monotonie de  $f$ . En déduire l'inégalité

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$$

**Ex. 4.13**

1. Montrer que, pour tout  $x \in ]0; 1[$ , on a les inégalités
 
$$\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$$
2. Pour  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{(p+1)n}$ . Déterminer la limite de la suite  $(S_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Ex. 4.14 Sinus cardinal** [\*\*] On appelle *sinus cardinal* et on note  $\text{sinc}$  la fonction définie par

$$\text{sinc} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \\ 0 & \mapsto 1 \end{cases}$$

1. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ .
2. Déduire de la question précédente que  $\text{sinc}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. Quel est l'ensemble de dérivabilité à *priori* de  $\text{sinc}$  ?
4. Montrer que  $\text{sinc}$  est dérivable en 0. Que peut-on en déduire concernant l'ensemble sur lequel  $\text{sinc}$  est dérivable ?
5. Montrer que  $\text{sinc}$  possède un maximum que l'on précisera.
6. Montrer que  $\text{sinc}'$  change de signe une infinité de fois.
7. Tracer une représentation graphique rapide de  $\text{sinc}$  (on ne cherchera pas à préciser les intervalles sur lesquels  $\text{sinc}$  est monotone).
8. Montrer que  $\text{sinc}'$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

## Corrections

**Cor. 4.8** :  $f(x)$  est définie si et seulement si  $1 - x^2 \geq 0$ . Donc  $f$  est définie sur  $[-1; 1]$ .

Étudions le signe de  $x - \sqrt{1-x^2}$  :

$x - \sqrt{1-x^2} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{1-x^2}$ . Cette inégalité est vérifiée pour tout  $x \in [-1; 0]$ . Considérons l'autre cas possible à savoir  $x \in ]0; 1]$ . Dans ce cas, l'inégalité porte sur deux quantités positives, la fonction carré est bijective croissante de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$  donc

$$x \leq \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 \leq 1-x^2 \Leftrightarrow x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ En résumé :}$$

- si  $x \in \left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ,  $f(x) = \sqrt{1-x^2} - x$ . Sur cet intervalle,  $f$  est dérivable

si et seulement si  $1 - x^2 \neq 0$ . Donc  $f$  est dérivable sur  $\left]-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ . On a

alors :

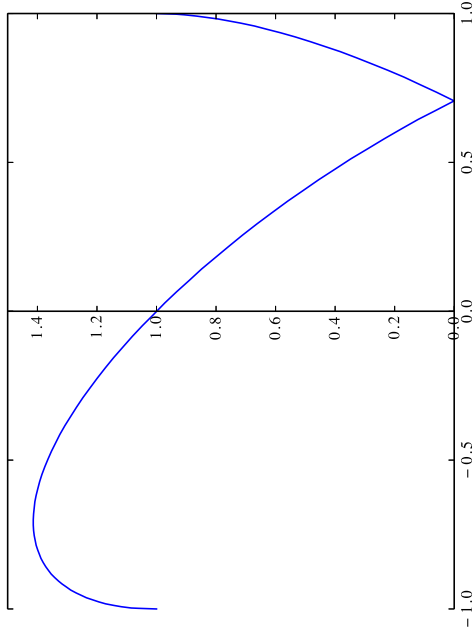
$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - 1 = \frac{-x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ On étudie à nouveau le signe de } f'(x) \text{ qui est celui de son numérateur.}$$

Or on remarque que  $-x - \sqrt{1-x^2} = (-x) - \sqrt{1-(-x)^2} = u - \sqrt{1-u^2}$  en posant  $u = -x$ . L'étude du signe de cette dernière expression a déjà été faite et on conclut que

$$f'(x) \geq 0 \text{ pour } x \in \left[-1; \frac{-\sqrt{2}}{2}\right] \text{ et } f'(x) \leq 0 \text{ pour } x \in \left[\frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

- de même, si  $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$ ,  $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$  et une étude similaire conduit à prouver que  $f$  est strictement croissante sur cet intervalle.

Valeurs de $x$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
Signe de $f'(x)$		+	-	+
Variations de $f(x)$	↗	↘	↗	↘



**Cor. 4.12 :**

- Commençons par justifier que  $f$  est bien définie sur  $]0; +\infty[$ .  
Soit  $x > 0$ ,  $0 < a \leq b$  donc  $0 < ax \leq bx$  et par conséquent  $1 < 1 + ax \leq 1 + bx$ .  
Donc  $\ln(1 + ax)$  et  $\ln(1 + bx)$  sont bien définies et strictement positives.  
Donc  $f(x) = \frac{\ln(1 + ax)}{\ln(1 + bx)}$  est bien définie (son numérateur et son dénominateurs sont définis, et son dénominateur ne s'annule pas).  
De plus, cette étude montre aussi que  $0 < f(x) \leq 1$ .  
 $f$  est aussi dérivable comme quotient de fonctions dérivables et,  $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{a}{1+ax} \ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx} \ln(1+ax)}{\ln(1+bx)^2} \\ &= \frac{a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)^2(1+ax)(1+bx)} \end{aligned}$$

L'étude précédente prouve que le dénominateur de cette expression est

strictement positif,  $f'(x)$  est donc du signe de son numérateur.

- Étudions donc le signe de  $a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$ .

$$a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2bx} \times \frac{1}{a^2bx} \ln(1+bx) \geq \left(\frac{1}{ax} + 1\right) \ln(1+ax)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2bx} \ln(1+bx) \geq \left(\frac{1}{ax} + 1\right) \ln(1+ax)$$

Montrons que cette dernière inégalité est toujours vérifiée : comme  $bx \geq ax > 0$ , il suffit pour cela de démontrer que la fonction

$$g : u > 0 \mapsto \left(\frac{1}{u} + 1\right) \ln(1+u) = \frac{u}{(u+1)\ln(u+1)}$$

est croissante.

$$\text{Or, } g'(u) = \frac{u^2}{(\ln(u+1)+1)u - (u+1)\ln(u+1)} = \frac{u - \ln(u+1)}{u^2} \geq 0$$

$$\text{car } \forall u \in ]-1; +\infty[ \ln(1+u) \leq u.$$

Donc  $g$  est bien croissante, et par conséquent,  $g(bx) \geq g(ax)$ .

D'après ce qui précède, ceci prouve que  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) \geq 0$ .

- Nous avons donc montré que  $f$  est croissante.

Il s'agit d'en déduire maintenant que  $\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$ .

Par hypothèse,  $0 < a \leq b$ . La fonction inverse étant décroissante sur  $\mathbf{R}_+^*$ , on a donc aussi

$$0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}.$$

Or  $f$  est croissante, donc  $f\left(\frac{1}{b}\right) \leq f\left(\frac{1}{a}\right)$ .

Ceci achève la démonstration puisque :

$$f\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)}{\ln(1+1)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)}{\ln(2)}$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\ln(1+1)}{\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)}$$

et qu'en remplaçant dans l'inégalité précédente on obtient, comme l'énoncé l'affirmait,

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$$