Nombres complexes : équations et géométrie

Remarque

On trouve sur internet une banque d'exercices d'oraux corrigés pour le concours CCP MP 2024. La plupart de ces exercices ne sont pas compréhensibles en Maths Sup, mais certains d'entre eux concernent en fait le programme de première année. Lorsque des exercices (du cours ou des feuilles d'exercices) seront extraits de cette banque, ils seront indiqués par ***CCP MP Année - n°xx***. Le numéro donné permet d'aller rechercher dans la banque d'exercices la solution officielle donnée.

Adresse internet de la banque d'exercices :

https://www.concours-commun-inp.fr/_resource/annales%20oraux/MP/2024/banque%20finale%20avec%20corr_2024.pdf

I. Rappels, utilisation en géométrie

Ex. 5.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants :

$z = 1 + i\tan(\alpha) \qquad \frac{z}{\overline{z}} \qquad \frac{1}{z}$

Ex. 5.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $z = \dfrac{1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}$.

Calculer $|z|$ et $\operatorname{Arg} z$.

Ex. 5.3 On considère deux complexes $z_1 \in \mathbb{U}$ et $z_2 \in \mathbb{U}$ tels que $z_1z_2 \neq -1$.

Montrer que $Z = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel.

Ex. 5.4 Soient u et v deux nombres ***complexes***. Montrer que

$$|u+iv|^2 = u^2+v^2 \Leftrightarrow \left(u+iv=0 \quad \textbf{ou} \quad (u;v)\in\mathbb{R}^2\right)$$

Ex. 5.5 [$*$]***Mines M 1994*** Étudier l'ensemble E des complexes z tels que z, z^2 et z^5 sont alignés.

Ex. 5.6 Soient z et z' deux complexes distincts de module égal à 1.

1. Montrer que $\overline{(z+z')}(z-z') \in i\mathbb{R}$.
2. En déduire que les bissectrices intérieures et extérieures de deux droites sécantes sont orthogonales.

II. Utilisation en algèbre

Ex. 5.7 Calculer les ***deux racines carrées*** des nombres complexes suivants :

$A = 5+12i \qquad B = 4i-3 \qquad C = 8-15i \qquad D = 40+9i$

Ex. 5.8 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$E : z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i = 0$.

Quelle particularité présente le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de cette équation ?

Ex. 5.9 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :

$E_1 : e^z = 1+i \qquad E_2 : e^z = e^{1+i}$

Ex. 5.10 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :

$E_1 : z^2+z+5=0 \qquad E_2 : z^6 = \dfrac{1+i}{4\sqrt{6}-i4\sqrt{2}}$

$E_3 : 1+z+z^2+z^3+z^4=0 \qquad E_4 : z^2 = -3+4i$

$E_5 : (1+i)z^2 - z - 1 + i = 0 \qquad E_6 : \theta\in\mathbb{R}, z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$

$E_7 : z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$

$E_8 : z^3 - (3+2i)z^2 + (3+11i)z - 2(1+7i) = 0$

$E_9 : (z^2+4z+1)^2 + (3z+5)^2 = 0$

Ex. 5.11 (Cor.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation

$$nz^n = z^{n-1} + ... + z + 1$$

1. Résoudre (E_1), (E_2), (E_3).

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 1 est solution de (E_n).
3. Montrer que si $|z| > 1$ alors $n|z^n| > |z^{n-1} + ... + z + 1|$.
4. On suppose que $z = e^{i\theta} \neq 1$ est solution de (E_n).

   Montrer que $ne^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} = \dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.
5. Montrer que 1 est la seule racine de (E_n) de module 1.
6. Conclure.

Ex. 5.12 ***CCP MP 2024 - n°84***

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul. (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre)
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions de l'équation (E) : $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Ex. 5.13 Soient $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Écrire $S = 1 + z + ... + z^{n-1}$ sous la forme d'un quotient.
2. En déduire que pour tout entier $n > 1$, la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle.

Ex. 5.14 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) + zf(1-z) = 1 + z$$

Corrections

Cor. 5.11 :

1. $(E_1) : z = 1$.
   $(E_2) : 2z^2 = z + 1$.
   $\Delta = 1 + 8 = 9$ conduit aux deux solutions $z_1 = 1$ et $z_2 = \dfrac{-1}{2}$.
   $(E_3) : 3z^3 = z^2 + z + 1$.
   On lit la question suivante :-), et on note que $z_1 = 1$ est racine évidente.
   D'où
   $(E_3) \Leftrightarrow (z-1)\big(3z^2 + 2z + 1\big) = 0$.
   $\Delta = 4 - 12 = -8$ conduit aux deux autres solutions $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{2}}{3}$ et $z_3 = \dfrac{-1 - i\sqrt{2}}{3}$.
2. D'une manière générale, (E_n) s'écrit $nz^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$.
   Pour $z = 1$, les membres de droite et de gauche de l'équation valent n. Donc 1 est solution de (E_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Supposons $|z| > 1$. Alors d'après l'inégalité triangulaire
   $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k\right| < n|z|^{n-1} < n|z|^n$.
   On en déduit immédiatement que (E_n) n'a aucune solution de module strictement supérieur à 1.
4. Soit $z = e^{i\theta} \neq 1$ une solution de (E_n). Alors
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{n\theta}{2}} - e^{i\frac{n\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = e^{i\frac{(n-1)\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$. En remplaçant dans (E_n) on obtient
   $ne^{in\theta} = e^{i\frac{(n-1)\theta}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Leftrightarrow ne^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} = \dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.
5. En gardant les mêmes notations que dans la question précédente, supposons que (E_n) admette une racine de module 1 distincte de $z = 1$. Le résultat précédent conduit en identifiant les ***parties réelles*** des deux membres à
   $$\begin{aligned} (E_n) \quad &\Rightarrow \quad n\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{(n+1-1)\theta}{2}\right) \\ &\Rightarrow \quad n\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (n+1)\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$
   L'identification des ***parties imaginaires*** conduit quant à elle immédiatement à $\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) = 0$ et donc à $\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) = 1$.
   La conjonction de ces deux identités permet donc d'affirmer que si $z = e^{i\theta} \neq 1$ est solution de (E_n) alors
   $\frac{\theta}{2} \equiv 0\,[\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv 0\,[2\pi]$ ce qui est absurde puisque $z \neq 1$.
   Donc la seule racine de module 1 est 1.
6. Les questions c, d, et e permettent d'affirmer que si z est solution de (E_n) alors $z = 1$ ou $|z| < 1$.