Maths - Chapitre 7

Équations différentielles et calcul intégral

L'objectif de ce chapitre est de donner quelques outils de résolution des équations différentielles. En commençant par la plus simple de toute : étant donnée une fonction f, trouver une fonction F telle que $F' = f$.

I. Calcul pratique des intégrales et des primitives

Dans ce qui suit, I est un intervalle ***réel*** contenant une infinité de points.

I.1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^0$

Définition 7.1 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^0$)

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est ***de classe*** $\mathcal{C}^0$ ***sur*** I si f est continue sur I.

Notation

Pour $J \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^0(I, J)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans J. On note donc $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ pour signifier qu'une fonction f est définie sur I, à valeurs dans J et continue sur I.

I.2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 7.2 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***sur*** I si f est dérivable sur I et si f' ***est continue*** sur I.

Notation

Pour $J \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^1(I, J)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J. On note donc $f \in \mathcal{C}^1(I, J)$ pour signifier qu'une fonction f est définie sur I, à valeurs dans J et dérivable (donc continue) sur I ***et de dérivée*** f' ***continue sur*** I.

I.3. Intégrales et primitives

a) Primitivation « à vue »

On dit qu'on primitive ***« à vue »*** une fonction lorsque l'obtention d'une primitive se fait en n'utilisant que :

- les primitives des fonctions de référence ;

- le fait que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$, une primitive de $\lambda f' + \mu g'$ est $\lambda f + \mu g$;
- les formules habituelles de dérivation (mais utilisées « à l'envers »...) ;
- notamment, le fait qu'une primitive de $u' \times f' \circ u$ est $f \circ u$.

Ex. 7.1 Donner une primitive des fonctions suivantes :

$f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$ $\quad$ $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x) + 2\sin(2x)$ $\quad$ $f_3 : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

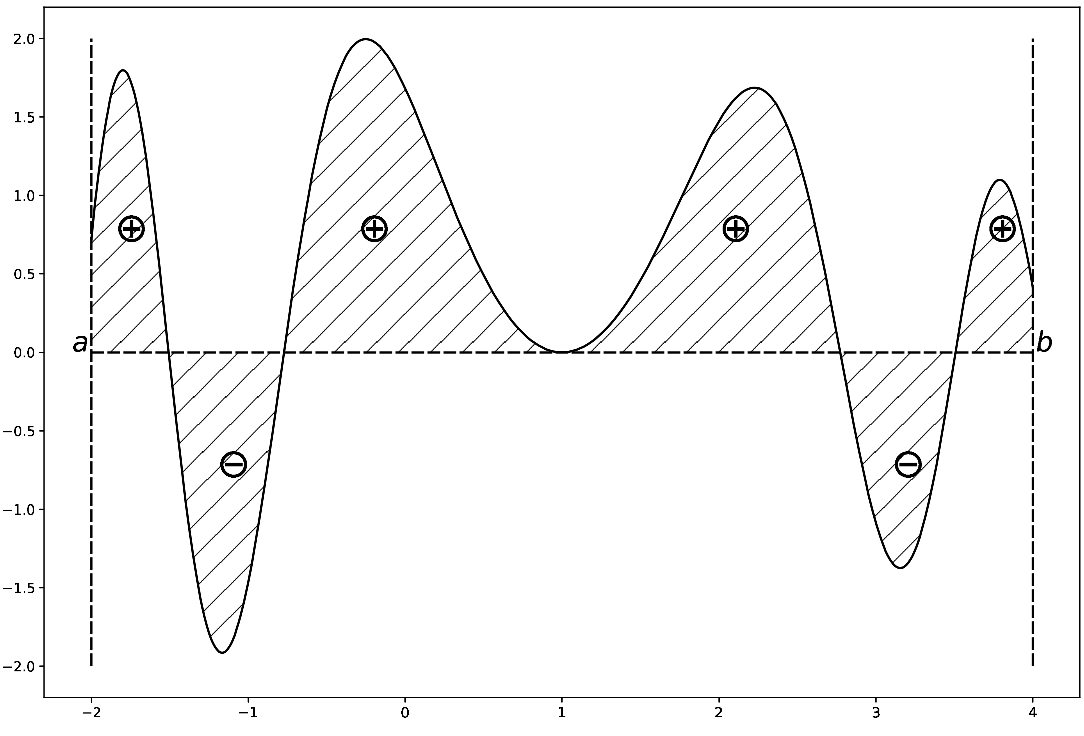
$f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1+2x}{1+x^2}$ $\quad$ $f_5 : x \in]-1;1[\mapsto \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $f_6 : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (1+x^2)^3$

b) Définition/interprétation d'une intégrale

Étant donnés :

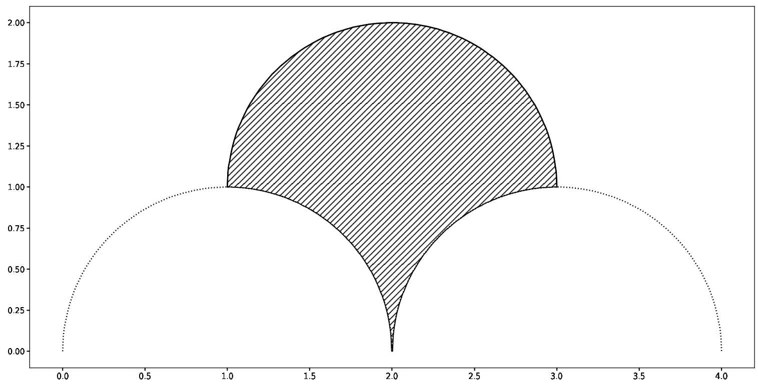
- $a < b$ deux réels de l'intervalle I
- f une fonction continue sur I ***à valeurs réelles***

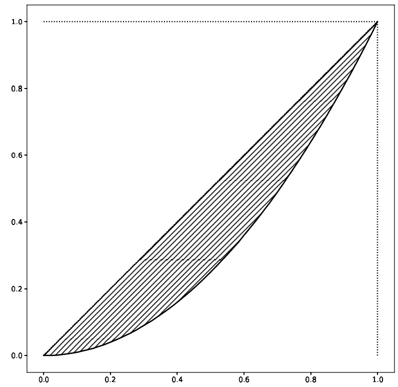
nous donnerons en fin d'année une ***définition*** de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ qui permet d'interpréter sa valeur comme ***l'aire algébrique*** (c'est-à-dire pouvant être positive ou négative) de la portion du plan représentée ci-dessous (à condition que le repère soit orthonormé).



Si $b < a$***, on pose*** $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$

Ex. 7.2 Calculer l'aire des parties hachurées ci-dessous :





Indications : sur la figure de gauche, les trois cercles sont de rayon 1, leurs centres ont pour coordonnées $C_1(1;0)$, $C_2(3;0)$ et $C_3(2;1)$.
Sur la figure de droite, la portion hachurée se trouve entre la courbe d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = x$.

c) Propriétés de l'intégrale

Étant donnés $a \in I, b \in I, f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C}), g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$:

- ***Linéarité*** :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \mu \in \mathbb{C}, \int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t) \mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t) \mathrm{d}t$$

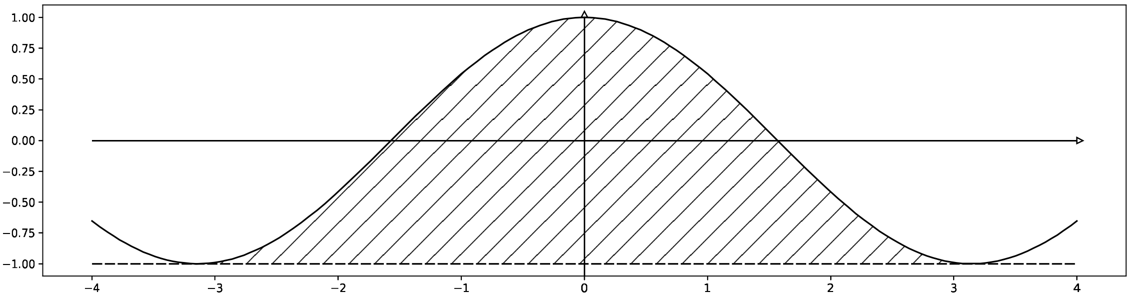
- ***Croissance*** :
  Si f et g sont ***à valeurs réelles***,
  si $a < b$,
  et si $\forall t \in [a;b], f(t) \leqslant g(t)$,

$$\text{alors } \int_a^b f(t) \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t) \mathrm{d}t.$$

- ***Relation de Chasles*** :

$$\forall (a;b;c) \in I^3 \text{ (sans hypothèse sur leur ordre)}, \int_a^b f(t) \mathrm{d}t + \int_b^c f(t) \mathrm{d}t = \int_a^c f(t) \mathrm{d}t$$

Ex. 7.3 On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, la fonction cos.
Que vaut l'aire hachurée ?



Ex. 7.4

1) Calculer $\mathcal{I} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1)$.

d) Théorème fondamental du calcul intégral

Si f est une fonction continue sur I, alors d'après le théorème fondamental du calcul intégral (proposition 4.33 page 65), quel que soit $a \in I$, $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f, donc une ***fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur*** I (puisque sa dérivée f est continue).

Méthode : Primitives et intégrales

- Si f est une fonction continue sur I dont ***on connaît une primitive*** F, alors pour $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.
- Si f est une fonction continue sur I dont ***on ne connaît pas de primitive***, alors pour $a \in I$, $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ en est une.
  L'ensemble de toutes les primitives de f est obtenu en rajoutant à cette primitive particulière une constante (réelle ou complexe suivant les cas) quelconque.
  Les techniques de calcul d'intégrale que nous allons voir durant cette section peuvent alors ***parfois*** permettre d'obtenir une expression d'une primitive de f. Cependant, même lorsque le TFCI garantit l'existence de primitives, il est ***parfois impossible d'en obtenir une expression***.

Notation

On note $[F(t)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$. On a donc pour une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$ de primitive F :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Lorsqu'on cherche ***une primitive quelconque*** d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$, on notera souvent $x \in I \mapsto \displaystyle\int^x f(t)\mathrm{d}t$ une telle primitive. En utilisant la notation précédente, l'absence de borne inférieure dans l'intégrale s'interprète de la façon suivante :

$$\int^x f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]^x = F(x)$$

Ex. 7.5 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_{1/x}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0$.

Cor. 7.5

Ex. 7.6 Calculer $A(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(xt)\mathrm{d}t$.

Indication : on distinguera les deux cas $x = 0$ et $x \neq 0$.

I.4. Intégration par partie

Proposition 7.3 (Intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $(a;b) \in I^2$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Ex. 7.7 Trouver l'ensemble des primitives de $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$.

Cor. 7.7

Ex. 7.8 Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto xe^x$.

Cor. 7.8

Ex. 7.9 (Cor.) Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x\cos(x)$.

I.5. Changement de variable

Proposition 7.4 (Changement de variable)

Soit ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f continue sur $J = \phi(I)$. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f \circ \phi(t) \times \phi'(t)\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f\big(\phi(t)\big) \times \phi'(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Méthode : Changement de variable dans une intégrale

En pratique, dans $\displaystyle\int_A^B f(u)\mathrm{d}u$, on effectue très souvent le changement de variables en utilisant une ***bijection*** $\phi : [a,b] \to [A,B]$. Cependant, la proposition 7.4 est valable sous la forme donnée y compris ***si ϕ n'est pas bijective***.

1) On pose $u = \phi(t)$ et on calcule $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \phi'(t)\mathrm{d}t$.
2) On calcule la bijection réciproque $t = \psi(u)$.
3) On remplace dans l'intégrale : $\displaystyle\int_{u=A}^{u=B} f(u)\mathrm{d}u = \int_{t=\psi(A)}^{t=\psi(B)} f(\phi(t))\,\phi'(t)\mathrm{d}t$.

On peut aussi poser $t = \psi(u)$ et adapter la méthode précédente.

Ex. 7.10 Calculer $L = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$.

Cor. 7.10

Ex. 7.11 Calculer $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$.

Cor. 7.11

Ex. 7.12 Calculer une primitive des fonctions $f : x \in]-1;1[\mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{x^2+9}$ et $h : x \in]-1;+\infty[\mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+1}$.

Cor. 7.12

Méthode : Primitives des fonctions du type $x \mapsto \dfrac{\alpha}{ax^2+bx+c}$

Les trois ***méthodes*** utilisées pour l'obtention de primitives dans l'exercice 7.12 sont ***à connaître***. Voici un résumé de ces méthodes :

1) On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du dénominateur.
2) Suivant le signe de Δ, **sur chaque intervalle où la fonction est définie** :
   a) si $\Delta > 0$, l'équation $at^2 + bt + c = 0$ possède deux solutions $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
   On écrit $I(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int^x \frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)}\mathrm{d}t$ puis on cherche $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\dfrac{1}{(t-t_1)(t-t_2)} = \dfrac{A}{t-t_1} + \dfrac{B}{t-t_2}$ ce qui permet de calculer $I(x)$.
   b) si $\Delta = 0$, l'équation $at^2 + bt + c = 0$ possède une solution double $t_0 \in \mathbb{R}$.

On écrit $I(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int^x \dfrac{1}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t$ qui se calcule simplement :

$I(x) =$ ....

c) si $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.
On écrit $I(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int^x \dfrac{1}{(t+A)^2+B}\mathrm{d}t$ pour éliminer le terme en t du dénominateur. Le dénominateur ne s'annulant pas, on a alors forcément $B > 0$ ce qui permet d'obtenir l'intégrale à l'aide de changement(s) de variable(s).

3) Si l'on souhaite obtenir **l'ensemble des primitives sur un intervalle où l'intégrande est définie**, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, toutes les primitives s'obtiennent à partir de celle calculée en rajoutant un terme constant.

Pour les fonctions du type $x \mapsto \dfrac{ux+v}{ax^2+bx+c}$, on élimine le terme ux du numérateur en faisant apparaître la dérivée du dénominateur (voir exercice suivant).

Ex. 7.13 Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+4}$.

Cor. 7.13

Ex. 7.14 (Cor.) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t = k$$

Ex. 7.15 (Cor.) Calculer $I(x) = \displaystyle\int^x \dfrac{\mathrm{d}t}{5t^2+2t+1}$ en précisant le ou les ***intervalle(s)*** sur lesquels on effectue l'intégration.

Ex. 7.16 (Cor.) Calculer $J(x) = \displaystyle\int^x \dfrac{\mathrm{d}t}{3t^2+4t+1}$ en précisant le ou les ***intervalle(s)*** sur lesquels on effectue l'intégration.

I.6. Primitives usuelles

Primitives usuelles

Le tableau suivant donne les primitives à connaître. La colonne « Validité » indique les intervalles maximaux de validité de la primitive fournie. Lorsqu'on cherche une primitive sur une réunion d'intervalles, on doit a priori prendre ***des constantes d'intégration différentes sur chaque intervalle***. Le tableau peut aussi se lire « à l'envers » : pour chaque primitive donnée, la colonne de gauche fournit sa dérivée. Enfin, les primitives de tan s'obtiennent en écrivant $\tan = \dfrac{-\cos'}{\cos}$, celles de $\dfrac{1}{\sin(x)}$ ou $\dfrac{1}{\cos(x)}$ de la même manière que dans l'exercice 7.11

et celles des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{a^2 \pm x^2}$ à l'aide de l'exercice 7.12.
Lorsque ce n'est pas précisé, a ***est un réel strictement positif et*** k ***un entier relatif***.

Fonction	**Primitive**	**Validité**
$x \mapsto x^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* \text{ et } \mathbb{R}_-^* & \text{si } a \in \mathbb{Z}_-^* \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\|x\|$	$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \ln\|x\|$	$x \mapsto x\ln\|x\| - x$	$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{e}^{cx},\ c \in \mathbb{C}^*$	$x \mapsto \frac{1}{c}\mathrm{e}^{cx}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln\|\cos(x)\|$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$	$]-1,1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$

I.7. Primitives particulières

Méthode : Calcul des primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$

On écrit $e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\sin(bx) = e^{(a+ib)x}$, dont on connaît les primitives. On passe ensuite à la partie réelle ou imaginaire suivant ce que l'on cherche.

Ex. 7.17 Calculer l'ensemble des primitives de $x \mapsto e^x(\cos x + \sin x)$.

Cor. 7.17

Méthode : Polynômes trigonométriques

Pour primitiver un polynôme trigonométrique (c'est-à-dire une somme d'expressions du type $\cos^n(x)\sin^p(x)$), on le ***linéarise***.

Ex. 7.18 Calculer l'ensemble des primitives de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos^2(x)$ et de $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^3(x)$.

Cor. 7.18

II. Équations différentielles

II.1. Généralités

Définition 7.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I \subset \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{C}$ n fois dérivable de dérivées continues.
On appelle ***équation différentielle d'ordre*** n ***sur*** I une relation satisfaite pour tout $t \in I$ par $y(t)$, $y'(t)$, ..., $y^{(n)}(t)$.

Parmi les équations différentielles que l'on rencontre en physique, on peut par exemple citer :

- Oscillateur harmonique : $y'' + \omega_0^2 y = 0$
- Pendule pesant : $\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

Ex. 7.19 (Cor.) La fonction tangente est solution sur $I = \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle du premier ordre : $y' = 1 + y^2$.
Trouver toutes les solutions de cette équation différentielle définies de I dans $\mathbb{R}$.

II.2. Équations différentielles linéaires

Définition 7.6

On dit qu'une équation différentielle est ***linéaire*** lorsqu'elle s'écrit

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

où $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ et b sont des fonctions continues définies sur I.
On dit qu'elle est ***à coefficients constants*** lorsque $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ sont des fonctions ***constantes***.
On dit qu'elle est ***homogène*** ou ***sans second membre*** lorsque $b = 0$. Sinon on dit qu'elle est ***avec second membre***.

Ex. 7.20 Expliciter la nature des équations différentielles suivantes :

- Oscillateur harmonique :...
- Pendule pesant :...
- $xy''' + 2y'' - y = \cos(x)$ est. ....

III. Linéaires du premier ordre

III.1. À propos de l'annulation des solutions d'une EDL1 (hors-programme)

Définition 7.7

Soit I un intervalle.
On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ ***s'annule sur*** I si et seulement si

$$\exists x \in I, f(x) = 0$$

On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ ***est nulle sur*** I si et seulement si

$$\forall x \in I, f(x) = 0$$

On appelle ***fonction nulle*** (définie sur I) la fonction

$$N_I : x \in I \mapsto 0$$

Proposition 7.8

La fonction nulle est solution de toute équation différentielle linéaire ***homogène***.

Démonstration

Ex. 7.21 Vérifier que la fonction cos est solution de l'équation différentielle linéaire

$$\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$$

Cor. 7.21

La proposition et l'exercice précédent montrent que, en dehors même de la fonction nulle qui est toujours solution des équations différentielles linéaires ***homogènes***, il existe des ***solutions d'une EDL1 homogène non nulles qui s'annulent***, et même qui s'annulent une infinité de fois.

Ex. 7.22 Soit $(E) : u(x)y' + v(x)y = 0$ une EDL1 homogène, avec u et v deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que u s'annule en $x_0 \in I$ et que $v(x_0) \neq 0$.
Montrer que toute solution de (E) s'annule en x_0.

Cor. 7.22

Méthode

Comme nous allons le voir, les théorèmes du cours ne donnent de solutions que pour les équations différentielles homogènes du type $(E_n) : y' + a(x)y = 0$ appelée ***équations différentielles sous forme normale***.
Pour résoudre les équations différentielles plus générales de la forme $(E) : u(x)y' + v(x)y = 0$, la méthode à utiliser sera la suivante :

- sur tout intervalle où la fonction u ne s'annule pas, on résout l'équation différentielle

$(E_0) : y' + \dfrac{v(x)}{u(x)} y = 0$ qui est sous forme normale ;

- au(x) point(s) x_0 où la fonction u s'annule, on tente de faire un ***recollement*** $\mathcal{C}^1$ des solutions obtenues sur les intervalles de part et d'autre de x_0 (voir exercice 7.23).
  Parfois ce recollement est possible, parfois il ne l'est pas.
  Lorsque le recollement est possible, l'exercice précédent montre que les solutions s'annulent nécessairement.

III.2. Sans second membre

Théorème 7.9

Étant donnée une fonction $a : I \to \mathbb{C}$ continue et $A : I \to \mathbb{C}$ l'une de ses primitives, l'équation $y' + a(t)y = 0$ a pour solutions $y : t \in I \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{C}$ et il existe une unique solution vérifiant la condition initiale $t_0 \in I, y(t_0) = k_0$ où $k_0 \in \mathbb{C}$.

Démonstration

Remarque

Le théorème précédent complète les résultats énoncés au paragraphe III.1. : si y est une solution ***non nulle*** d'une EDL1 homogène ***sous forme normale*** sur un intervalle I, alors y ***ne s'annule pas sur*** I.
En effet, quel que soit le complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$,
$|e^z| = e^a \times \left|e^{ib}\right| = e^a > 0$, donc $e^z \neq 0$.
Mais cela n'avait rien d'évident à priori.

Ex. 7.23 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $xy' - 2y = 0$.
Résoudre la même équation sur $\mathbb{R}_-^*$.
En déduire les solutions de $xy' - 2y = 0$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Cor. 7.23

III.3. Équations avec second membre

Théorème 7.10

Étant données deux fonctions $a, b : I \to \mathbb{C}$ continues, l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1(I)$ de l'équation différentielle $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de l'équation homogène associée.

Démonstration

Méthode : Méthode de variation de la constante

Pour obtenir une solution particulière de l'équation (E) avec second membre, on résout d'abord l'équation homogène (E') associée dont la solution est de la forme $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
On recherche alors une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$: en remplaçant $y(t)$ dans (E), on obtient $\lambda'(t)$ et une solution particulière y_p de (E) après intégration.

Ex. 7.24 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ $(E_1) : y' - \frac{2}{x}y = x^2$ puis $(E_2) : y' - \frac{2}{x}y = 1 - \ln(x)$.

Cor. 7.24

III.4. Principe de superposition

Théorème 7.11 (Principe de superposition)

Étant données deux fonctions b_1 et b_2 continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$,
si y_1 est une solution particulière de $y' + a(t)y = b_1(t)$ sur I et
si y_2 est une solution particulière de $y' + a(t)y = b_2(t)$ sur I,
alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $(E) : y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$ sur I.

Démonstration

Méthode : Principe de superposition

Le théorème précédent est utilisé de la façon suivante :

- lorsque le second membre $b(t)$ d'une équation différentielle est une somme de fonctions on peut tenter d'obtenir des solutions particulières associées à chacun de ses termes puis faire la somme des solutions obtenues pour avoir une solution particulière de l'équation d'origine ;
- dans certains cas au contraire, on peut tenter en ajoutant et retranchant une même expression au second membre de se ramener à des termes plus faciles à intégrer.

Ex. 7.25 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E) : y' - \frac{2}{x}y = \ln(x)$.

Cor. 7.25

III.5. Exercices

Ex. 7.26 Résoudre l'équation différentielle $y' + y = x + 1$.

Cor. 7.26

Ex. 7.27 Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = \cos^2(x)$.

Cor. 7.27

Ex. 7.28 (Cor.) Résoudre pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'équation différentielle $y' - iy = -i\,(e^{it} + 1)$.

IV. Linéaires du second ordre

Dans tout ce qui suit, $a, b \in \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.
On cherche les solutions y deux fois dérivables à dérivées continues de l'équation différentielle ***linéaire d'ordre deux à coefficients constants***

$$(E) : y'' + ay' + by = f(t)$$

On note (E') l'équation homogène associée.

IV.1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Définition 7.12 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$)

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est ***de classe $\mathcal{C}^2$ sur*** I si f est deux fois dérivable sur I et si f'' ***est continue*** sur I.

Notation

Pour $J \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^2(I, J)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I à valeurs dans J. On note donc $f \in \mathcal{C}^2(I, J)$ pour signifier qu'une fonction f est définie sur I, à valeurs dans J, dérivable deux fois (donc continue) sur I ***et de dérivée seconde f'' continue sur*** I.

IV.2. Équation homogène

Remarque

Soit $(E') : y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants. Cherchons, par analogie avec les équations différentielles linéaires du premier ordre, les solutions de (E') du type $x \mapsto e^{rx}$ où r est une constante ***réelle ou complexe***.

....

....

....

Définition 7.13 (Équation caractéristique)

Étant donnée (E') : $y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants, on appelle ***équation caractéristique*** de (E') l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Théorème 7.14

Soit (E') : $y''+ay'+by = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients complexes constants et $r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.
Alors les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de (E') sont :

- si $\Delta \neq 0$, en notant r_1 et r_2 les racines complexes de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t), (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

- si $\Delta = 0$, en notant r_0 la racine complexe de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto (At + B) \exp(r_0 t), (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

Démonstration

Remarque

Dans les deux cas y s'écrit $y = Ay_1 + By_2$ où A et B sont des constantes réelles ou complexes. On dit que y est ***combinaison linéaire de*** y_1 ***et*** y_2 ou encore que y peut s'exprimer ***dans la base de fonctions*** (y_1, y_2).

Ex. 7.29 Résoudre pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'équation différentielle $y'' - (1 + i)y' + iy = 0$.

Cor. 7.29

IV.3. Solutions réelles de l'équation homogène à coefficients réels

Théorème 7.15

Soit (E') : $y''+ay'+by = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients ***réels*** constants.
Soit $r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.
Alors les solutions ***à valeurs réelles*** de (E') sont :

- si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les racines ***réelles*** de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- si $\Delta = 0$, en notant r_0 la racine ***réelle*** de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto (At + B) \exp(r_0 t), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- si $\Delta < 0$, en notant $\alpha + i\omega$ et $\alpha - i\omega$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto \exp(\alpha t)\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Cette dernière solution peut aussi s'écrire $y : t \mapsto Y_0 \exp(\alpha t)\cos(\omega t + \phi), (Y_0, \phi) \in \mathbb{R}^2$ (voir exercice **??** page **??**) .

Démonstration

Remarque

Là encore, dans tous les cas y s'écrit $y = Ay_1 + By_2$. À nouveau, y est ***combinaison linéaire de*** y_1 et y_2 ou encore y peut s'exprimer ***dans la base de fonctions*** (y_1, y_2).

Ex. 7.30 Résoudre pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 6y' + 18y = 0$.

Cor. 7.30

IV.4. Équation avec second membre

Théorème 7.16

Étant donnés $(a; b) \in \mathbb{K}^2$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$ est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de l'équation homogène associée.

Le principe de superposition reste lui aussi valable et les démonstrations sont identiques au cas du premier ordre.

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle avec second membre, on résout tout d'abord l'équation homogène associée, puis on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre.
La méthode de variation de la constante est parfois encore applicable mais en pratique, seuls sont au programme de PCSI les seconds membres de la forme De^{ct} avec $(D, c) \in \mathbb{C}^2$ qui permettent aussi de traiter les seconds membres du type $De^{ut}\cos(vt)$ ou $De^{ut}\sin(vt)$ en passant à la partie réelle ou imaginaire.
Dans ce cas on cherche une solution particulière de la forme

1) $t \mapsto Ue^{ct}$ lorsque c n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
2) $t \mapsto Ute^{ct}$ lorsque c est solution simple de l'équation caractéristique ;
3) $t \mapsto Ut^2e^{ct}$ lorsque c est solution double de l'équation caractéristique.

Ex. 7.31 Donner l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 2y = e^{-t}\cos(t)$.

Cor. 7.31

IV.5. Unicité des solutions

Théorème 7.17

Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ alors il existe une unique solution de l'équation différentielle

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(t)$$

vérifiant les ***conditions initiales*** $\left\{ \begin{array}{rcl} y(t_0) & = & v_0 \\ y'(t_0) & = & v_1 \end{array} \right.$ où $t_0 \in \mathbb{R}$, $(v_0; v_1) \in \mathbb{K}^2$.

Démonstration

Explicitement hors-programme.

Correction des exercices

Cor. 7.9 : On intègre par parties : $\displaystyle\int^x t\cos(t)\mathrm{d}t = [t\sin(t)]^x - \int^x \sin(t)\mathrm{d}t = x\sin(x) + \cos(x)$. L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x\cos(x)$ est donc $\{x \mapsto x\sin(x) + \cos(x) + k, k \in \mathbb{R}\}$.

Cor. 7.14 : ***Analyse*** : si f vérifie la condition donnée, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x-a) = 0$, ce qui s'écrit en posant $u = x - a$, $\forall u \in \mathbb{R}, f(u+2a) = f(u)$. Donc f est $2a$-périodique.
Synthèse : supposons que f est $2a$-périodique et soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{x-a}^{y-a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y+a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x-a}^{y-a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y-a}^{x-a} f(u+2a)\mathrm{d}u \qquad \texttt{en posant } u = t - 2a \\
&= \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x-a}^{y-a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y-a}^{x-a} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Donc $\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas de la valeur de $x \in \mathbb{R}$ ce qui achève notre démonstration.

Cor. 7.15 : Discriminant : $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, le dénominateur ne s'annule donc jamais. On calcule une primitive sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{5t^2 + 2t + 1} \\
&= \frac{1}{5}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}} \\
&= \frac{5}{4}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{5t+1}{2}\right)^2 + 1}
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = \frac{5t+1}{2}$, $\mathrm{d}u = \frac{5}{2}\mathrm{d}t$. D'où
$I(x) = \frac{5}{4}\int^{\frac{5x+1}{2}} \frac{\frac{2}{5}\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{5x+1}{2}\right)$

Cor. 7.16 : Discriminant : $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$. Le dénominateur possède donc deux racines $t_1 = \dfrac{-4+2}{6} = \dfrac{-1}{3}$ et $t_2 = -1$. On calcule une primitive sur $]-\infty; -1[$ ou $\left]-1; \dfrac{-1}{3}\right[$ ou $\left]\dfrac{-1}{3}; +\infty\right[$.

$$\begin{aligned} J(x) &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{3t^2+4t+1} \\ &= \frac{1}{3}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)} \end{aligned}$$

On cherche à écrire $\dfrac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)}$ sous la forme $\dfrac{A}{t+\frac{1}{3}} + \dfrac{B}{t+1}$.

On peut procéder ***par identification*** ou utiliser la méthode suivante :

$$\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)} = \frac{A}{t+\frac{1}{3}} + \frac{B}{t+1} \overset{\times\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\Longrightarrow} \frac{1}{t+1} = A + \frac{B\left(t+\frac{1}{3}\right)}{t+1} \overset{t=\frac{-1}{3}}{\Longrightarrow} A = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)} = \frac{A}{t+\frac{1}{3}} + \frac{B}{t+1} \overset{\times(t+1)}{\Longrightarrow} \frac{1}{t+\frac{1}{3}} = \frac{A(t+1)}{t+\frac{1}{3}} + B \overset{t=-1}{\Longrightarrow} B = \frac{-3}{2}$$

D'où $J(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{2}\displaystyle\int^x \frac{1}{t+\frac{1}{3}} - \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{3}}{x+1}\right| = \ln\sqrt{\left|\frac{3x+1}{3x+3}\right|}$.

Cor. 7.19 : $1+y^2$ est une fonction strictement positive. L'équation différentielle donnée est donc équivalente à

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1$$

En primitivant on obtient donc $\mathrm{Arctan}(y) = x + k$ où k est une constante réelle.
On en déduit que $y = \tan(x+k)$. Or pour que y soit définie sur I, il faut que k soit un multiple entier de π.
La seule solution définie sur I de $y' = 1 + y^2$ est donc la fonction tangente.

Cor. 7.28 : La solution générale de l'équation homogène est $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{it}, \lambda \in \mathbb{C}$. Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante :
$\lambda' e^{it} = -i\left(e^{it}+1\right)$ donc $\lambda' = -i\left(e^{-it}+1\right)$ et $\lambda = -it + e^{-it}$ convient. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1 + (\lambda - it)e^{it}, \lambda \in \mathbb{C}\right\}$.