Équations différentielles et calcul intégral

I. Intégrales et primitives

Ex. 7.1 Déterminer les primitives suivantes en précisant le (ou les) intervalle(s) de validité de la primitive obtenue :

$$F_1(x) = \int^x t(t^2-1)^7 \mathrm{d}t \qquad F_2(x) = \int^x (t^2-1)^7 \mathrm{d}t$$
$$F_3(x) = \int^x \sqrt{5t+4}\,\mathrm{d}t \qquad F_4(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+5}$$
$$F_5(x) = \int^x \frac{2}{\sqrt{6-6t^2}}\mathrm{d}t \qquad F_6(x) = \int^x \frac{2t+5}{(t^2+5t+8)^4}\mathrm{d}t$$
$$F_7(x) = \int^x \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \qquad F_8(x) = \int^x \frac{1}{e^t+1}\mathrm{d}t$$
$$F_9(x) = \int^x \frac{2t}{(t-1)(3-t)}\mathrm{d}t \qquad F_{10}(x) = \int^x \sin^2(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$$

Ex. 7.2 Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^\pi e^x \cos(nx)\mathrm{d}x$.

Ex. 7.3 En effectuant une intégration par partie, donner l'ensemble des primitives de Arccos, Arcsin et Arctan (avec le ou les intervalles sur lesquels ces primitives sont valables).

Ex. 7.4 Donner l'ensemble des primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$, $g : x \mapsto \dfrac{1+2x}{x^2-6x+9}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{x^2-2x-1}$ ainsi que le (ou les) intervalle(s) sur le(s)quel(s) ces primitives sont valables.

Ex. 7.5 En effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, calculer

$$F(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$$

et précisez les intervalles sur lesquels cette primitive est définie.
En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ en précisant les intervalles sur lesquels elle est définie.

Ex. 7.6 Soit $I = \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout entier naturel n, on pose $F_n : x \in I \mapsto \displaystyle\int_0^x \tan^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Donner, pour $x \in I$, l'expression de $F_0(x)$, $F_1(x)$ et $F_2(x)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, F_n(x) + F_{n+2}(x) = \dfrac{\tan^{n+1}(x)}{n+1}$.
3. Donner, pour $x \in I$, l'expression de $F_3(x)$ et $F_4(x)$.
4. Déduire de la question b. que, pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier n,
$$F_{2n}(x) = (-1)^n x + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{\tan^{2k-1}(x)}{2k-1}$$
5. Donner une formule similaire pour F_{2n+1}.

Ex. 7.7 Soient $f : x \in]0;+\infty[\mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ et $F : x \in]0;+\infty[\mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est bien définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.
2. Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
3. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F(x) \geq 0$.
4. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$.

5. Montrer que $\forall x \in]0;1]$,
$$\frac{1+x\ln(x)-x}{2} \leqslant F(x) \leqslant 1+x\ln(x)-x.$$

Ex. 7.8 Calculer chacune des intégrales suivantes, à l'aide du changement de variable indiqué :

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)\cos(t)}{2+\cos(t)}\mathrm{d}t$ en posant $u=\cos(t)$;

$J = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1+e^t+e^{2t}}{1+e^t}\mathrm{d}t$ en posant $u=e^t$;

$K = \displaystyle\int_1^{64} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$ en posant $t=x^6$.

II. Équations différentielles

Ex. 7.9 Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$

$$(E) : y' - 2xy = \mathrm{sh}(x) - 2x\,\mathrm{ch}(x)$$

Ex. 7.10 Résoudre pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$$(E) : y' + \tan(t)y = \sin(2t)$$

puis donner l'unique solution telle que $y(0)=1$.

Ex. 7.11 Résoudre les équations différentielles suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

1. $(E_1) : y'' + 9y = x+1, y(0)=0$
2. $(E_2) : y'' - 2y' + y = e^x\cos(x)$
3. $(E_3) : y'' + y' - 2y = \sin^3(x)$.

Ex. 7.12 Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant le ou les intervalles de résolution choisis :

1. $ty' + y = \cos(t)$
2. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$
3. $xy'\ln(x) - y = 3x^2\ln^2(x)$
4. $y'' - y = \mathrm{sh}(x)$
5. $y'' + y' = 4x^2e^x$ avec $y(0)=e$ et $y'(0)=0$.

III. Compléments

Ex. 7.13 (Cor.) [*] Trouver les fonctions $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ telles que

$$\begin{cases} x'' &= x'+y'-y \\ y'' &= x'+y'-x \end{cases}$$

Indication : poser $u=x+y$ et $v=x-y$.

Ex. 7.14 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Indication : poser $g(t) = f(e^t)$.

Corrections

Cor. 7.13 : On suit l'indication ! Posons $u=x+y$ et $v=x-y$ et cherchons des équations différentielles satisfaites par u et v.
En sommant les deux équations du système proposé : $u''=2u'-u$
En faisant la différence des deux équations : $v''=v$.
La première conduit à $u=(At+B)e^t, (A,B)\in\mathbb{R}^2$.
La seconde conduit à $v=Ce^t+De^{-t}, (C,D)\in\mathbb{R}^2$.
Et on conclut en écrivant $x=(u+v)/2$ et $y=(u-v)/2$.