Nombres complexes, fonctions de référence

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
***Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs**.*

Cours

1) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.
   Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(x_0)$?
   Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $\tan(x) = \tan(x_0)$?
   Donner les formules suivantes : $\sin(a-b)$, $\tan(a+b)$, $\cos(2a)$ (les trois expressions) et $\tan'(a)$ (les deux expressions).

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{Arctan}\,(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$, en précisant le signe suivant la valeur de x.

Exercices

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue z complexe. On donnera les solutions sous forme algébrique.

$$(E_1) : 6z^2 + (1+i)z + 3i - 1 = 0$$

$$(E_2) : 6z^3 + (1-7i)z^2 + (i-1)z + 2 = 0$$

$$(E_3) : \left(\frac{z-1}{1+i}\right)^4 = 1$$

Indication : $74^2 = 5476$.

Exercice 2.

D'après Centrale PSI Soit c un nombre complexe ***non nul***. On note p et q les deux solutions de l'équation $z^2 = c$.

1) Montrer que $p = -q$.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur c pour que les points M, P et Q d'affixes respectives c, p et q forment un triangle rectangle en M.

Exercice 3.

Soit n un entier naturel et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

Le but de cet exercice est d'obtenir une expression simplifiée de S_n, ainsi que la limite $L = \lim_{n\to+\infty} S_n$ si elle existe.

1) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$
2) Déduire de la question précédente une expression simplifiée de S_n (ne faisant plus intervenir le signe $\sum$...).
3) $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe-t-elle ? Si oui, quelle est sa valeur ?

Exercice 4.

On considère les fonctions

$$\operatorname{th} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

et

$$\operatorname{Gd} : \left\{ \begin{array}{lcl} I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{Gd}(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \end{array} \right.$$

1) Montrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
   On note Argth : $J \to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x)$.
3) Montrer que Argth est dérivable sur J et que $\forall x \in J, \operatorname{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
4) Tracer les représentations graphiques de th et de Argth sur le repère donné en annexe.
   On précisera notamment pour chaque fonction la tangente en $x = 0$ et les asymptotes éventuelles.
5) Montrer que pour tout $x \in J$, $\operatorname{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
6) Montrer que Gd est bien définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
7) Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[: \operatorname{Gd}(x) = 2\operatorname{Argth}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$.
8) Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[: \operatorname{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right)$.
9) Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[: \operatorname{Gd}(x) = \operatorname{Argth}(\sin x)$.
10) Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{Gd}'(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.
11) Justifier l'existence de Gd^{-1} et montrer que sur son ensemble de définition
    $\operatorname{Gd}^{-1}(x) = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th} x)$.
12) Montrer que Gd^{-1} est dérivable et que, sur son ensemble de dérivabilité, $\left(\operatorname{Gd}^{-1}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}}$.

ANNEXE

NOM : .... ***Prénom*** : ....