Correction DS n°2

Exercice 1.

$$(E_1) : 6z^2 + (1+i)z + 3i - 1 = 0 = 0$$

$\Delta = (1+i)^2 - 4 \times 6 \times (3i-1) = 2i - 72i + 24 = 24 - 70i$
Cherchons $\delta = x + iy$ tel que $\Delta = \delta^2$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \delta^2 & = & \Delta \\ |\delta|^2 & = & |\Delta| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^2 - y^2 & = & 24 \\ 2xy & = & -70 \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{24^2 + 70^2} = \sqrt{5476} = 74 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x^2 & = & 98 \\ 2xy & = & -70 < 0 \\ 2y^2 & = & 50 \end{array}\right.$$

Par exemple, $\delta = 7 - 5i$.
Les solutions de (E_1) sont donc :

$$z_1 = \frac{-1 - i + 7 - 5i}{12} = \frac{1-i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 - i - 7 + 5i}{12} = \frac{-2+i}{3}$$

$$\mathcal{S}_1 = \left\{\frac{1-i}{2}; \frac{-2+i}{3}\right\}$$

$$(E_2) : 6z^3 + (1-7i)z^2 + (i-1)z + 2 = 0$$

i est racine évidente : en effet $6i^3 + (1-7i) \times i^2 + (i-1) \times i + 2 = -6i - 1 + 7i - 1 - i + 2 = 0$
$(E_2) \Leftrightarrow (z-i)\left(6z^2 + (1-i)z + 2i\right) = 0$
$\Delta = (1-i)^2 - 4 \times 6 \times 2i = 8 = -2i - 48i = -50i = 25(1-i)^2$
Donc $\delta = 5(1-i)$ vérifie $\delta^2 = \Delta$.
Les solutions de l'équation sont donc

$$\mathcal{S}_2 = \left\{i; \frac{-1 + i + 5 - 5i}{12}; \frac{-1 + i - 5 + 5i}{12}\right\} = \left\{i; \frac{1-i}{3}; \frac{-1+i}{2}\right\}$$

$$(E_3) : \left(\frac{z-1}{1+i}\right)^4 = 1$$

z est solution de (E_3) si et seulement si $\dfrac{z-1}{1+i}$ est une racine quatrième de l'unité.
Donc les solutions de (E_3) sont les complexes z vérifiant :
$\dfrac{z-1}{1+i} = e^{\frac{2ik\pi}{4}}$, où $k \in [\![0; 3]\!]$.
C'est-à-dire

- $z = 1 + (1+i) \times 1 = 2 + i$
- ou $z = 1 + (1+i) \times i = i$
- ou $z = 1 + (1+i) \times (-1) = -i$
- ou $z = 1 + (1+i) \times (-i) = 2 - i$

$$\mathcal{S}_3 = \{i; -i; 2+i; 2-i\}$$

Exercice 2.

1) Par définition, p et q sont les deux solutions de $z^2 = c$. Notamment, $p^2 = c$.
Or $z^2 = x \Leftrightarrow z^2 = p^2 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{p}\right)^2 = 1$ car $p \neq 0$, puisque c est non nul.
Donc, les solutions de $z^2 = c$ sont les complexes z tels que $\dfrac{z}{p} = \pm 1$.
Ce sont donc les complexes p et $-p$.
On en déduit que $q = -p$.

2) MPQ est rectangle en M si et seulement si $(p-c)\overline{(q-c)} \in i\mathbb{R}$.
Or $(p-c)\overline{(q-c)} = (p-c)\left(-\bar{p}-\bar{c}\right) = -p\bar{p} - p\bar{c} + c\bar{p} + c\bar{c} = |c|^2 - |p|^2 + 2i\mathcal{I}m\left(c\bar{p}\right)$.
Donc, pour que $(p-c)\overline{(q-c)}$ soit imaginaire pur, il faut et il suffit que $|c|^2 - |p|^2 = 0$ (puisque $|c|^2 - |p|^2$ est la partie réelle de $(p-c)\overline{(q-c)}$.
Or $p^2 = c$, donc $|p|^2 = |c|$.
Donc, MPQ est rectangle en M si et seulement si $|c|^2 - |c| = 0 \Leftrightarrow |c|\big(|c|-1\big) = 0$.
Comme c est supposé non nul, le triangle MPQ est rectangle en M si et seulement si $|c| = 1$.
Si l'on impose de plus que MPQ soit un ***vrai*** triangle, c'est-à-dire que ses sommets soient deux à deux distincts, il faut de plus imposer que $p \neq p^2$ et $q \neq q^2$, c'est-à-dire que $p \neq 1$ et $q \neq 1$: ceci se traduit par $c \neq 1$.
Finalement,

$$MPQ \text{ est rectangle en } M \Leftrightarrow c \in \mathbb{U}$$

et

$$MPQ \text{ est rectangle en } M \text{ et non dégénéré} \Leftrightarrow c \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$$

Exercice 3.

1) Il y a essentiellement deux méthodes :
étudier la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ et montrer que c'est la fonction nulle
ou tenter d'obtenir l'identité en composant par la fonction tan.
Je rédige la première méthode.
Soit $h : x \in]0;+\infty[\mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$.
h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,
$h'(x) = \dfrac{-1}{x^3} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{4x^4}} - \dfrac{1}{(x+1)^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{(x+1)^2}} + \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{x^2}}$
Donc $h'(x) = \dfrac{-4x}{4x^4+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2+x^2} + \dfrac{1}{x^2+(x-1)^2} = \dfrac{-4x}{4x^4+1} + \dfrac{2x^2+2x+1-(2x^2-2x+1)}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)}$
c'est-à-dire $h'(x) = \dfrac{-4x}{4x^4+1} + \dfrac{4x}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)}$.
Or $(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1) = 4x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x^3 - 4x^2 + 2x + 2x^2 - 2x + 1 = 4x^4 + 1$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = 0$.
Comme par ailleurs $h(1) = \text{Arctan}\,\frac{1}{2} - \text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,0 = 0$, on a donc bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{k-1}{k}\right)$.
Or $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{(k+1)-1}{(k+1)}\right)$.
Donc $S_n = \text{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{0}{1}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right)$ par télescopage.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$.
Donc, par composition,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \text{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

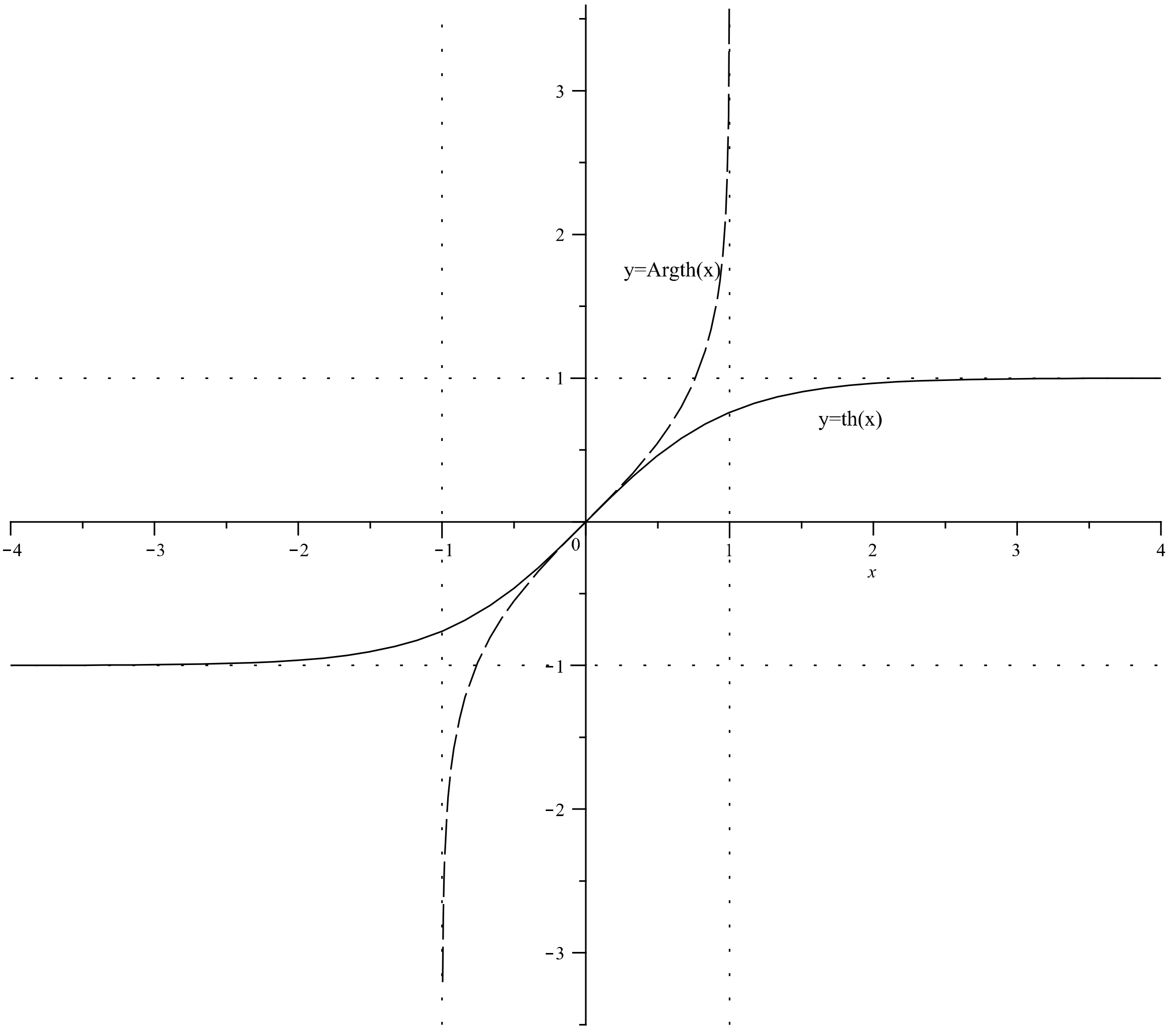
Exercice 4.

1) Pour tout réel x, $\text{ch}(x) \geqslant 1 > 0$ donc th est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus sh et ch sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc th aussi et
$\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}'(x) = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0$.
La fonction th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective.
Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$ car th est impaire.
Or th est strictement croissante, continue sur $\mathbb{R}$ donc th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J =]-1;1[$.

2) D'après la question précédente,
$\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}'(x) = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x)$.

3) D'après le théorème de dérivation d'une bijection réciproque, Argth est dérivable en tout $x \in]-1;1[$ tel que $\text{th}' \circ \text{Argth}(x) \neq 0$. Or,
$\forall x \in]-1;1[, \text{th}' \circ \text{Argth}(x) = 1 - \text{th}^2(\text{Argth}(x)) = 1 - x^2$ qui ne s'annule jamais pour $x \in]-1;1[$.
Donc Argth est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$,
$\text{Argth}'(x) = \frac{1}{\text{th}' \circ \text{Argth}(x)} = \frac{1}{1-x^2}$.

4)



5) Argth est la bijection réciproque de th, donc $y = \operatorname{Argth}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{th}(y)$. Pour obtenir une expression de Argth, il suffit donc de résoudre l'équation $x = \operatorname{th}(y)$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x = \operatorname{th}(y) &\Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \\ &\Leftrightarrow (1 - x)e^{2y} = 1 + x \\ &\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x} \\ &\Leftrightarrow y = \operatorname{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \end{aligned}$$

6) $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ intervalle sur lequel tan est définie, dérivable et strictement positive.
Par composition par ln, Gd est donc bien définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

7) $\forall x \in I, \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$.
On obtient immédiatement le résultat voulu en écrivant
$\operatorname{Gd}(x) = \ln\left(\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = 2 \operatorname{Argth}\left(\tan \frac{x}{2}\right)$.

8) $\forall x \in I, \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}$
Or $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$ donc $\cos^2 = \dfrac{1}{1 + \tan^2}$ et

$\forall x \in I, \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2-1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

Finalement,

$\forall x \in I, \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \dfrac{\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = \dfrac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

Donc $\forall x \in I, \mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right)$.

9) Sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, cos est positive donc $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$.

D'où :

$\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)+1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\right)$

Donc $\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{(1+\sin(x))^2}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) = \mathrm{Argth}(\sin x)$.

10) $\forall x \in I, \mathrm{Gd}'(x) = (\mathrm{Argth}(\sin x))' = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

11) $\mathrm{Gd}' > 0$, la fonction est strictement croissante et continue donc bijective de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, x = \mathrm{Gd}(y) = \mathrm{Argth}\,(\sin y) \Rightarrow \sin y = \mathrm{th}\, x \Rightarrow y = \mathrm{Gd}^{-1}(x) = \mathrm{Arcsin}(\mathrm{th}\, x)$ car $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ appartient à l'ensemble image de Arcsin.

12) Gd^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\left(\mathrm{Gd}^{-1}\right)'(x) = \mathrm{th}'(x) \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \times \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)}}} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$.