Maths - DM n°2 - Pour le vendredi 8 novembre,

Inégalités, limites et irrationalité

Exercice 1.

On définit les suites u et v par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Partie A - Généralités

1) Montrer que u et v convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que pour tout réel $x \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
3) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

Partie B - Irrationalité

On souhaite montrer que la limite commune l de u et v est irrationnelle. Pour cela, on fait une démonstration par l'absurde.
Supposons que $l \in \mathbb{Q}$ et soit $l = \dfrac{p}{q}$ son écriture irréductible.

1) Montrer que $u_q < l < v_q$.
2) Montrer qu'il existe un entier N tel que $u_q = \dfrac{N}{q \times q!}$ et $v_q = \dfrac{N+1}{q \times q!}$.
3) Conclure.

Partie C - $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

On souhaite de plus montrer que $l = \exp(1)$.

1) À l'aide de la question A-3), montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.
2) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+p}$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier $k \in [\![0; n]\!]$, $\dfrac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{n^k} \leqslant \dfrac{1}{k!}$.
4) En utilisant la formule du binôme, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant u_n$.
5) Que peut-on déduire de la question précédente concernant la valeur de l ?
6) Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{p+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p}$.
7) Conclure.