# Correction DM n°2

### Exercice 1.

### *Partie A - Généralités*

1) Montrons que $u$ et $v$ sont adjacentes. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$v_n - u_n = \dfrac{1}{n \times n!}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.
$u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.
Donc $u$ est strictement croissante.
Enfin, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \dfrac{1}{n \times n!} = \dfrac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$
Donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$.
Donc $v$ est strictement décroissante.
Finalement, $u$ et $v$ sont adjacentes donc convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$.

2) Étudions la fonction $f : x \in ]-1; +\infty[ \mapsto \ln(1+x) - x$.
$f$ est définie, continue et dérivable sur $]-1; +\infty[$ et
$\forall x \in ]-1; +\infty[, f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$ qui est du signe de $-x$.
On en déduit donc le tableau de variations suivant pour $f$ :

| Valeurs de $x$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ |

puisque $f(0) = \ln(1) - 0 = 0$.
On en déduit que $f$ passe par son maximum 0 en $x = 0$.
Notamment, $\forall x \in ]-1; +\infty[,\ f(x) \leqslant 0$. Dont on déduit immédiatement,

$$\forall x \in ]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = \dfrac{1}{n}$, qui est strictement positif donc qui appartient à $]-1; +\infty[$, on peut utiliser le résultat de la question précédente et on obtient que :
$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
De même, en posant $x = \dfrac{-1}{n+1}$, on a bien $x \in ]-1; +\infty[$ et, d'après la question précédente,
$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{-1}{n+1}$.
Or $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
Donc $-\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{-1}{n+1}$.
C'est-à-dire $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ en multipliant par $(-1)$.
On a donc bien montré que, pour tout entier naturel $n$ ***non nul***,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

### *Partie B - Irrationalité*

On souhaite montrer que la limite commune $l$ de $u$ et $v$ est irrationnelle. Pour cela, on fait une démonstration par l'absurde.
Supposons que $l \in \mathbb{Q}$ et soit $l = \dfrac{p}{q}$ son écriture irréductible.

1) $u$ étant strictement croissante, tout terme de $u$ est strictement inférieur à sa limite. De même, par stricte décroissance de $v$, tout terme de $v$ est strictement supérieur à sa limite.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < l < v_n$, notamment pour $n = q$, $u_q < l < v_q$.

2) $u_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$. Or $k!$ divise $q!$ pour tout entier $k \in [\![0; q]\!]$. On peut donc réduire au même dénominateur $q \times q!$ tous les termes de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$.
Donc il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ (cette somme étant positive) tel que $u_q = \dfrac{N}{q \times q!}$.
De plus, $v_q = u_q + \dfrac{1}{q \times q!} = \dfrac{N+1}{q \times q!}$.

3) Nous avons supposé $l = \dfrac{p}{q} = \dfrac{p \times q!}{q \times q!}$.
Or $u_q < l < v_q$ et $u_q = \dfrac{N}{q \times q!}$ et $v_q = \dfrac{N+1}{q \times q!}$ d'après les deux questions précédentes.
Donc $N < p \times q! < N + 1$ : $p \times q!$ est un entier situé strictement entre deux entiers consécutifs... ce qui est absurde !
Donc $l$ est irrationnelle.

### *Partie C -* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

On souhaite de plus montrer que $l = \exp(1)$.

1) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.
Or, d'après la question A-3), $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n}{n+1} \leqslant n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant 1$ (en multipliant par $n > 0$).
Enfin, la fonction exp étant strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, l'encadrement précédent est équivalent à :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{\frac{n}{n+1}} \leqslant \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant e$.
Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n+1-1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} e^{1-\frac{1}{n+1}} = e$.
Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

2) Soit $p \in \mathbb{N}$.
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = e \times 1 = e$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![0; n]\!]$.
$$\frac{\dbinom{n}{k}}{n^k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} \times \frac{1}{k!} = \frac{1}{k!} \times \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(n-i)}{n} \leqslant \frac{1}{k!}$$
puisque chaque facteur du dernier produit est compris entre 0 et 1.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{n^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = u_n$ d'après la question précédente.

5) D'après la question précédente, on peut donc affirmer que $e \leqslant l$ par passage à la limite dans une inégalité.

6) Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0; p+1]\!]$.
$\dfrac{\begin{pmatrix} n+p \\ k \end{pmatrix}}{n^k} = \dfrac{1}{k!} \times \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} \frac{n+p-i}{n} \geqslant \frac{1}{k!}$ puisque tous les facteurs du dernier produit sont supérieur à 1.
De plus :
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+p} \begin{pmatrix} n+p \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{n^k} \geqslant \sum_{k=0}^{p+1} \begin{pmatrix} n+p \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{n^k}$ puisque tous les termes de la somme sont positifs et que $n \geqslant 1$.
Donc :
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} \frac{1}{k!} = u_{p+1}$.
On a donc bien :

$$u_{p+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}$$

7) En passant à la limite $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on a donc, pour tout entier $p$, $u_{p+1} \leqslant e$.
En passant à la limite $p \to +\infty$ dans cette dernière inégalité, on peut donc affirmer que $l \leqslant e$.
Or d'après la question C-5), $e \leqslant l$.
Donc $l = e$.
Et d'après la partie B-, on peut finalement affirmer que $e$ ***est irrationnel.***