

# Intégrales, équations différentielles

## Exercice 1.

- 1) Soit  $r \in \mathbb{R}$ . Trouver toutes les fonctions  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables qui vérifient

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = r(1+x^2)$$

- 2) Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \frac{2x}{1+x^2}f(x) = (1+x^2) \int_0^1 f(u)du$$

## Exercice 2.

Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$  définie pour tout entier naturel  $n$ .

- 1) Calculer  $I_0$ ,  $I_1$  et  $I_2$ .
- 2) Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2}$ .
- 3) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} (-1)^n I_{2n} &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k-1} \\ (-1)^n I_{2n+1} &= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k} \end{aligned}$$

- 4) Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$ .
- 5) En déduire que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, positive et qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.
- 6) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$ .
- 7) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .