Maths - Chapitre 8

Trigonométrie

I. Rappels

I.1. Définition, Angles associés

On suppose connue la définition des fonctions trigonométriques à l'aide du cercle trigonométrique dont on déduit immédiatement :

Propriété 8.1

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$ $\qquad$ $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ $\qquad$ $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$

$\cos(\pi-x) = -\cos(x)$ $\qquad$ $\sin(\pi-x) = \sin(x)$

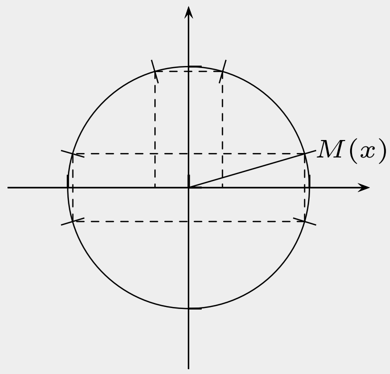
$\cos(\pi+x) = -\cos(x)$ $\qquad$ $\sin(\pi+x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(x) = \cos(x_0) \Leftrightarrow$ ....

$\sin(x) = \sin(x_0) \Leftrightarrow$ ....

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ $\qquad$ par le théorème de Pythagore.



Ex. 8.1 Donner la valeur exacte de
$A = \cos\left(\frac{588\pi}{3}\right)$ $\qquad$ $B = \sin\left(\frac{-89\pi}{6}\right)$ $\qquad$ $C = \cos\left(\frac{105\pi}{4}\right)$ $\qquad$ $D = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

Définition 8.2 (Fonction tangente)

La fonction tangente est définie par $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.
Son domaine de définition est $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
L'application tan est impaire, π-périodique.

Ex. 8.2 Soit x un réel tel que $\cos(x) = \dfrac{3}{5}$.

1) Dessiner le cercle trigonométrique et placer sur ce dessin $\cos(x)$ et les positions possibles des points du cercle associés à l'angle x.
2) Donner la valeur de $\cos(\pi+x)$, $\cos(x-\pi)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$.
3) ***Dans cette question***, on suppose que $x \in]-\pi;0]$: calculer $\sin(x)$ et $\tan(x)$.
4) ***Dans cette question***, on suppose que $x \in]0;\pi]$: calculer $\sin(x)$ et $\tan(x)$.

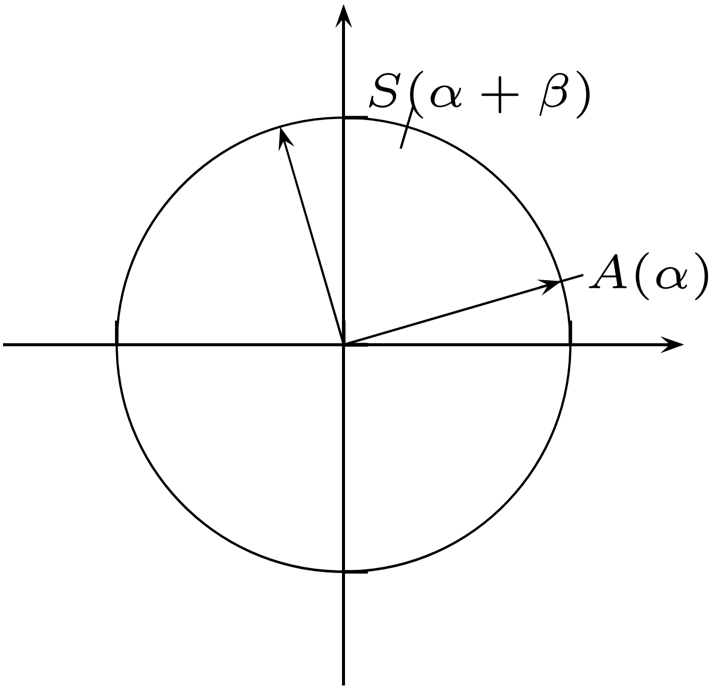
I.2. Formules d'addition

Propriété 8.3 (Formules d'addition)

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

Démonstration hors programme



Ex. 8.3 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :
(E_1) : $\cos(2x) + \cos(x) = 0$ $\qquad$ (E_2) : $\tan(x) = 2\sin(x)$

Corollaire 8.4 (Formules d'addition de la fonction $\tan$**)**

Lorsque ces expressions sont définies,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Démonstration

Corollaire 8.5 (Formules de duplication)

Lorsque ces expressions sont définies,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

Démonstration

Ex. 8.4 Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & J \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \end{array} \right.$.

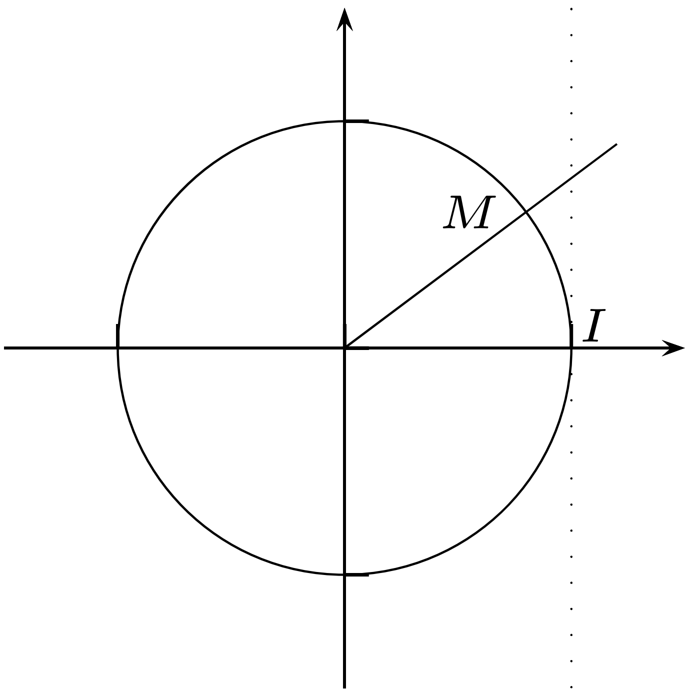
1) Quel est l'ensemble de définition I de f ?
2) Justifier que, pour tout réel x dans I, il existe un unique réel $t \in [0;\pi]$ tel que $x = \cos(t)$.
   Cet unique réel t ***est noté*** $\operatorname{Arccos}(x)$***.***
3) Montrer que $f(\cos(t)) = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.
4) En déduire que
$$\forall x \in I, f(x) = 2\cos\left(\frac{\operatorname{Arccos}(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

I.3. Dérivées des fonctions trigonométriques

Lemme 8.6 (Nombre dérivé de $\sin$ **en** 0**)**

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration hors programme

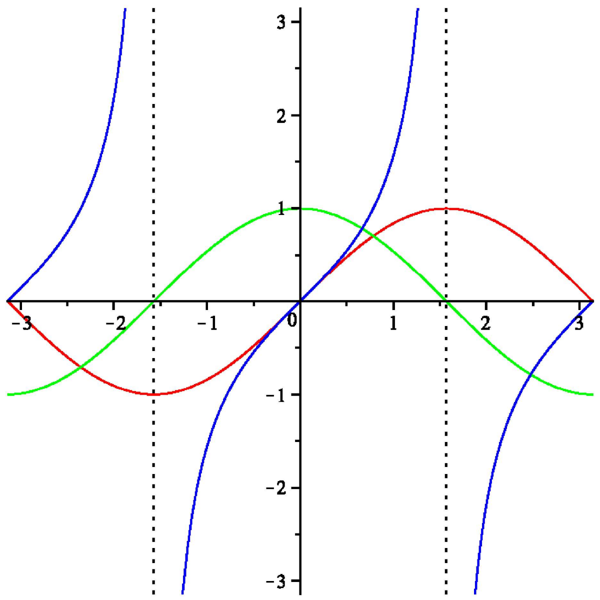


Propriété 8.7 (Fonctions dérivées de $\cos$, $\sin$ **et** $\tan$**)**

Les fonctions cos, sin et tan sont dérivables sur leur ensemble de définition et sur ces ensembles
$\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos \qquad \tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$
On a de plus $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.

Démonstration

Fonctions trigonométriques



Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $-\sin(x)$					
Variations de cos					

Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\cos(x)$					
Variations de sin					

Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\frac{1}{\cos^2(x)}$					
Variations de tan					

Ex. 8.5 Étudier la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2-\cos(x)}$.
Tracer rapidement sa représentation graphique.

II. Formules diverses

II.1. Linéarisation

Corollaire 8.8 (Formules de linéarisation)

Quels que soient les réels a et b,

$$\begin{aligned} \cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2} \end{aligned}$$

Démonstration

Ex. 8.6 Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x$.

II.2. Formules de factorisation

Corollaire 8.9 (Formules de factorisation)

Quels que soient les réels a et b,

$$\begin{array}{rcl}
\cos(p)+\cos(q) & = & 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\cos(p)-\cos(q) & = & -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin(p)+\sin(q) & = & 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin(p)-\sin(q) & = & 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{array}$$

Démonstration

Ex. 8.7 Résoudre les équations suivantes :
$(E_1) : \sin(3x)+\sin(5x)=\sin(4x)$ $(E_2) : \cos(x)-\cos(2x)+\cos(3x)=1$

II.3. Angle moitié

Corollaire 8.10

Soit x un réel tel que $\tan(x)$ et $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soient définis.
On pose $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\begin{array}{rcl}
\cos(x) & = & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\[2ex]
\sin(x) & = & \dfrac{2t}{1+t^2} \\[2ex]
\tan(x) & = & \dfrac{2t}{1-t^2}
\end{array}$$

Démonstration

Ex. 8.8 On se place dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct.
On note O l'origine du repère, I le point de coordonnées $(1;0)$ et J le point de coordonnées $(0;1)$.
Pour tout réel t, on définit le point M_t du plan de coordonnées $\left(\dfrac{1}{1+t^2};\dfrac{t}{1+t^2}\right)$.
Montrer que, quel que soit le réel t choisi, M_t appartient au cercle de diamètre $[OI]$.
Réciproquement, est-ce que tous les points de ce cercle peuvent s'écrire M_t pour un réel t bien choisi ?