

Nombres réels et suites numériques

« Les considérations qui font l'objet de ce petit écrit remontent à l'automne 1858. Je me trouvais alors, en tant que professeur, à l'École polytechnique fédérale de Zurich, pour la première fois dans la situation de devoir exposer les éléments du calcul différentiel, et je ressentais à cette occasion, plus vivement que jamais auparavant, le manque d'un fondement véritablement scientifique à l'arithmétique. En concevant qu'une grandeur variable s'approche d'une valeur limite fixe, et notamment en prouvant la proposition *que chaque grandeur qui croît constamment [et qui reste majorée] doit de façon certaine s'approcher d'une valeur limite*, je me réfugiais dans les évidences géométriques. Maintenant aussi, je considère l'appel à l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel comme extrêmement utile du point de vue didactique, et même indispensable si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais [...] ce sentiment d'insatisfaction s'imposait tant à moi que je pris la ferme résolution d'y réfléchir sans relâche [...]. On dit constamment que le calcul différentiel s'occupe des grandeurs continues, et *pourtant nulle part n'est donnée une explication de cette continuité*. », extrait de *Continuité et nombres irrationnels*

Richard Dedekind¹

Le point de départ de ce chapitre sera la propriété qui résulte du travail de **Dedekind** et de ses successeurs et qui *caractérise l'avantage théorique qu'il y a de travailler dans l'ensemble des nombres réels plutôt que dans l'ensemble des nombres rationnels*. Nous approfondirons la notion de nombre réel et en tirerons des conséquences pour l'étude des suites numériques et de *leurs limites*.

I. L'ensemble des nombres réels

I.1. Rappels et pré-requis

Ensembles usuels de nombres

Il convient d'emblée de bien comprendre que la notion de nombre réel repose :

- *sur l'intuition géométrique* de *droite munie d'un repère*, qui contient en elle-même l'idée de *continuité* ;
- *sur les intuitions algébriques* de *corps* (voir la définition 3.10) et de *relation d'ordre compatible avec les opérations* (voir les définitions 1.1 et 4.1).

1. **Richard Dedekind**(1831;1916), mathématicien allemand ayant contribué à fonder la logique mathématique contemporaine, notamment la construction des ensembles de nombres.

À ce titre les trois définitions précédentes *doivent être revues et réappprises* si besoin est.

On rappelle de plus que :

- $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont trois exemples de corps, les *deux premiers uniquement étant munis d'une relation d'ordre totale compatible avec leurs opérations* ;
- on a la suite d'inclusions strictes $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ où $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux c'est-à-dire des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{N}{10^n}$ avec $(N, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$;
- on appelle *nombres irrationnels* les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



Définition 9.1 (Majorant, minorant)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ est *majorée par* $M \in \mathbb{R}$ et on dit que M est un *majorant de* E si

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ est *minorée par* $m \in \mathbb{R}$ et on dit que m est un *minorant de* E si

Une partie qui est minorée par m et majorée par M est dite



Définition 9.2 (Maximum, minimum, extremums)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ possède un *plus grand élément* $G \in \mathbb{R}$ aussi appelé *maximum de* E si

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ possède un *plus petit élément* $P \in \mathbb{R}$ aussi appelé *minimum de* E si

Proposition 9.3 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

I.2. Propriété de la borne supérieure, inférieure



Définition 9.4 (Borne supérieure, borne inférieure)

Soit $\mathcal{A}$ une partie *non vide* de $\mathbb{R}$.

- On dit que S est la *borne supérieure* de $\mathcal{A}$ si S est le *plus petit majorant* de $\mathcal{A}$; si $\mathcal{A}$ *n'est pas majorée*, on convient que sa borne supérieure est $+\infty$.
- On dit que I est la *borne inférieure* de $\mathcal{A}$ si I est le *plus grand minorant* de $\mathcal{A}$; si $\mathcal{A}$ *n'est pas minorée*, on convient que sa borne inférieure est $-\infty$.

Les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble vide ne sont pas définies.



Notation

À condition que l'un ou l'autre existe, on note $S = \sup \mathcal{A}$ et $I = \inf \mathcal{A}$.

Ex. 9.1 Pour les ensembles suivants, donner, s'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, le maximum, le minimum, la borne supérieure, la borne inférieure : $\mathbb{N}$, $]1; 2]$, $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{Q}_+, x^2 < 2\}$

Remarque

Si $\mathcal{A}$ admet un plus grand élément, alors cet élément est aussi la borne supérieure de $\mathcal{A}$.

En effet,
.....

De même si $\mathcal{A}$ admet un plus petit élément, alors c'est aussi la borne inférieure de $\mathcal{A}$.

Les réciproques sont fausses (voir exercice précédent).

Axiome 9.5 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ ou *propriété de la borne supérieure*)

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet **dans** $\mathbb{R}$ une borne supérieure.

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet **dans** $\mathbb{R}$ une borne inférieure.

Remarque

Cette propriété distingue le corps des nombres réels de celui des nombres rationnels. Elle **doit être connue**. Elle exprime la **continuité** de la droite réelle et complète la remarque précédente : pour une partie **non vide** $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$

- $\mathcal{A}$ majorée **équivaut à** $\sup \mathcal{A}$ existe ;
- $\max \mathcal{A}$ existe **implique** $\sup \mathcal{A}$ existe, mais la réciproque est fausse.

L'ensemble des majorants d'une partie quelconque $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ est

- vide si $\mathcal{A}$ n'est pas majorée,
- $\mathbb{R}$ si $\mathcal{A}$ est vide,
- l'intervalle $[\sup \mathcal{A}; +\infty[$ sinon. En effet, d'après l'axiome précédent, l'ensemble des majorants possède toujours un plus petit élément si $\mathcal{A}$ est non vide majoré, c'est la borne supérieure.

Ces remarques s'adaptent à la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.



Méthode

Pour démontrer que S est la borne supérieure de $\mathcal{A} \neq \emptyset$ majorée on montre :

- 1) que S est un majorant de $\mathcal{A}$;
- 2) que tout majorant de $\mathcal{A}$ est supérieur ou égal à S .

Pour obtenir la borne supérieure d'une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, on peut aussi commencer par calculer l'ensemble des majorants, puis obtenir le plus petit d'entre eux.

La méthode s'adapte à l'obtention de la borne inférieure de $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Ex. 9.2

- 1) Soient m et n deux entiers strictement positifs.

Montrer que $0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$.

2) Soit $A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2}, m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Montrer que A admet une borne supérieure S et une borne inférieure I et les calculer.

- 3) S est-elle le maximum de A ?
 I est-elle le minimum de A ?

I.3. Approximations décimales



Définition 9.6

$(x_0; x) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $|x - x_0| \leq \epsilon$, on dit que x_0 est **une approximation décimale** de x à ϵ près. De plus :

si $x_0 > x$, on dit que x_0 est une valeur approchée de x par **excès**.

si $x_0 < x$, on dit que x_0 est une valeur approchée de x par **défaut**.

Théorème 9.7 (Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$)

L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } a < b, \exists x \in \mathbb{D} \text{ tel que } a < x < b$$

Démonstration hors programme

Soient $a < b$ deux réels. On a donc $b - a > 0$.

Notons $n = \lfloor \log_{10}(b - a) \rfloor - 1 \in \mathbb{Z}$.

$$n + 1 \leq \log_{10}(b - a) < n + 2 \Rightarrow 10^{n+1} \leq b - a < 10^{n+2} \Rightarrow 10 \leq \frac{b - a}{10^n} < 100.$$

$$\text{On en déduit que } \frac{a}{10^n} < \frac{a}{10^n} + 10 \leq \frac{b}{10^n}.$$

$$\text{On conclut en posant } N = \left\lfloor \frac{a}{10^n} + 9 \right\rfloor \in \mathbb{Z} \text{ qui vérifie } \frac{a}{10^n} < N \leq \frac{a}{10^n} + 9 < \frac{b}{10^n} \text{ d'où}$$

$$a < \frac{N}{10^{-n}} < b.$$

Corollaire 9.8

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Corollaire 9.9

Pour tout réel x et tout réel $\epsilon > 0$, il existe une approximation décimale de x à ϵ près, que ce soit par défaut ou par excès.

Démonstration

I.4. Intervalles réels

On rappelle que les intervalles réels ont été définis au chapitre 2 page 31 pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par :

- **Intervalles fermés :**

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

- **Intervalles semi-ouverts :**

$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}, [a; b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\},$$

$$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\},] - \infty; b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}.$$

- **Intervalles ouverts :**

$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\},]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\},] - \infty; b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$$

$$\text{et } \mathbb{R} =] - \infty; +\infty[.$$

En particulier, $\emptyset = [1; 0] =]1; 0] =]0; 0[$ est un intervalle réel (à la fois fermé, semi-ouvert et ouvert).



Remarque

Le théorème 9.7 peut s'énoncer à l'aide des intervalles sous la forme :

« Pour tout intervalle réel I ouvert non vide, il existe un nombre décimal d tel que $d \in I$ ».

Lemme 9.10

Étant donnée une partie **non vide** $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$:

- 1) si $\mathcal{A}$ est majorée et possède par conséquent une borne supérieure S , alors quel que soit $x < S$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x < x' \leq S$;
- 2) si $\mathcal{A}$ est minorée et possède par conséquent une borne inférieure I , alors quel que soit $x > I$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x > x' \geq I$;
- 3) si $\mathcal{A}$ n'est pas majorée, alors quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x < x'$;
- 4) si $\mathcal{A}$ n'est pas minorée, alors quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x' < x$.

Démonstration

Proposition 9.11

Une partie $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous u et v dans $\mathcal{X}$, on a $[u, v] \subset \mathcal{X}$.

Démonstration

Ex. 9.3 (Cor.) [*] A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x; y) \in A \times B, x \leq y$.

- 1) Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.
- 2) Montrer que $\sup A = \inf B \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists (x; y) \in A \times B, y - x < \epsilon$.

II. Introduction aux suites

II.1. Définitions

**Définition 9.12 (Suites)**

On appelle **suite réelle** tout élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et **suite complexe** tout élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Par extension, si A est une **partie infinie** de $\mathbb{N}$, tout élément de $\mathbb{R}^A$ est aussi appelé suite réelle et tout élément de $\mathbb{C}^A$ est aussi appelé suite complexe.

Dans ce qui suit, on notera $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**Notation**

Si $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ est une suite, on préfère généralement comme pour les familles finies la notation $u_0, u_1, u_2, \text{etc.}$ pour les images de la suite u .

On peut cependant aussi noter $u(0), u(1), u(2)$ etc. ces images.

La **suite elle-même** est notée u ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Attention à ne pas confondre u_n qui est l'image de n par la suite u et u elle-même.

**Remarque**

De façon évidente, la restriction $u|_I$ d'une suite à une partie finie $I \subset \mathbb{N}$ est une famille finie.

Les notions de suite et de famille finie sont donc intimement liées.

**Définition 9.13 (Égalité de deux suites)**

Deux suites u et v sont **égales** si :

- elles sont **définies sur la même partie** $A \subset \mathbb{N}$;
- $\forall n \in A, u_n = v_n$.

On supposera à partir de maintenant que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$ sauf indication contraire.

**Définition 9.14 (Suites particulières)**

Étant donnée u une suite réelle ou complexe, on dit :

- que u est **constante** s'il existe un réel ou un complexe a tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a$;
- que u est **stationnaire** s'il existe un réel ou un complexe a et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n = a$;
- que u est **périodique** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n + p \in A$ et $u_{n+p} = u_n$.

La période de la suite est alors le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ satisfaisant cette propriété.

**Remarque**

Une définition alternative du mot **période** désigne **tout entier satisfaisant la propriété donnée**. Auquel cas, il existe **une infinité de périodes** pour une suite périodique et on

- demandera souvent de donner *la plus petite période* de la suite.



Définition 9.15 (Propriété valable « à partir d'un certain rang »)

Étant donné un prédicat P dépendant d'une variable $x \in \mathbb{K}$, on dira que la suite u vérifie P **à partir d'un certain rang** si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $P(u_n)$ soit vraie.

Ex. 9.4 Écrire à l'aide de quantificateurs :

u vérifie P **à partir d'un certain rang** si et seulement si
ou plus simplement

Reformuler le fait qu'une suite est stationnaire.

u est stationnaire si et seulement si

II.2. Modes de définition d'une suite

Une suite peut être définie de multiples façons. On retiendra les trois modes de définition suivants illustrés chacun par un exercice :

a) De façon explicite

Ex. 9.5 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{2n} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{2n+1} = (-1)^n \end{cases}.$$

Montrer que u est périodique et préciser sa période.

Cor. 9.5

b) De façon implicite

Ex. 9.6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $e^{u_n} - 1 = u_n + n$.

Cor. 9.6

c) Par récurrence

Ex. 9.7 On considère la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 - u_n} \end{cases}.$$

Montrer que lorsqu'elle est définie, cette suite est périodique. On précisera notamment les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite est définie et la période de la suite suivant la valeur de u_0 .

Cor. 9.7



Remarque

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, la *démonstration par récurrence* est un outil *indispensable*. Il faut toujours l'avoir à l'esprit.

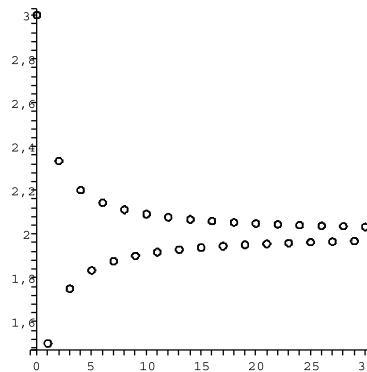
II.3. Définitions spécifiques aux suites réelles



Définition 9.16 (Représentation graphique)

La représentation graphique d'une **suite réelle** u est l'ensemble des points du plan de coordonnées (n, u_n) obtenu lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

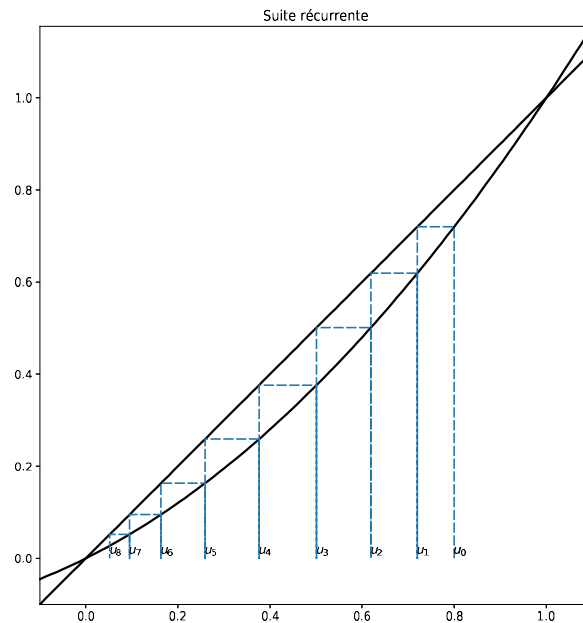
Exemple : représentation graphique de la suite $u : n \in \mathbb{N} \mapsto u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$.



Définition 9.17 (Représentation graphique d'une suite récurrente)

Lorsque la suite est définie par récurrence $u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, il est souvent plus aisé pour observer son « comportement » (on parle plutôt de sa **dynamique**) de la représenter graphiquement en traçant la représentation graphique de la fonction f , la droite d'équation $y = x$, puis en utilisant ces deux représentations graphiques pour obtenir de proche en proche les valeurs des termes de la suite u sur l'axe des abscisses.

Exemple : représentation graphique de la suite $u : \begin{cases} u_0 = \frac{4}{5} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2} \end{cases}$.



Définition 9.18 (Suites majorées, minorées)

On dit qu'une **suite réelle** u est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

On dit qu'une **suite réelle** u est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.



Remarque

Comme il n'existe pas de relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations $+$ et $\times$, les notions de suites majorées et minorées ne sont pas définies sur $\mathbb{C}$. Cependant, la définition suivante est valable pour les suites réelles **et complexes** :



Définition 9.19 (Suites bornées)

On dit qu'une suite **réelle ou complexe** u est **bornée** si la suite réelle $|u|$ est majorée.

Proposition 9.20

Une suite **réelle** u est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Démonstration



Définition 9.21 (Suites monotones)

On dit qu'une **suite réelle** u est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

On dit qu'une **suite réelle** u est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.

On dit qu'une **suite réelle** est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Lorsque les inégalités sont strictes, on dit que la suite est **strictement** croissante ou **strictement** décroissante.

- **tement** décroissante, et par conséquent **strictement** monotone.



Méthode

Pour étudier la monotonie d'une suite u on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Cependant, dans le cas d'une suite $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ définie par récurrence,

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$ dépend de la valeur de u_n .

Dans ce cas, pour montrer que la suite est monotone, on cherchera des **intervalles** $I \subset \mathbb{R}$ tels que

- $\forall x \in I, f(x) \in I$: on dit que l'intervalle I est **stable par f** ;
- g est de signe constant sur I .

Cette méthode sera précisée lors du chapitre sur la continuité.

Ex. 9.8 Soit $u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2} \end{cases}$ (voir représentation graphique précédente).

Montrer que si $u_0 \in [0; 1]$, alors u est décroissante.

Cor. 9.8

III. Suites arithmétiques, géométriques et récurrentes linéaires

III.1. Suites arithmétiques



Définition 9.22

Une suite u est dite **arithmétique** s'il existe un nombre r (réel ou complexe) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé **raison** de la suite u .

Propriété 9.23

u est une suite arithmétique si et seulement si $\exists r \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

Démonstration

Proposition 9.24 (Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = n \frac{u_{p+1} + u_{p+n}}{2}$$

Autrement dit, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique du premier et du dernier de ces termes.

Démonstration

Démonstration faite au chapitre 1, section II.5.

III.2. Suites géométriques



Définition 9.25

Une suite u est dite **géométrique** s'il existe un nombre q (réel ou complexe) tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$.
 q est appelé **raison** de la suite u .

Propriété 9.26

u est une suite géométrique si et seulement si $\exists q \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.

Démonstration

La démonstration est similaire à celle faite pour les suites arithmétiques.

Proposition 9.27 (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = u_{p+1} \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Démonstration

Démonstration faite au chapitre 1, section II.5.

Corollaire 9.28

Quels que soient $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{C}, x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.

III.3. Suites récurrentes linéaires



Définition 9.29

On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite définie pour $a, b \in \mathbb{K}$ par u :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

 Remarque

Si $a = 1$, on retrouve le cas particulier des suites arithmétiques, et si $b = 0$ on retrouve celui des suites géométriques.

Proposition 9.30

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit u une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \neq 1$). Alors :

u est la somme d'une suite géométrique v de raison a et d'une suite constante c **vérifiant la même relation de récurrence que u** .

Démonstration **Remarque**

On peut faire une analogie entre les suites arithmético-géométriques et les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 (aussi curieux que cela puisse paraître au premier abord!).

En effet, considérons l'équation $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$. Pour obtenir ses solutions, il faut :

- ;
-
.....
.....
.....
.....

 Définition 9.31

On appelle **suite récurrente linéaire d'ordre 2** toute suite définie pour $a, b \neq 0 \in \mathbb{K}$ par

$$u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_1 \in \mathbb{K} \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

On appelle **équation caractéristique associée** à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{C}$

$$r^2 - ar - b = 0, \text{ de discriminant } \Delta = a^2 + 4b$$

Proposition 9.32

On obtient une formule explicite pour le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ en résolvant l'équation caractéristique puis

- si $\Delta \neq 0$ en écrivant $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$ où z_1, z_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ doivent être calculées de sorte à ce que $u_0 = \lambda z_1^0 + \mu z_2^0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$;

- si $\Delta = 0$ en écrivant $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ vérifient $u_0 = (\lambda \times 0 + \mu)z_0^0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu)z_0 = (\lambda + u_0)z_0$.

Démonstration

La démonstration sera faite ultérieurement conformément au programme.

Remarque

- On remarquera *la très grande ressemblance entre les propositions précédentes et celles concernant les équations différentielles linéaires* du chapitre 7, section IV. Cette ressemblance entre des objets à priori très éloignés sera expliquée dans les chapitres sur les espaces vectoriels et justifie l'usage répété du mot *linéaire* pour qualifier ces objets.
- *Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants*, la proposition 9.32 s'adapte lorsque $u_0, u_1, a, b \in \mathbb{R}$ à l'obtention d'une formule explicite pour les suites réelles :
 - ★ si $\Delta > 0$, on écrit $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$ où z_1, z_2 sont les deux solutions *réelles* distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ doivent être calculées de sorte à ce que $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$;
 - ★ si $\Delta = 0$, on écrit $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$ où z_0 est l'unique solution *réelle* double de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifient $u_0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + u_0)z_0$;
 - ★ si $\Delta < 0$, on écrit $u_n = r^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$ où $re^{\pm i\theta}$ sont les deux solutions *complexes conjuguées* distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifient $u_0 = \lambda$ et $u_1 = r [u_0 \cos(\theta) + \mu \sin(\theta)]$.

**Méthode : Suites arithmético-géométrique et suites récurrentes linéaires**

- Pour une suite arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b, a \neq 1$, *on retient uniquement* qu'une formule explicite est obtenue comme *somme d'une suite géométrique de raison a et d'une solution particulière constante de la formule de récurrence*. Le premier terme de la suite géométrique peut être facilement obtenu par le calcul du premier terme de u .
- Pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0$, *on retient uniquement* la formule explicite suivant les valeurs du discriminant. Les valeurs de λ, μ peuvent être facilement obtenues par le calcul des deux premiers termes de u .

On est aidé en cela par la ressemblance entre la méthode vue pour les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants et celle énoncée dans la proposition 9.32 et la remarque suivante.

Ex. 9.9 Suite de Fibonacci

Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$.

Cor. 9.9

Ex. 9.10 Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.
Comment aurait-on pu obtenir la formule explicite sans le recours à la méthode du cours ?

Cor. 9.10

Ex. 9.11 Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$ et montrer que cette suite est périodique.

Cor. 9.11

Ex. 9.12 (Cor.) Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.
Simplifier $u_{100} + u_{101}$. Ce résultat se généralise-t-il ?

**Important ! Ressemblance... oui mais !**

Les équations différentielles linéaires sont données sous la forme $y'' + ay' + by = 0, b \neq 0$ tandis que les suites récurrentes linéaires vérifient

$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0 \Leftrightarrow u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0, b \neq 0$ ce qui explique la légère différence entre les équations caractéristiques associées (et leur discriminant).

En outre, si $\Delta = 0$ par exemple, la solution générale de $y'' + ay' + by = 0, b \neq 0$ s'écrit $y = (\lambda x + \mu)e^{z_0 x}$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique

tandis que la formule explicite obtenue pour $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0$ est $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique.

III.4. Démonstration par récurrence double**Méthode : Démonstration par récurrence double**

Étant donné $n_0 \in \mathbb{Z}$, pour démontrer qu'un prédicat $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geq n_0$, on peut effectuer une **récurrence double** :

- **Initialisation** : on vérifie que $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vrais.
- **Hérédité** : on suppose que pour un entier $n \geq n_0$, les propriétés $P(n)$ et $P(n + 1)$ sont vraies, **en énonçant clairement ces propriétés appelées hypothèses de récurrence**. On démontre alors, sous ces hypothèses, que $P(n + 2)$ est vraie.
- **Conclusion** : « La propriété est initialisée aux rangs n_0 et $n_0 + 1$ et héréditaire pour $n \geq n_0$, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq n_0$. »

En résumé, on démontre :

$$\overbrace{P(n_0) \text{ et } P(n_0 + 1)}^{\text{Initialisation}} \Rightarrow P(n_0 + 2) \Rightarrow \dots \Rightarrow \underbrace{(P(n) \text{ et } P(n + 1)) \Rightarrow P(n + 2)}_{\text{Hérédité}} \Rightarrow \dots$$

Ex. 9.13 Suite de Fibonacci (bis)

Sans utiliser la formule explicite obtenue à l'exercice 9.9, montrer que la suite de Fibonacci définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$ vérifie :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.

Cor. 9.13

Ex. 9.14 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on pose

$$\Pi_n(z) = z^n + \frac{1}{z^n} \quad \text{et} \quad Z = z + \frac{1}{z}$$

Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \Pi_n(z) = P_n(Z)$$

Montrer que les racines de P_n sont réelles et appartiennent à $[-2; 2]$.

IV. Limite d'une suite réelle

Dans cette section, les suites considérées sont des *des suites réelles*.

IV.1. Limite finie

**Définition 9.33**

On appelle *intervalle non trivial* de $\mathbb{R}$ tout intervalle non vide et non réduit à un point.

**Définition 9.34**

On dit qu'une suite réelle u *tend vers* le réel α (ou *converge vers* α) si tout intervalle fermé non trivial centré sur α contient *tous les termes de la suite à partir d'un certain rang*. α est appelé *limite de la suite* u .

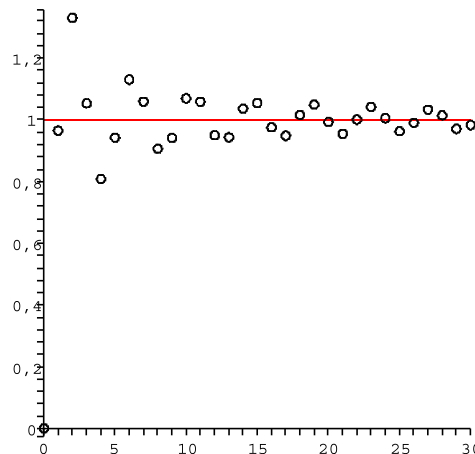
Une suite *qui converge vers un nombre réel* est dite *convergente*.

Sinon, elle est dite *divergente*.

**Notation**

Avec des quantificateurs cela s'écrit : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \alpha| \leq \epsilon$.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$.

**Remarque**

- N dépend à priori de ϵ et généralement, plus ϵ est petit, plus N doit être choisi grand.
- Il découle immédiatement de la définition que
 $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

**Méthode**

Pour montrer qu'une suite u converge vers α *à l'aide de cette définition* :

- 1) on se donne une valeur $\epsilon > 0$
 « **Soit** $\epsilon > 0.$ »
- 2) on trouve un rang N adapté à ϵ
 « **Montrons qu'il existe** $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout entier* $n \geq N, |u_n - \alpha| \leq \epsilon.$ »

On peut aussi faire une démonstration par analyse/synthèse.

Ex. 9.15 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Cor. 9.15

Proposition 9.35

Si u converge vers $l > 0$, alors il existe un rang N à partir duquel $u_n > 0$.

Démonstration**IV.2. Unicité de la limite d'une suite convergente**

Lemme 9.36

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence :

$$x = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, |x| \leq \epsilon$$

Démonstration**Proposition 9.37**

La limite d'une suite convergente est unique.

Démonstration**IV.3. Limite infinie****Définition 9.38**

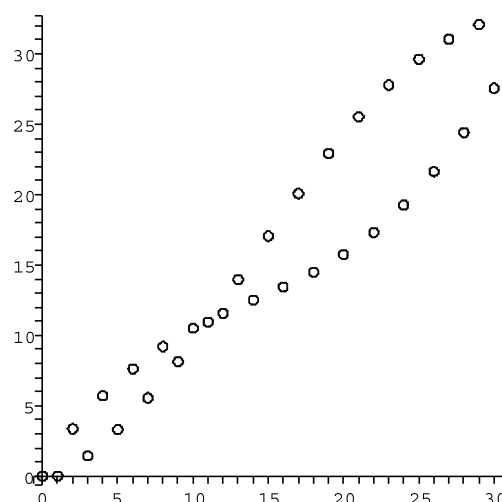
On dit qu'une suite réelle u **tend vers** $+\infty$ (ou **diverge vers** $+\infty$) si tout intervalle du type $[A, +\infty[$ contient **tous les termes de la suite à partir d'un certain rang**.

**Notation**

Avec des quantificateurs :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

**Définition 9.39**

De même, on dit que u **tend vers** $-\infty$ (ou **diverge vers** $-\infty$) et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ si

.....

**Remarque**

N dépend à priori de A et plus $|A|$ est grand, plus N doit être choisi grand.

**Méthode**

Pour montrer qu'une suite u diverge vers $\pm\infty$ à l'aide de cette définition :

- 1) on se donne une valeur $A \in \mathbb{R}$
« **Soit** $A \in \mathbb{R}$. »
- 2) on trouve un rang N adapté à A

« **Montrons qu'il existe** $N \in \mathbb{N}$ **tel que quel que soit** $n \geq N, u_n \geq A$ »

pour une suite divergeant vers $+\infty$

ou

« **Montrons qu'il existe** $N \in \mathbb{N}$ **tel que quel que soit** $n \geq N, u_n \leq A$ »

pour une suite divergeant vers $-\infty$.

On peut aussi faire une démonstration par analyse synthèse.

Ex. 9.16 Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$.

Cor. 9.16

Proposition 9.40

La limite (finie ou infinie) d'une suite est unique.

IV.4. Propriété

Propriété 9.41

Si u est une suite convergente alors elle est bornée.

Si u diverge vers $\pm\infty$ alors elle n'est pas bornée.

Les réciproques sont fausses en général.

Démonstration

IV.5. Opérations sur les limites finies

Théorème 9.42

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l_2 \in \mathbb{R}$ alors

1) Combinaisons linéaires : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda l_1 + \mu l_2$.

2) Produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = l_1 l_2$.

3) Quotient : si $l_1 \neq 0$, alors $\frac{v}{u}$ est définie à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Démonstration

IV.6. Passage à la limite dans une inégalité

Théorème 9.43

Si u et v sont deux suites réelles convergeant vers l_1 et l_2 et telles que à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $l_1 \leq l_2$.

Si à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, on ne peut rien affirmer de plus : on a toujours $l_1 \leq l_2$.

Démonstration**V. Théorèmes d'existence d'une limite****V.1. Théorèmes des gendarmes****Théorème 9.44**

Si u et v sont deux suites réelles et l un réel tels que u converge vers 0 et à partir d'un certain rang $|v_n - l| \leq u_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

Théorème 9.45 (Théorème des gendarmes)

Si u , v et w sont trois suites réelles telles que u et w convergent vers la même limite l et à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

Théorème 9.46

Soient u et v deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration**Corollaire 9.47**

La suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$,

- diverge vers $+\infty$ si $a > 1$;
- est constante égale à 1 si $a = 1$ (donc converge vers 1) ;
- converge vers 0 si $-1 < a < 1$;
- n'admet pas de limite si $a \leq -1$.

Démonstration**V.2. Suites monotones****Théorème 9.48**

Toute suite réelle croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

Théorème 9.49

Toute suite réelle décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème 9.50 (Théorème de convergence monotone)

Toute suite réelle croissante majorée converge vers sa borne supérieure.

Toute suite réelle décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.

Démonstration

Ex. 9.17 On reprend la suite $u : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2} \end{cases}$ définie dans un précédent exercice.

Nous avons montré que si $u_0 \in [0; 1]$ alors u est décroissante.

Montrer de plus que, dans ce cas, elle est convergente.

Cor. 9.17**V.3. Suites adjacentes****Définition 9.51**

On dit que deux suites u et v sont adjacentes si $\begin{cases} \text{l'une est une suite croissante} \\ \text{l'autre est une suite décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0 \end{cases}$

Théorème 9.52 (Théorème des suites adjacentes)

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.

Démonstration

Ex. 9.18 Soient u et v les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que u et v sont adjacentes.

VI. Compléments**VI.1. Suites extraites**

**Définition 9.53**

Étant donnée une suite u , on dit que v est une **suite extraite** de u s'il existe une injection croissante $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}$.

Proposition 9.54

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Proposition 9.55

Si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite l , alors u converge aussi vers l .

Ex. 9.19 On donne $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}\right)$. Expliciter les suites extraites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{6n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{6n+4})_{n \in \mathbb{N}}$.

Que peut-on en conclure pour la suite u ?

Cor. 9.19**VI.2. Suites complexes****Définition 9.56**

Étant donnée une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ complexe, on définit les suites $\mathcal{R}e(z) = (\mathcal{R}e(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{I}m(z) = (\mathcal{I}m(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $\bar{z} = (\overline{z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $|z| = (|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.

**Définition 9.57**

On dit que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - l| = 0$.
Sinon, on dit que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

**Notation**

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l$.

**Important !**

Les limites infinies *ne sont pas définies pour les suites complexes*.

Théorème 9.58

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{R}e(z_n) = \mathcal{R}e(l) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}m(z_n) = \mathcal{I}m(l) \end{cases}$$

Démonstration**Remarque**

Ce théorème permet d'étudier les suites complexes en se ramenant aux suites réelles. Il permet aussi de transférer certaines propriétés des suites réelles aux suites complexes : limite d'une somme, d'un produit, etc...

**Important !**

Tous les théorèmes concernant les suites réelles faisant intervenir la relation d'ordre

VI.3. Droite numérique achevée**Définition 9.59**

On appelle *droite numérique achevée* l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

**Notation**

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

**Remarque**

On peut prolonger les lois de $(\mathbb{R}; +; \times)$ à $\overline{\mathbb{R}}$ par analogie avec les théorèmes opératoires sur les limites mais pas totalement à cause des cas d'indétermination.

Ainsi, soit $l \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{array}{ll} l + \infty = \dots\dots\dots & l - \infty = \dots\dots\dots \\ +\infty + \infty = \dots\dots\dots & -\infty - \infty = \dots\dots\dots \\ -\infty + \infty = \dots\dots\dots & +\infty - \infty = \dots\dots\dots \end{array}$$

De même, soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_-^*$, on a :

$$\begin{array}{ll} a \times (+\infty) = \dots\dots\dots & a \times (-\infty) = \dots\dots\dots \\ b \times (+\infty) = \dots\dots\dots & b \times (-\infty) = \dots\dots\dots \\ (+\infty) \times (+\infty) = \dots\dots\dots & (-\infty) \times (-\infty) = \dots\dots\dots \\ (-\infty) \times (+\infty) = \dots\dots\dots & (+\infty) \times (-\infty) = \dots\dots\dots \\ 0 \times (+\infty) = \dots\dots\dots & 0 \times (-\infty) = \dots\dots\dots \end{array}$$

Ces tableaux peuvent être aussi vus comme des tableaux récapitulatifs des opérations sur les limites. Ils sont complétés pour $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0^+$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ par $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0^+$.

On retiendra enfin que les limites de la forme $1^{\pm\infty}$, $\pm\infty^0$ et 0^0

VI.4. Exercice de synthèse

Ex. 9.20 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

- 1) Calculer I_0 et I_1 .
- 2) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ I_{n+1} en fonction de I_n .
- 3) Calculer I_2 , I_3 et I_4 .
- 4) Montrer qu'il existe une suite d'entiers positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $I_n = (-1)^n (a_n e - n!)$.
- 5) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante positive.
- 6) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \rfloor$.
- 7) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a_n}$ et en déduire une approximation rationnelle de e à 10^{-3} près.

VII. Correction des exercices

Cor. 9.3 :

- 1) En deux temps :
 - Soit $y \in B$. $\forall x \in A, x \leq y$ donc y est un majorant de A et $\sup A \leq y$.
Nous venons de démontrer que $\forall y \in B, \sup A \leq y$.
 - Ainsi, B est minoré par $\sup A$ et $\inf B \geq \sup A$.
- 2) Supposons que $\sup A = \inf B$ et soit $\epsilon > 0$.
Soit $u = \sup A - \frac{\epsilon}{2}$ et $v = \inf B + \frac{\epsilon}{2}$. D'après le lemme 9.10, il existe $x \in A$ tel que $u < x < \sup A$ c'est-à-dire $-\sup A < -x < -u$, et $y \in B$ tel que $\inf B < y < v$.
En faisant la somme des deux inégalités, on obtient l'existence de $(x; y) \in A \times B$ tels que $0 < y - x < v - u = \epsilon$.
Réciproquement, supposons que $\forall \epsilon > 0, \exists (x; y) \in A \times B, y - x < \epsilon$. Soit $\epsilon > 0$ et $x \in A, y \in B$ tels que $y - x < \epsilon$.
On a donc $\inf B \leq y < x + \epsilon \leq \sup A + \epsilon$. Autrement écrit et en utilisant le premier résultat démontré, pour tout $\epsilon > 0, \sup A \leq \inf B < \sup A + \epsilon$.
Ce qui permet de conclure que $\sup A = \inf B$ (si l'on n'est pas convaincu par la précédente propriété, on fait une démonstration par l'absurde).

Cor. 9.12 : Équation caractéristique : $z^2 + z - 2 = 0$ de discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ donc

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu (-2)^n.$$

$$\text{Or } u_0 = 0 = \lambda + \mu \text{ et}$$

$$u_1 = 3 = \lambda - 2\mu$$

$$\text{donc } \lambda = 1 \text{ et } \mu = -1 \text{ d'où}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (-2)^n$$

$$\text{On a donc } u_{100} + u_{101} = 1 - (-2)^{100} + 1 - (-2)^{101} = 2 - (2^{100} - 2^{101}) = 2(1 + 2^{99}) = 2u_{99}.$$

Ce résultat se généralise évidemment puisqu'il s'agit en fait de la formule de récurrence donnée pour u !