

Nombres réels et suites numériques

I. L'ensemble $\mathbb{R}$

Ex. 9.1 Pour les ensembles suivants, donner lorsqu'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, le plus grand et le plus petit élément, la borne inférieure et la borne supérieure.

$$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad B = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}, x \in [3; 7] \right\} \quad D = \mathbb{Q} \cap [0; \pi]$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2} :$$

$$E = \left\{ a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad F = \left\{ (-1)^n a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$G = \left\{ a + \frac{(-1)^{nb}}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Ex. 9.2 (Cor.) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A, x \leq \alpha$.

Montrer que $\sup A \leq \alpha$.

Que peut-on dire si $\forall x \in A, x < \alpha$?

Ex. 9.3 (Cor.) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \left\{ k + \frac{n}{k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$.

• Montrer que E_n admet une borne inférieure **réelle** et que

$$\inf E_n = \min_{1 \leq k \leq n} \left(k + \frac{n}{k} \right).$$

• Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \geq \sqrt{4n}$.

Dans quel(s) cas a-t-on $\inf E_n = \sqrt{4n}$?

Ex. 9.4 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

En déduire la valeur de $\left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor$.

II. Introduction aux suites

Ex. 9.5 Étudier la monotonie des suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{1+n^2} \quad v_n = \frac{n!}{2^n} \quad w_n = \frac{n^3}{5^n} \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+(-1)^n}$$

Ex. 9.6

1. Soit u une suite à la fois 3-périodique et 4-périodique. Montrer que u est une suite constante.

2. Soit u une suite à la fois 3-périodique et 5-périodique. Montrer que u est une suite constante.

3. Soit p et q deux entiers strictement positifs premiers entre eux (c'est-à-dire dont le PGCD vaut 1).

On admet l'identité de Bézout : il existe deux entiers u et v tels que $pu + qv = 1$.

Montrer que toute suite périodique de périodes p et q est constante.

Ex. 9.7 Un particulier emprunte une somme M à sa banque pour un achat immobilier.

Un mois après son emprunt, il paye sa première mensualité m . Mais il y a des intérêts sur la somme qu'il a empruntée, de sorte que le montant restant à rembourser après sa première mensualité est de

$$S_1 = M \times (1 + t) - m$$

où t est le taux d'intérêt **mensuel** de son emprunt.

Le même raisonnement vaut pour les mois suivants, ce qui a pour conséquence que la suite des montants restant à rembourser est une suite arithmético-géométrique donnée par

$$S_0 = M \quad \text{et} \quad \forall n \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket, S_{n+1} = S_n \times (1 + t) - m$$

où N est le nombre de mois que dure l'emprunt.

1. Quel est le montant minimal m_0 de la mensualité garantissant que la suite S des sommes restant à rembourser est décroissante ?

2. On suppose que $m > m_0$. Combien de mois va durer l'emprunt ?

3. **Application numérique** : on suppose que $M = 100000\text{€}$, $t = 0$, $3\% = \frac{3}{1000}$ et $m = 2m_0$.

Calculer m_0 puis le nombre de mois N sur lequel s'étale le remboursement.

Enfin, calculer la dernière mensualité versée par l'emprunteur (attention ! la dernière mensualité est d'un montant généralement différent des précédentes).

Ex. 9.8

1. Montrer que pour tous réels x et y , on a :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

2. Montrer que pour tout réel x on a : $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

3. Soit u la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = n - u_n \end{cases}$$

Calculer u_n en fonction de n (on demande une formule explicite).

Ex. 9.9 Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $u_0 \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle définie ?

2. Étudier alors sa monotonie.

3. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle bornée ?

Ex. 9.10 Soit u la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$$

Étudier la suite u , préciser notamment sa limite si elle existe.

Ex. 9.11 Soient a, b deux constantes réelles, u une suite réelle vérifiant $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$ et v une suite réelle vérifiant $v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n = 0$.

1. Montrer sans calculer son terme général que u est périodique de période 3.

2. Calculer le terme général u_n en fonction de n et retrouver le résultat précédent.

3. On suppose que la suite v est **non nulle** et périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe un nombre complexe $Z = \rho e^{i\theta}$ vérifiant à la fois l'équation caractéristique $(E_c) : Z^2 + aZ + b = 0$ et l'équation $Z^p - 1 = 0$.

Indication : on envisagera plusieurs cas possibles suivant la nature des solutions de (E_c) .

4. Exhiber une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui soit périodique de plus petite période 5.

Indication : en posant $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or, on pourra commencer par montrer que

$$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2 + \phi X + 1)(X^2 - \frac{X}{\phi} + 1).$$

Ex. 9.12 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ chiffres } 1}$

Ex. 9.13 Soit a et b deux réels strictement positifs. Pour les deux suites ci-dessous, on demande de montrer l'existence puis de **donner une formule explicite** pour le n -ième terme de la suite :

- $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{a + bu_n^2}$;
- $v_0 = v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{1}{\frac{a}{v_n} + \frac{b}{v_{n+1}}}$.

III. Limite d'une suite réelle

Ex. 9.14 (Cor.)

- Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = +\infty$.

Ex. 9.15 Étudier les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 2 \sin(n^2) & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + (-1)^n n & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, a \in \mathbb{R} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \end{aligned}$$

Ex. 9.16 Montrer que la suite u définie par $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{4}$, $u_0 \in \mathbb{R}$ est croissante quelle que soit la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$.

Faire une représentation graphique de la suite récurrente.

Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 la suite est-elle majorée ?

Montrer l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ puis donner sa valeur.

Ex. 9.17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2}$.

Ex. 9.18 Montrer en utilisant des suites extraites que $\left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Faire de même pour $\left(\cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ puis pour $\left(\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Ex. 9.19 On considère les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
Montrer que u et v convergent vers une même limite.

En déduire un encadrement d'amplitude $\frac{1}{3}$ de la limite commune aux deux suites.

Ex. 9.20 Soit u définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

Ex. 9.21 [*] Soit u définie par $u_0 \in]0; 1[$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que la suite u est bornée, convergente et calculer sa limite.
2. Les résultats de la questions précédentes restent-ils valables si l'on choisit u_0 réel quelconque ?

Ex. 9.22 Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

1. Donner une construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n .
2. Étudier cette suite dans les cas où $z_0 = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $z_0 \in \mathbb{R}_-^*$.
3. Montrer que $z_0 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z_n \notin \mathbb{R}$.
4. On suppose que $z_0 \notin \mathbb{R}$. Étudier la convergence de (z_n) .

[Indication : écrire les termes de la suite sous forme exponentielle.]

IV. Révisions

Ex. 9.23 Donner une formule explicite pour $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ou $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ en envisageant successivement les deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

1. $y' = y - 1$ et $u_{n+1} = u_n - 1$
2. $y'' = -y' + y$ et $u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$.

Ex. 9.24 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer $S_n = \sum_{0 \leq j \leq n} \binom{k}{j}$ et $T_n = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} (-1)^j \binom{k}{j}$.

En déduire la valeur de $\sum_{\substack{0 \leq j \leq k \leq n \\ j \text{ pair}}} \binom{k}{j}$ et $\sum_{\substack{0 \leq j \leq k \leq n \\ j \text{ impair}}} \binom{k}{j}$.

Ex. 9.25 [*] Mines Telecom MP 2018

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède-t-elle une limite ? Peut-on calculer cette limite ?

Ex. 9.26 [*] En remarquant que $\forall x \in [0; 1], x^2 \leq x$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n |\cos(k)| \geq \frac{n}{4}$$

Corrections

Cor. 9.2 : Par définition, α est un majorant de A . Donc A , non vide et majoré, possède une borne supérieure qui est le plus petit de ces majorants, en particulier inférieure ou égale à α . Si $\forall x \in A, x < \alpha$, on a encore $\sup A \leq \alpha$. Le même raisonnement que précédemment reste valable.

Attention cependant, il est possible que $\sup A = \alpha$. L'inégalité stricte n'est donc pas vérifiée pour la borne supérieure. Par exemple, si $A = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, on a

$$\forall x \in A, x < 1, \text{ mais } \sup A = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Cor. 9.3 :

- E_n est minoré par 0 et admet donc une borne inférieure. De plus, si $k \geq n+1$, alors $k + \frac{n}{k} > k \geq n+1$. Or pour $k = n$, on a $k + \frac{n}{k} = n+1$. Donc la borne inférieure est atteinte pour $k \leq n$, c'est-à-dire :

$$\inf E_n = \inf_{1 \leq k \leq n} \left(k + \frac{n}{k}\right).$$

- Étudions la fonction $f(x) = x + \frac{n}{x}$. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = 1 - \frac{n}{x^2}$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{n}{x^2} \Leftrightarrow x > \sqrt{n} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Donc f passe par un minimum en $x = \sqrt{n}$, valeur pour laquelle $f(x) = f(\sqrt{n}) = 2\sqrt{n}$.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \geq \sqrt{4n}.$$

Pour qu'il y ait égalité, dans la mesure où $\inf E_n = \inf_{1 \leq k \leq n} \left(k + \frac{n}{k}\right)$ est la borne inférieure d'un ensemble fini et qu'elle est donc atteinte, il faut que le minimum de la fonction f soit atteint c'est-à-dire que n soit un carré.

Cor. 9.14 :

1. Lemme : $\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.

En effet, en définissant la fonction $f : x \in]-1; +\infty[\mapsto \ln(1+x) - x$ qui est dérivable et continue sur son intervalle de définition, on a :

$$\forall x \in]-1; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \text{ qui est du signe de } -x.$$

Donc f est croissante sur $] -1; 0]$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle passe donc par un maximum en 0 qui vaut $f(0) = \ln(1) = 0$ ce qui achève la démonstration du lemme.

Or $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) = \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$ (qui appartient bien à $] -1; +\infty[$).

De même $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) = -\ln\left(\frac{p}{p+1}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{p+1}\right) = -\ln\left(1 + \frac{-1}{p+1}\right)$.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) \geq -\frac{1}{p+1}$ (car $\frac{-1}{p+1} \in]-1; +\infty[$).

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$

Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

En utilisant le théorème des gendarmes on obtient donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

3. D'après la première question, $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \geq \sum_{p=1}^n \ln(p+1) - \ln(p) = \ln(n+1)$ (télescopage).

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = +\infty.$$