Exercice corrigé

François Coulombeau
coulombeau@gmail.com
Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)

19 décembre 2024

Correction de l'exercice 5 du TD n°1

Ex. 5 (Cor.) On considère le système

$$\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = c\cos A + a\cos C \\ c = a\cos B + b\cos A \end{cases}$$

1) Résoudre le système en considérant que les inconnues sont $\cos A$, $\cos B$ et $\cos C$ et que $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.
2) Résoudre le système en considérant que les inconnues sont a, b et c et que $A + B + C = \pi$.
3) Montrer que dans tout triangle ABC en notant $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ on a

$$\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = c\cos A + a\cos C \\ c = a\cos B + b\cos A \end{cases}$$

Conclure.

Cor. 5 :

1) Notons $X = \cos A$, $Y = \cos B$ et $Z = \cos C$, les trois inconnues du système.
Rappelons par ailleurs que $a > 0, b > 0, c > 0$, et qu'ils sont notamment non nuls.
Le système se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & cY & + & bZ & = & a \\ cX & & & + & aZ & = & b \\ bX & + & aY & & & = & c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} & & cY & + & bZ & = & a & \\ & - & acY & + & abZ & = & b^2 - c^2 & L_2 \leftarrow bL_2 - cL_3 \\ bX & + & aY & & & = & c & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} & & & & 2abZ & = & a^2 + b^2 - c^2 & L_1 \leftarrow aL_1 + L_2 \\ & - & acY & + & abZ & = & b^2 - c^2 & \\ bX & + & aY & & & = & c & \end{array}\right.$$

On en déduit que $Z = \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.
En remplaçant dans la deuxième équation, on peut obtenir alors la valeur de Y puis celle de X grâce à la troisième équation.

Mais on peut aussi induire les expressions de X et Y par des considérations de symétrie : le système de départ est inchangé lorsqu'on échange A et C ainsi que a et c. En conséquence, la solution obtenue pour Z reste une solution lorsqu'on fait le même échange : on a donc

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

et de la même manière

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

Finalement, on a donc

Formules d'al-Kashi

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

2) On continue à noter $X = \cos A$, $Y = \cos B$ et $Z = \cos C$ mais les inconnues du système sont désormais a, b et c.

Le système se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & Zb & + & Yc & = & 0 \\ Za & - & b & + & Xc & = & 0 \\ Ya & + & Xb & - & c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcccccll} -a & + & Zb & + & Yc & = & 0 & \\ & & (Z^2-1)b & + & (X+YZ)c & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + ZL_1 \\ & & (X+YZ)b & + & (Y^2-1)c & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + YL_1 \end{array}\right.$$

L'opération $L_3 \leftarrow (Z^2-1)L_3 - (X+YZ)L_2$ conduit alors à la dernière ligne suivante pour le système :

$$\Big[(Y^2-1)(Z^2-1) - (X+YZ)^2\Big]\, c = 0$$

Cette opération est licite puisque $Z^2 - 1 = \cos^2 C - 1 = -\sin^2 C \neq 0$ car $C \in]0;\pi[$.

Il est alors tentant d'affirmer que $c = 0$ en divisant par $(Y^2-1)(Z^2-1)-(X+YZ)^2$ mais... en fait $(Y^2-1)(Z^2-1)-(X+YZ)^2 = 0$!

Montrons-le :

$$\begin{aligned} (Y^2-1)(Z^2-1)-(X+YZ)^2 &= \sin^2 B \sin^2 C - (\cos A + \cos B \cos C)^2 \\ &= \big(\sin B \sin C - \cos A - \cos B \cos C\big)\big(\sin B \sin C + \cos A + \cos B \cos C\big) \\ &= \big(-\cos(B+C) - \cos A\big)\big(\cos(B-C) + \cos A\big) \\ &= -4\cos\Big(\tfrac{A+B+C}{2}\Big)\cos\Big(\tfrac{B+C-A}{2}\Big)\cos\Big(\tfrac{A+B-C}{2}\Big)\cos\Big(\tfrac{A+C-B}{2}\Big) \end{aligned}$$

Or $A + B + C = \pi$ donc $\cos\Big(\frac{A+B+C}{2}\Big) = 0$.

Finalement, on a donc :

$$(Y^2-1)(Z^2-1)-(X+YZ)^2 = 0$$

Le système est donc équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcccccl} -a & + & Zb & + & Yc & = & 0 \\ & & (Z^2-1)b & + & (X+YZ)c & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui permet d'affirmer qu'il existe une infinité de solutions au système d'une part, et d'autre part que ces solutions sont

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & \dfrac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin^2 C} c \\ & & \\ b & = & \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin^2 C} c \end{array}\right. \quad \text{où } c \in \mathbb{R}_+^*$$

que l'on peut aussi écrire en utilisant le fait que $A + B + C = \pi$

Loi des sinus

$$\begin{array}{lcl} a & = & \dfrac{\sin A}{\sin C} c \\ & & \\ b & = & \dfrac{\sin B}{\sin C} c \end{array} \quad \text{où } c \in \mathbb{R}_+^*$$

3) Montrons que $a = b\cos C + c\cos B$, les deux autres égalités étant symétriques en a, b, c. Soit $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{BC}$ un vecteur unitaire directeur de la droite (BC) et soit H le pied de la hauteur issue de A sur (BC). On a

$$\vec{i}.\overrightarrow{BC} = BC = a$$

d'une part, et

$$\begin{aligned} \vec{i}.\overrightarrow{BC} &= \vec{i}.\overrightarrow{BA} + \vec{i}.\overrightarrow{AC} \\ &= c\cos B + b\cos C \end{aligned}$$

d'autre part. Donc $a = b\cos C + c\cos B$.
Le premier système donné correspond donc à obtenir la valeur des angles A, B et C d'un triangle connaissant la longueur des côtés $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
Ce problème possède une unique solution (pourvu que $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ ce qui est le cas dans un triangle « non aplati ») et conduit aux ***formules d'al-Kashi*** :

Formules d'al-Kashi

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Le second système donné correspond quant à lui à obtenir la valeur des longueurs des côtés connaissant les angles.
Ce problème possède une infinité de solutions (pourvu que $A + B + C = \pi$, ce qui est vrai dans un triangle) et conduit à la ***loi des sinus*** :

Loi des sinus

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$