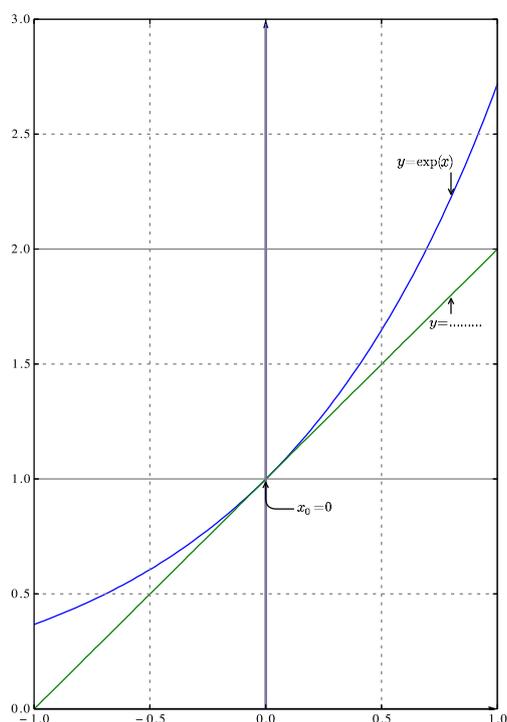
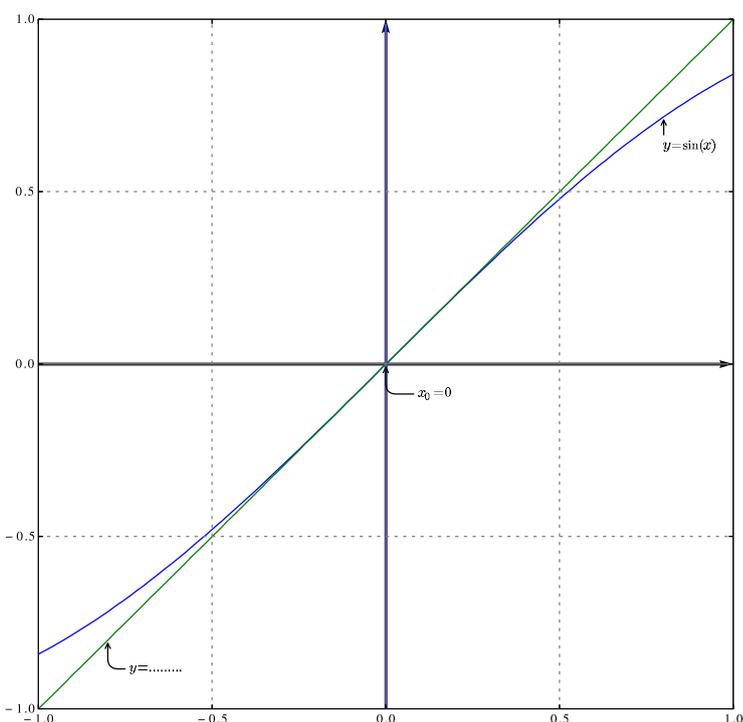


Développements limités

L'IDÉE fondamentale à l'origine des développements limités repose sur une généralisation de la notion de tangente : au voisinage d'un point x_0 , la valeur $f(x_0 + h)$ d'une fonction f dérivable peut être approximée par $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$, ce qui revient à approximer f par une fonction affine au voisinage de x_0 .

Par exemple, au voisinage de 0 : $\sin h \approx \dots\dots\dots$ ou encore $e^h \approx \dots\dots\dots$



Peut-on obtenir des « approximations de meilleure qualité » à l'aide de polynômes de degré supérieur ?

L'objectif de ce chapitre est d'une part de **clarifier la notion d'approximation** d'une suite par une autre suite ou d'une fonction par une autre fonction, d'autre part d'élaborer des outils permettant d'obtenir des **approximations polynomiales des fonctions usuelles**.

I. Équivalence, domination, négligeabilité

I.1. Notion de voisinage



Définition 11.1 (Voisinsages d'un réel, voisinsages de $\pm\infty$)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = -\infty$ ou $x_0 = +\infty$).

On dit que I est **un voisinage de x_0** si :

- $x_0 = +\infty$ et I est un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;

- $x_0 = -\infty$ et I est un intervalle de la forme $] - \infty; A]$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- $x_0 \in \mathbb{R}$ et I est un intervalle de la forme $[x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon]$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

I.2. Relations de comparaison entre suites

Définition 11.2 (Équivalence de suites)

On dit que la suite u est *équivalente* à la suite v **au voisinage de** $+\infty$ si

- **il existe un rang** $n_0 \in \mathbb{N}$, à partir duquel la suite v ne s'annule plus ;
- le quotient $\frac{u}{v}$ tend vers 1.

Notation

Si la suite u est équivalente à la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Définition 11.3 (Domination)

On dit que la suite u est *dominée par* la suite v **au voisinage de** $+\infty$ si

- **il existe un rang** $n_0 \in \mathbb{N}$, à partir duquel la suite v ne s'annule plus ;
- le quotient $\frac{u}{v}$ est borné : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, m \leq \frac{u_n}{v_n} \leq M$.

Notation

Si la suite u est dominée par la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v_n)$.

Définition 11.4 (Négligeabilité)

On dit que la suite u est *négligeable devant* la suite v **au voisinage de** $+\infty$ si

- **il existe un rang** $n_0 \in \mathbb{N}$, à partir duquel la suite v ne s'annule plus ;
- le quotient $\frac{u}{v}$ tend vers 0.

Notation

Si la suite u est négligeable devant la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ ou plus simplement $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$.

Ex. 11.1 Comparer les suites :

- $u_n = n$ et $v_n = n^2$;
- $u_n = n$ et $v_n = \sqrt{1 + n^2}$;
- $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$;
- $u_n = \frac{1}{n^3}$ et $v_n = \frac{1}{n}$;
- $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

Cor. 11.1

I.3. Relations de comparaison entre fonctions

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0 , sauf éventuellement en x_0 lui-même.

Définition 11.5 (Équivalence de fonctions)

On dit que la fonction f est *équivalente* à la fonction g **au voisinage de** x_0 si

- il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0);
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Notation

Si la fonction f est équivalente à la fonction g au voisinage de x_0 , on note $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$.

Définition 11.6 (Domination)

On dit que la fonction f est *dominée par* la fonction g **au voisinage de** x_0 si

- il existe un voisinage I de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0);
- le quotient $\frac{f}{g}$ est borné sur I : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$.

Notation

Si la fonction f est dominée par la fonction g au voisinage de x_0 , on note $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(g(x))$.

Définition 11.7 (Négligeabilité)

On dit que la fonction f est *négligeable devant* la fonction g **au voisinage de** x_0 si

- il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0);
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Notation

Si la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de x_0 , on note $f(x) = \underset{x \rightarrow x_0}{o}(g(x))$ ou plus simplement $f(x) = o_{x_0}(g(x))$.

I.4. Propriétés des équivalents

Propriété 11.8 (Obtention d'un équivalent par encadrement)

Soit I un intervalle, a un point intérieur à I et f, g, h trois fonctions réelles telles que

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si de plus $h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$ alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$.

Démonstration

Ex. 11.2 Montrer que $\frac{[x]}{1+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Propriété 11.9

Si $u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v(x)$ et $w(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} z(x)$ alors :

- 1) il existe un voisinage de x_0 sur lequel u et w ne s'annulent pas ;
- 2) $v(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} u(x)$ et $z(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} w(x)$;
- 3) $u(x)w(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v(x)z(x)$;
- 4) $\frac{u(x)}{w(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{v(x)}{z(x)}$;
- 5) $\forall p \in \mathbb{Z}, u^p(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v^p(x)$ et si $v > 0$ au voisinage de $x_0, \forall p \in \mathbb{R}, u^p(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v^p(x)$.

Démonstration

Ex. 11.3 Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de :

- $x \mapsto \sin(x)$;
- $x \mapsto \exp(x) - 1$;
- $x \mapsto \ln(1+x)$;
- $x \mapsto \cos(x) - 1$.

Cor. 11.3

 **Important !**

$\cos(x)$ est équivalent à $1+x$ en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1+x} = 1$
 -1 est équivalent à -1 en 0... et partout ailleurs! **Mais**
 $\cos(x) - 1$ **n'est pas équivalent à** \neq en 0 d'après l'exercice précédent.

Il **n'est donc pas autorisé de faire une somme d'équivalents !**

On préférera pour les calculs la notion de **développement limité** que l'on verra plus loin.

Ex. 11.4

- 1) Montrer que $\ln(e+x)$ et $\cos(x)$ sont équivalents pour $x \rightarrow 0$.
- 2) Trouver un équivalent simple de $\ln(e+x) - 1$ pour $x \rightarrow 0$.

Cor. 11.4

Propriété 11.10 (Propriétés conservées par équivalence)

Si $u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v(x)$ alors :

- 1) il existe un voisinage de x_0 sur lequel u et v sont de même signe ;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ existe si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$ existe et en cas d'existence, $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$.

Démonstration

I.5. Propriétés des « petit o »

Propriété 11.11 (Équivalent et « petit o »)

$u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v(x)$ si et seulement si $u(x) = v(x) + \underset{x \rightarrow x_0}{o}(v(x))$.

Démonstration

Propriété 11.12 (Traduction des croissances comparées)

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

- $\ln^\alpha(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^\beta)$;
- $x^\beta = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^{\gamma x})$;
- si $\alpha > \beta$, $x^\alpha = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^\beta)$ et $x^\beta = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^\alpha)$;
- quel que soit le réel λ , $\lambda^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n!)$;
- **MAIS**, $n! = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^n)$.

Ex. 11.5 Montrer que pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}_-^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}_-^*$,

- 1) $\ln^\alpha(x) = \underset{x \rightarrow 0^+}{o}(x^\beta)$;
- 2) $e^{\gamma x} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^\beta)$.

Cor. 11.5

i Remarque

On retiendra notamment que la propriété 11.11 permet d'utiliser les « petit o » pour traiter les questions concernant les équivalents. **Cette propriété doit absolument être connue.**

De plus, la propriété $\alpha > \beta \Rightarrow x^\alpha = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^\beta)$ est elle aussi d'une importante primordiale pour la suite du chapitre. Notons $f(x) \underset{0}{\ll} g(x)$ le fait que $f(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(g(x))$: on a alors les négligeabilités suivantes

Au voisinage de 0 : $\dots \underset{0}{\ll} x^3 \underset{0}{\ll} x^2 \underset{0}{\ll} x \underset{0}{\ll} 1 \underset{0}{\ll} \frac{1}{x} \underset{0}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{0}{\ll} \dots$

Au voisinage de $+\infty$: $\dots \ll_{\infty} \frac{1}{x^2} \ll_{\infty} \frac{1}{x} \ll_{\infty} 1 \ll_{\infty} x \ll_{\infty} x^2 \ll_{\infty} x^3 \ll_{\infty} \dots$

L'idée générale des développements limités est fondée sur cette propriété : **nous allons approximer des fonctions au voisinage de 0** par des **polynômes de degré n** en **négligeant tous les termes de degré strictement supérieur à n** .

Pour une approximation ailleurs qu'en 0, on fera un changement de variable.

Ex. 11.6 Écrire, avec les mêmes notations que dans la remarque précédente, les relations de négligeabilité

- 1) au voisinage de -3 ;
- 2) au voisinage de x_0 .

Cor. 11.6

II. Développements limités

II.1. Définitions



Définition 11.13

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0** et on note f **admet un** $DL_n(x_0)$ si

$$\exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Ou encore, au voisinage de 0, en utilisant $h = x - x_0$ et le signe \sum à la place des pointillés :

$$f(x_0 + h) = \dots + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

La somme \dots est appelée **partie principale** du DL.

$o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$ ou $o_{h \rightarrow 0}(h^n)$ est appelé **reste du DL**.



Remarque

Comme le changement de variable $h = x - x_0$ est toujours possible, on considèrera souvent par la suite des développements limités en 0, ou on s'y ramènera par changement de variable. En particulier en l'absence d'indications, les « petit o » sont supposés être donnés au voisinage de 0.

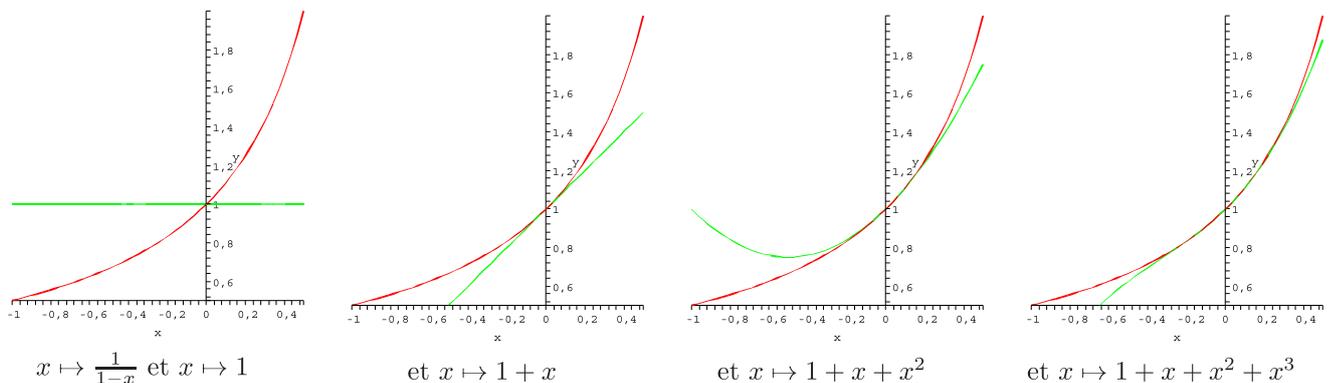
II.2. Premier exemple

Développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:

pour tout $x \in]-1; 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n x^k = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

II.3. Interprétation géométrique

Plus l'ordre du DL est grand, plus la représentation graphique de sa partie principale se rapproche au voisinage de x_0 de \mathcal{C}_f .



II.4. DL, continuité, dérivabilité

Proposition 11.14

Soit x_0 **un nombre réel**. Si f admet un $DL_0(x_0)$ alors :

- ou bien f est définie en x_0 , auquel cas f est continue en x_0 ;
- ou bien f n'est pas définie en x_0 , auquel cas f peut être prolongée en une fonction continue en x_0 .

Si f admet un $DL_1(x_0)$ alors f (ou son prolongement continu) est **dérivable** en x_0 .

Ceci ne se généralise pas au cas $n \geq 2$, c'est-à-dire qu'il est possible qu'une fonction admette un $DL_2(x_0)$ sans pour autant être deux fois dérivable en x_0 .

Démonstration

II.5. Unicité

Proposition 11.15

Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors il est unique.

Démonstration**Important !**

En revanche, étant donné un $DL_n(x_0)$, il existe une infinité de fonctions possédant ce développement limité :

II.6. Troncature et équivalent**Proposition 11.16**

Si f admet un $DL_n(x_0)$, alors $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, f admet un $DL_k(x_0)$ dont la partie principale est la troncature de celle du $DL_n(x_0)$.

Démonstration**Propriété 11.17 (Équivalent d'une fonction)**

Étant donné un réel $x_0 \in \mathbb{R}$, une fonction f définie sur un voisinage I de x_0 sauf éventuellement en x_0 et possédant sur I un développement limité, le premier terme non nul du développement limité de f au voisinage de x_0 est un équivalent de $f(x_0 + h)$ au voisinage de $h \rightarrow 0$.

Démonstration

Ex. 11.7 Donner un équivalent de $x \mapsto \frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2$ au voisinage de 0.

Ex. 11.8 Donner un équivalent de $x \mapsto \frac{1}{2+x} - \frac{1}{4}$ au voisinage de 2.

II.7. Opérations sur les DL**Propriété 11.18**

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de x_0 (sauf éventuellement en x_0) et possédant pour $n \in \mathbb{N}$ un développement limité à l'ordre n en x_0 de parties principales P et Q , alors :

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha f + \beta g$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0 de partie principale $\alpha P + \beta Q$;
- $f \times g$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0 dont partie principale est la

troncature à l'ordre n de PQ ;

- si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0 .

Démonstration

Ex. 11.9 Donner un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{1}{1-2x} + \frac{2}{1+x} - 3$.

Quel est le signe de $f(x) - 7x^2$ au voisinage de 0 ?

Théorème 11.19

Si f admet un $DL_n(0)$ alors toute primitive F de f admet un $DL_{n+1}(0)$ obtenu en primitivant celui de f .

Plus précisément, si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ alors $F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})$

Corollaire 11.20

Si f admet un $DL_{n+1}(0)$ **et si f' admet un $DL_n(0)$** alors celui de f' est obtenu en dérivant celui de f .



Important !

Le théorème 11.19 signifie plus simplement que l'on peut primitiver un développement limité. Attention simplement à ne pas oublier la « constante d'intégration » $F(0)$.

Dans son corollaire, la condition « f' admet un $DL_n(0)$ » est primordiale. Sans elle, on ne peut pas dériver un développement limité.

Ex. 11.10 Soit n un entier positif. Obtenir le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \text{Arctan } x$ et $x \mapsto e^x$.

II.8. Formule de Taylor-Young



Définition 11.21 (Fonctions de classe $C^n(I)$)

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle réel I est **de classe C^n sur I** , si elle est n fois dérivable en tout point de I et si sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est continue.

Théorème 11.22 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f \in C^n(I)$, alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Démonstration

La démonstration sera effectuée dans le chapitre sur l'intégration.



Méthode : Utilisation de la formule de Taylor-Young

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors f admet pour $DL_n(x_0)$ celui donné par la formule de Taylor-Young.

Cependant, il y a souvent plus simple pour obtenir ce développement limité.

La formule de Taylor-Young est de ce fait davantage un outil théorique qu'un outil pratique.



Important !

On rappelle (voir proposition 11.14) que f peut admettre un $DL_n(x_0)$ sans pour autant être $\mathcal{C}^n(x_0)$. Mais si $f \in \mathcal{C}^n(I)$, elle possède en tout point de I un unique développement limité à l'ordre n donné par la formule de Taylor-Young.

Ex. 11.11 Soit n un entier positif. Obtenir le $DL_n(0)$ de $x \mapsto e^x$, le $DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$, enfin obtenir le $DL_n(0)$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.



Remarques

Le développement limité de $(1+x)^\alpha$ incite à généraliser la définition des coefficients binomiaux :

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, on note $\binom{\alpha}{p} = \dots\dots\dots$

On a alors $(1+x)^\alpha = \dots\dots\dots$

Ex. 11.12 $DL_5(0)$ de $x \mapsto \tan x$.

Cor. 11.12

II.9. Résumé

Voici une liste des DL(0) à connaître et de la façon dont on les obtient :

Fonction	DL(0)	Démonstration
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$f(x) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$	Somme des termes d'une suite géométrique.
$x \mapsto \frac{1}{1+x}$	$f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$	$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$
$x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$	Formule de Taylor-Young.
$x \mapsto e^x$	$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	Formule de Taylor-Young.
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$	Formule de Taylor-Young, partie paire de e^x .
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$	Formule de Taylor-Young, partie impaire de e^x .
$x \mapsto \cos x$	$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$	Formule de Taylor-Young, $\operatorname{Re}(e^{ix})$.
$x \mapsto \sin x$	$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$	Formule de Taylor-Young, $\operatorname{Im}(e^{ix})$.
$x \mapsto \tan x$	$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	Quotient de sin par cos, $\tan' = 1 + \tan^2$.
$x \mapsto \ln(1+x)$	$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$	Intégration de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
$x \mapsto \operatorname{Arctan} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$	Intégration de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Les développements limités en 0 de Arccos et Arcsin s'obtiennent par primitivation.

Ils ne sont pas à retenir. On les retrouve au besoin pour de petites valeurs de n .

III. Utilisations

III.1. Limite

Les développements limités constituent un outil *extrêmement efficace* pour le calcul des limites. Notamment, en cas d'indétermination, la plupart du temps, un développement limité permet de lever l'indétermination.

Ex. 11.13 Calculer, si elle existe, la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$.

Ex. 11.14 Soit x un réel.

Calculer, si elle existe, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

III.2. Tangente et position par rapport à la tangente

Les propriétés 11.10 et 11.14 permettent d'obtenir l'équation de la tangente en un point à une représentation graphique grâce aux développements limités, ainsi que la position relative de la

représentation graphique par rapport à la tangente.

Plus précisément, nous avons démontré :

Théorème 11.23 (Utilisation des développements limités)

Soit f une fonction définie sur un voisinage I du réel x_0 , sauf éventuellement en x_0 lui-même.

- Si f possède un développement limité $f(x_0 + h) = a_0 + o_{h \rightarrow 0}(1)$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0$.
De plus, soit f est définie et continue en x_0 , soit f est prolongeable par continuité par a_0 en x_0 . (voir la proposition 11.14).
- Si f possède un développement limité $f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + a_ph^p + o_{h \rightarrow 0}(h^p)$ (avec $a_p \neq 0$) alors
 - ★ f est continue ou prolongeable par continuité par a_0 en x_0 ;
 - ★ f (ou son prolongement) est dérivable et $f'(x_0) = a_1$;
 - ★ l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en x_0 est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$;
 - ★ on peut connaître les positions relatives de la courbe et de sa tangente en étudiant le signe de a_ph^p au voisinage de $h \rightarrow 0$.
- Le premier terme non nul du développement limité de f en x_0 fournit un équivalent de f au voisinage de x_0 (voir la proposition 11.17).

Ex. 11.15 Effectuer un développement limité de $g : x \mapsto \ln(2 + 2x + x^2)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

En déduire une équation de la tangente à \mathcal{C}_g en 0, ainsi que la position de relative de \mathcal{C}_g par rapport à cette tangente.

Ex. 11.16 Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $u_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

- 1) Déterminer si u converge et si oui, donner sa limite.
- 2) Dans le cas où u converge vers $l \neq 0$, donner un équivalent (simple) de $u_n - l$.

III.3. Asymptotes et développements asymptotiques

Durant tout le chapitre, nous avons considéré des développements limités, c'est-à-dire des développements de la forme $f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$. On peut généraliser cette notion en admettant tous les développements de la forme :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=-p}^n a_k h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

De tels développements sont appelés *développements limités généralisés* ou encore *développements asymptotiques*.

Ex. 11.17 Donner les 4 premiers termes du développement asymptotique de $x \mapsto \frac{1}{x(1+x)}$ en 0.

Cor. 11.17


Méthode : Détermination d'asymptotes obliques

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la représentation graphique d'une fonction f en $\pm\infty$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Les développements **asymptotiques** peuvent être utilisés pour l'obtention d'**asymptotes obliques** à la représentation graphique d'une fonction f en posant pour $x \rightarrow \pm\infty$, $h = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ puis en développant $f\left(\frac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0 :

si $f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{a}{h} + b + o_{h \rightarrow 0}(1)$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la représentation graphique de f .

Ex. 11.18 Effectuer un développement asymptotique de $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ au voisinage de $\pm\infty$ et en déduire la position de C_f relativement à ses asymptotes.

Cor. 11.18

Ex. 11.19 Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

- 1) Quel est l'ensemble de définition de g ?
- 2) Montrer que la représentation graphique de g possède deux asymptotes obliques au voisinage de $\pm\infty$.
On donnera une équation de chacune des asymptotes obliques.
- 3) Étudier les variations de g et construire sa représentation graphique.

Cor. 11.19

III.4. Divers

Ex. 11.20 Montrer que la fonction $x \mapsto x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ est définie au voisinage de $+\infty$, et admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.

Quelle est la position de la courbe représentative de f et de son asymptote ?

Ex. 11.21 Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n^2 + u_n}$.

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n - 1 \leq u_n \leq n$.
- 2) En déduire un équivalent de u_n puis donner un développement asymptotique de u_n à la précision $o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ex. 11.22

- 1) Montrer que l'équation $x^3 + nx = 1$ admet, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une unique solution réelle, notée x_n .
- 2) Comment appelle-t-on le mode de définition de la suite u ?
- 3) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$.
- 4) En déduire la limite de x_n puis que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
- 5) Donner un développement asymptotique de x_n à la précision $o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)$.