Sommes finies, systèmes d'équations, nombres complexes

<u>L'usage d'une calculatrice est interdit.</u>
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Cours

1) Donner la définition d'une application injective puis la traduction symbolique de cette définition.
2) Soit $z \in \mathbb{C}$.
   Donner $|z|, \mathcal{R}e\,(z)$ et $\mathcal{I}m\,(z)$ à l'aide de z et $\overline{z}$ uniquement.

Exercices

Exercice 1.

Donner la ***forme algébrique et la forme trigonométrique*** des nombres complexes ci-dessous :

$A = \dfrac{5+i}{3-2i}$ $\qquad B = \dfrac{4\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$ $\qquad C = (-1+i)^{36}$

Exercice 2.

Résoudre le système suivant d'inconnues ***complexes*** u, v, w :

$$S_1 : \begin{cases} iu + v + w = -1 \\ u + iv + w = 0 \\ u + v + iw = 1 \end{cases}$$

Exercice 3.

Résoudre le système suivant d'inconnues $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.
On mettra le plus grand soin dans l'exactitude des raisonnements, notamment on fera clairement apparaître la (ou les) valeur(s) particulière(s) du paramètre conduisant à des cas singuliers.

$$S_2 : \begin{cases} ax + 2y + 3z = 1 \\ x + (1+a)y + 3z = 1 \\ x + 2y + (2a+1)z = a \end{cases}$$

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & J \\ x & \mapsto & \ln(1+x)+\ln(1-x) \end{array} \right.$

1) Donner l'ensemble de définition I de f.
2) Étudier f sur son ensemble de définition et construire son tableau de variations.
3) Comment doit-on choisir l'intervalle J pour que f soit surjective ?
4) Soit $y \in J$.
   Résoudre l'équation $f(x) = y$.
5) Tracer une représentation graphique rapide de f sur le repère fourni en annexe.
   Applications numériques : on pourra utiliser $\ln(2) \approx 0,7$, $\ln(3) \approx 1,1$, $\ln(5) \approx 1,6$ et $\ln(7) \approx 1,95$.

Exercice 5.

Pour tout entier naturel n et tout entier naturel $p \geqslant n$, on définit les sommes suivantes :

$$S_{n,p} = \sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} \qquad T_p = \sum_{k=0}^{p} S_{k,p} \qquad U_n = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \binom{k}{j} 2^k$$

Le but de cet exercice est de les simplifier.

1) ***Recopier*** et ***compléter*** le triangle de Pascal ci-contre :

1										
1	1									
1		1								
1			1							
1				1						
1					1					
1						1				
1							1			
1								1		
1									1	
1										1

2) À l'aide du triangle de Pascal de la question précédente, expliciter ***chacun des termes des sommes ci-dessous***, puis calculer leur valeur :
   $S_{0,3} \qquad S_{1,3} \qquad S_{2,3} \qquad S_{3,3} \qquad T_3 \qquad U_3$
3) Justifier que, pour tout entier k ***strictement positif*** et pour tout entier $n \in [\![0; k-1]\!]$, on a :
$$\binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$$
4) En utilisant la question précédente, montrer que $S_{n,p} = \binom{p+1}{n+1}$.
5) En déduire une expression simplifiée, pour $p \in \mathbb{N}$, de T_p.
6) Quelle est la somme de toutes les cases du triangle de Pascal rempli à la question 1) ?
   Indication : en réfléchissant bien, on peut répondre à cette question sans avoir à effectuer vraiment cette somme...
7) Simplifier U_n.
   (On attend ici une expression ne faisant plus intervenir le signe $\sum$...)

Exercice 4 - ANNEXE

NOM : .... ***Prénom*** : ....