Maths - DS n°3 - Mercredi 15 janvier, 2 heures

Equa. diff., intégrales, suites, calcul matriciel

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Cours

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   On suppose de plus que $BA = I_n$ et $AC = I_n$.
   Montrer que $B = C$.

2) Définition de la transposée d'une matrice et propriétés de la transposition. Caractérisation des matrices symétriques et antisymétriques par leur transposée.

Exercices

Exercice 1.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Calculer, en fonction de α, la matrice P_α^{-1} lorsqu'elle existe.
   On prendra notamment soin de préciser les valeurs de α pour lesquelles la matrice n'est pas inversible.

2) Résoudre le système $\begin{cases} x & & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$.

3) Résoudre le système $\begin{cases} x & & + & 2z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2.

Étant donné un entier naturel n, on définit S_n par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

On définit de plus u et v par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n &= S_n - 2\sqrt{n} \\ v_n &= S_n - 2\sqrt{n+1} \end{cases}$$

1) Montrer que u et v sont adjacentes.
2) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.
3) Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$?

Exercice 3.

1) Donner l'ensemble des fonctions $y :]-1;1[\to \mathbb{R}$ dérivables et solutions de

$$y' + \frac{t}{1-t^2} y = 1$$

2) Donner l'ensemble des fonctions $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivables et solutions de

$$w'' + 4w' + 5w = \cos(t)$$

Exercice 4.

Soit f une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(E) : \forall (t,u) \in \mathbb{R}^2, f(t+u) = f(t)f(u)$$

1) Montrer que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
2) On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
3) On suppose que $f(0) = 1$ et on note $a = f'(0) \in \mathbb{R}$.
   a) Montrer que $f'(t) = af(t)$.
   b) En déduire une expression de $f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
4) Quelles sont les fonctions f continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) ?

Exercice 5.

Le but de cet exercice est de calculer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

On pose, pour tout entier n positif ou nul, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^n(t) \mathrm{d}t$.

1) Calculer I_0, I_1, J_0 et J_1.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

4) a) Pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, montrer que $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(t)$.

   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2})$.

   c) Montrer alors que la suite $\left(\dfrac{J_n}{I_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \dfrac{(n+1)(n+2)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}}{2}$.

6) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{J_n}{I_n} - \dfrac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \dfrac{2}{(n+2)^2}$.

7) Déduire de la question précédente la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.