# Correction DS n°3

## Exercice 1.

1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & x \\ 2 & 3 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & x \\ 0 & 3 & 1-2\alpha & y-2x \\ 0 & 1 & 1-\alpha & z-x \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$
$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & x \\ 0 & 0 & -2+\alpha & x+y-3z \\ 0 & 1 & 1-\alpha & z-x \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$$
$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & x \\ 0 & 1 & 1-\alpha & z-x \\ 0 & 0 & -2+\alpha & x+y-3z \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

- Si $\alpha = 2$, la dernière ligne de la dernière matrice obtenue est nulle, donc $P_\alpha$ n'est pas inversible.
- Si $\alpha \neq 2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & x \\ 2 & 3 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & x \\ 0 & 1 & 1-\alpha & z-x \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x+y-3z}{\alpha-2} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{\alpha-2}L_3$$
$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x - \alpha \times \dfrac{x+y-3z}{\alpha-2} \\ 0 & 1 & 0 & z-x-(1-\alpha)\times\dfrac{x+y-3z}{\alpha-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x+y-3z}{\alpha-2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - \alpha L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1-\alpha)L_3 \end{matrix}$$
$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{-2x-\alpha y+3\alpha z}{\alpha-2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{x+(\alpha-1)y+(1-2\alpha)z}{\alpha-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{x+y-3z}{\alpha-2} \end{pmatrix}$$

Donc
$$\alpha \neq 2 \Rightarrow P_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{\alpha-2} & \dfrac{-\alpha}{\alpha-2} & \dfrac{3\alpha}{\alpha-2} \\ \dfrac{1}{\alpha-2} & \dfrac{\alpha-1}{\alpha-2} & \dfrac{1-2\alpha}{\alpha-2} \\ \dfrac{1}{\alpha-2} & \dfrac{1}{\alpha-2} & \dfrac{-3}{\alpha-2} \end{pmatrix}$$

2) Ce système est de la forme $P_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Or $P_1$ est inversible d'après la question précédente.

Donc le système possède une unique solution qui est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_1^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{1-2} & \dfrac{-1}{1-2} & \dfrac{3}{1-2} \\ \dfrac{1}{1-2} & \dfrac{1-1}{1-2} & \dfrac{1-2}{1-2} \\ \dfrac{1}{1-2} & \dfrac{1}{1-2} & \dfrac{-3}{1-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le système a donc pour unique solution $(x; y; z) = (1; -1; 1)$.

3) Ici, le système s'écrit $P_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Or $P_2$ ***n'est pas inversible*** ! Le système a donc ou bien une infinité de solutions, ou bien aucune.

Plus précisément :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 2z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & & + & 2z & = & 3 \\ & 3y & - & 3z & = & -6 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & y & - & z & = & -2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & & + & 2z & = & 3 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & y & - & z & = & -2 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & & + & 2z & = & 3 \\ & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x = 3 - 2z, y = -2 + z\} \\ &= \{(3 - 2z; -2 + z; z), z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est la droite passant par $(3; -2; 0)$ et dirigée par le vecteur $(-2; 1; 1)$.

**Exercice 2.**

1) Montrons que $u$ et $v$ sont adjacentes.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - S_n - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\frac{\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Or $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n+1}$ et cette inégalité ne fait intervenir que des réels ***strictement positifs***.

Par décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} > \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ : la suite $u$ est strictement décroissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{n+1} - S_n - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \end{aligned}$$

Or, cette fois-ci, $\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} > 2\sqrt{n+1}$ : on montre donc que la suite $v$ est ***strictement croissante***.

Enfin,

$u_n - v_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Donc les suites $u$ et $v$ sont adjacentes.

2) Donc $u$ et $v$ ***convergent vers la même limite*** (réelle) : notons-la $l$.

Mieux, comme $u$ est décroissante et $v$ croissante, on peut donc affirmer que

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant l \leqslant u_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, S_n - 2\sqrt{n+1} \leqslant l \leqslant S_n - 2\sqrt{n}$.

Notamment, $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \geqslant l + 2\sqrt{n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (d'après le théorème des gendarmes).

3) Nous avons montré à la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \geqslant l + 2\sqrt{n}$ d'une part, et que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n - 2\sqrt{n+1} \leqslant l$ d'autre part.

Cette seconde inégalité se réécrit $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leqslant l + 2\sqrt{n+1}$.

On peut donc utiliser les deux inégalités obtenues pour en déduire l'encadrement :

$\forall n \in \mathbb{N}, l + 2\sqrt{n} \leqslant S_n \leqslant l + 2\sqrt{n+1}$

Puis, en divisant par $\sqrt{n} > 0$ pour $n > 0$ :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{l}{\sqrt{n}} + 2 \leqslant \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{l}{\sqrt{n}} + 2\sqrt{1+\frac{1}{n}}$

En utilisant à nouveau le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$$

## Exercice 3.

1) $y' + \dfrac{t}{1-t^2}y = 1$ :

Équation homogène : $y' + \dfrac{t}{1-t^2}y = 0$

$y = \lambda \exp\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int^t \dfrac{-2u}{1-u^2}\mathrm{d}u\right) = \lambda \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right)\right) = \lambda\sqrt{1-t^2}, \lambda \in \mathbb{R}$

car pour $t \in ]-1;1[, 1-t^2 > 0$.

Solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante :

$\lambda'\sqrt{1-t^2} = 1$ et on choisit $\lambda = \operatorname{Arcsin} t$.

Conclusion : la solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation avec second membre donc

$y = (\lambda + \operatorname{Arcsin} t)\sqrt{1-t^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) $w'' + 4w' + 5w = \cos(t)$ :

On résout l'équation caractéristique :

$z^2 + 4z + 5 = 0$, $\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$. Il y a donc deux solutions à l'équation caractéristique qui sont $z_1 = \dfrac{-4+2i}{2} = -2 + i$ et $z_2 = -2 - i$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc $w = \lambda e^{(-2+i)t} + \mu e^{(-2-i)t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Solution particulière de l'équation avec second membre : on écrit que $\cos(t) = \mathcal{R}e\left(e^{it}\right)$ et on cherche $w_P$ solution $w'' + 4w' + 5w = e^{it}$ sous la forme $Ue^{it}$ car $i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique.

$w' = iUe^{it}$.

$w'' = -Ue^{it}$

Donc $w'' + 4w' + 5w = e^{it}$

$\Leftrightarrow U\left(-1 + 4i + 5\right)e^{it} = e^{it}$

$\Leftrightarrow U = \dfrac{1}{4+4i} = \dfrac{1-i}{8}$ car $e^{it}$ ne s'annule jamais pour $t \in \mathbb{R}$.

Donc une solution particulière de $w''+4w'+5w = e^{it}$ est $w_P = \dfrac{1-i}{8}e^{it} = \dfrac{1-i}{8}\left(\cos(t) + i\sin(t)\right)$.

Donc une solution particulière de $w'' + 4w' + 5w = \cos(t)$ est

$w_P = \mathcal{R}e\left(\dfrac{1-i}{8}\left(\cos(t) + i\sin(t)\right)\right) = \dfrac{\cos(t) + \sin(t)}{8}$.

Finalement, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions

$$w = t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{(-2+i)t} + \mu e^{(-2-i)t} + \frac{\cos(t) + \sin(t)}{8}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

**Exercice 4.**

1) On pose $u = t = 0$ : $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0)\left(f(0) - 1\right) = 0$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

2) On pose $u = 0$ : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = f(t)f(0) = 0$ car on a supposé $f(0) = 0$. Donc $f$ est la fonction nulle.

3) La fonction $f$ étant supposée dérivable, dérivons l'équation fonctionnelle par rapport à $u$ : $\forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$, $f'(t + u) = f(t)f'(u)$.

   a) On pose $u = 0$ dans la relation précédente et on obtient, pour tout réel $t$ : $f'(t) = f(t)f'(0) = af(t)$.

   b) $f$ est donc solution de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ dont les solutions sont de la forme $y = \lambda e^{at}$.

   Donc si $f$ est solution de l'équation fonctionnelle donnée avec $f(0) = 1$, alors $\exists (a, \lambda) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \lambda e^{at}$.

   Or $f(0) = 1$ donc $\lambda e^{a\times 0} = \lambda = 1$. On en déduit que si $f$ est solution de $(E)$ avec $f(0) = 1$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $t$, $f(t) = e^{at}$.

   Réinjectons ces solutions dans $(E)$ :

   $\forall (t, u) \in \mathbb{R}^2, f(t + u) = e^{a(t+u)} = e^{at+au} = e^{at}e^{au} = f(t)f(u)$.

   Donc les solutions de $(E)$ telles que $f(0) = 1$ sont exactement les fonctions de la forme $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

4) Les fonctions $f$ continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(E)$ sont donc :

   - la fonction nulle ;

- les fonctions de la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax}$ avec $a$ une constante réelle (ou complexe si on admet les solutions à valeurs complexes) quelconque.

**Exercice 5.**

1)

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(t)\mathrm{d}t = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^1(t)\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2\cos^0(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$$

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} t^2\cos(t)\mathrm{d}t = \left[t^2\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} 2t\sin(t)\mathrm{d}t \text{ en intégrant par parties.}$$

Donc $J_1 = \dfrac{\pi^2}{4} + [2t\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(t)\mathrm{d}t = \dfrac{\pi^2}{4} - 2\,[\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}$ à l'aide d'une deuxième intégration par parties !

Autrement dit $J_1 = \dfrac{\pi^2}{4} - 2$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$ est l'intégrale sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ d'une fonction continue positive et non nulle.

Donc $I_n > 0$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t.$$

Donc $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\big(1-\sin^2(t)\big)\mathrm{d}t = I_n - \int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t$ et on intègre par parties en posant $u' = \cos^n(t)\sin(t)$ et $v = \sin(t)$.

On a donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t = \left[\sin(t)\times\frac{-\cos^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{n+2}}{n+1}\mathrm{d}t = \frac{I_{n+2}}{n+1}$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = I_n - \dfrac{I_{n+2}}{n+1}$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

4) a) Pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $t \geqslant 0$.

Étudions, sur cet intervalle, $f(t) = \frac{\pi}{2}\sin(t) - t$.

$f$ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $t$ dans cet intervalle :

$f'(t) = \frac{\pi}{2}\cos(t) - 1$. Or cos est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $f'$ aussi.

De plus $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Donc, par stricte décroissance, il existe un unique $t_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f'(t_0) = 0$.

On a donc le tableau de variations suivant pour $f$ :

| Valeurs de $t$ | $0$ | | $t_0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | $0$ | $\nearrow$ | ? | $\searrow$ | $0$ |

Donc, $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(t) \geqslant 0$.

Donc, $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\pi}{2}\sin(t) \geqslant t$.
En conclusion, on a bien, $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(t)$

b) La fonction $t \mapsto t^2$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on déduit de la question précédente que
$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leqslant t^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^n(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t$ d'après l'encadrement précédent.
Or $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4}\left(1-\cos^2(t)\right)\cos^n(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2})$.
Donc $J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2})$.
Et, de la même façon, en utilisant l'inégalité gauche de l'encadrement, on montre que $J_n \geqslant 0$.
Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2})$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après l'encadrement obtenu à la question précédente, sachant que $I_n > 0$, on a :
$0 \leqslant \dfrac{J_n}{I_n} \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\left(1 - \dfrac{I_{n+2}}{I_n}\right)$.
Or d'après la question 3), $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$.
Donc $0 \leqslant \dfrac{J_n}{I_n} \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\left(1 - \dfrac{n+1}{n+2}\right)$.
Autrement dit, $0 \leqslant \dfrac{J_n}{I_n} \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{1}{n+2}$.
Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite $\left(\dfrac{J_n}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

5) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \dfrac{(n+1)(n+2)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}}{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} 1 \times \cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[t \times \cos^{n+2}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t \times (-\sin(t)) \times (n+2)\cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t \\
&= (n+2)\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On intègre à nouveau par parties en primitivant $t$ et en dérivant le reste du produit dans l'intégrale.

$$
\begin{aligned}
\frac{I_{n+2}}{n+2} &= \int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} t^2\left(\cos(t)\cos^{n+1}(t)+\sin(t)\times(n+1)(-\sin(t))\cos^n(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t + \frac{n+1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}J_{n+2} + \frac{n+1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2(t)\right)\cos^n(t)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}J_{n+2} + \frac{n+1}{2}\left(J_n - J_{n+2}\right) \\
&= -\frac{n+2}{2}J_{n+2} + \frac{n+1}{2}J_n
\end{aligned}
$$

On a donc bien

$$I_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}}{2}$$

6) D'une part, d'après la question 2), $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$, notamment $I_n \neq 0$.
D'autre part, d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \dfrac{(n+1)(n+2)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}}{2}$.
Donc, en divisant par $I_{n+2}$, non nul :
$\forall n \in \mathbb{N}, 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)\frac{J_n}{I_{n+2}} - (n+2)^2\frac{J_{n+2}}{I_{n+2}}}{2}$
Or, d'après la question 3), $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{I_{n+2}} = \dfrac{n+2}{(n+1)I_n}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)\frac{(n+2)J_n}{(n+1)I_n} - (n+2)^2\frac{J_{n+2}}{I_{n+2}}}{2}$
En multipliant cette dernière égalité par $\dfrac{2}{(n+2)^2}$, on obtient bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{(n+2)^2} = \frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}}$$

7) La question précédente permet d'introduire un télescopage dans la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.
En effet,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{(k+2)^2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{J_k}{I_k} - \frac{J_{k+2}}{I_{k+2}}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\times\left(\tfrac{J_0}{I_0} + \tfrac{J_1}{I_1} - \tfrac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - \tfrac{J_n}{I_n}\right) \quad \text{par télescopage} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\times\left(\tfrac{\pi^2}{12} + \tfrac{\pi^2}{4} - 2 - \tfrac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - \tfrac{J_n}{I_n}\right)
\end{aligned}
$$

Comme par ailleurs, d'après la question 4)c), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{J_n}{I_n} = 0$, on peut donc affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} - 2\right) = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$