Correction DS n°1

Exercice 1.

Formes algébriques :
$A = \dfrac{5+i}{3-2i} = \dfrac{(5+i)(3+2i)}{3^2+2^2} = \dfrac{15-2+13i}{13} = 1+i$
$B = \dfrac{4\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}(-3-i\sqrt{3})}{9+3} = \dfrac{-12\sqrt{3}-12i}{12} = -\sqrt{3}-i$
$C = (-1+i)^{36} = \left((-1+i)^2\right)^{18} = (-2i)^{18} = 2^{18}\times(i^2)^9 = -2^{18}$
Formes trigonométriques :
$A = \sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
$B = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1}{2}\right) = 2e^{\frac{-5i\pi}{6}}$
$C = -2^{18} = 2^{18}\times(-1) = 2^{18}e^{i\pi}$

Exercice 2.

$$S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} iu + v + w = -1 \\ u + iv + w = 0 \\ u + v + iw = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2v + (1-i)w = -1 & L_1 \leftarrow L_1 - iL_2 \\ u + iv + w = 0 \\ (1-i)v + (i-1)w = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-i)v = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ u + iv + w = 0 \\ (1-i)v + (i-1)w = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u = -w = \frac{1+i}{2} \\ w = \frac{1}{i-1} = \frac{-1-i}{2} \end{cases}$$

Finalement, ce système possède une unique solution $(u;v;w)$ qui est

$$(u;v;w) = \left(\frac{1+i}{2};0;\frac{-1-i}{2}\right)$$

Exercice 3.

$$S_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lclclcl} ax & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & (1+a)y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & (2a+1)z & = & a \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lclclcll} & & (2-a-a^2)y & + & (3-3a)z & = & 1-a & L_1 \leftarrow L_1 - aL_2 \\ x & + & (1+a)y & + & 3z & = & 1 & \\ & & (1-a)y & + & (2a-2)z & = & a-1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lclclcll} & & (2-a-a^2)y & + & (3-3a)z & = & 1-a & \\ x & + & (1+a)y & + & 3z & = & 1 & \\ & & (7-5a-2a^2)y & & & = & a-1 & L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_1 \end{array}\right.$$

À ce point de la résolution, il faut distinguer des cas suivant que $7-5a-2a^2$ est nul ou non.

$\Delta = 25 + 56 = 81$

$a_1 = \dfrac{5+9}{-4} = \dfrac{-7}{2}$ et $a_2 = \dfrac{5-9}{-4} = 1$

- Si $a \neq \dfrac{-7}{2}$ et $a \neq 1$:

$$S_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lclclcl} & & (2+a)y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & (1+a)y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & & & = & \dfrac{a-1}{7-5a-2a^2} = \dfrac{-1}{7+2a} \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{1-a}L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 3z & = & 1 + \dfrac{2+a}{7+2a} = \dfrac{3a+9}{7+2a} \\ x & = & 1 + \dfrac{1+a}{7+2a} - \dfrac{3a+9}{7+2a} = \dfrac{-1}{7+2a} \\ y & = & = \dfrac{-1}{7+2a} \end{array}\right.$$

Il y a donc une unique solution si $a \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-7}{2}; 1\right\}$ et cette solution est

$$(x;y;z) = \left(\frac{-1}{7+2a}; \frac{-1}{7+2a}; \frac{3+a}{7+2a}\right)$$

- Si $a = \dfrac{-7}{2}$, alors le système se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} & & \frac{-27}{4}y & + & \frac{27}{2}z & = & \frac{9}{2} \\ x & - & \frac{5}{2}y & + & 3z & = & 1 \\ & & 0 & & & = & \dfrac{-9}{2} \end{array}\right.$$

qui n'a aucune solution. Donc, si $a = \dfrac{-7}{2}$, $\mathcal{S} = \emptyset$.

- Si $a = 1$, alors le système se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} & & & & 0 & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & 0 & & & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 1$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, x = -2y - 3z + 1\right\} = \{(1-2y-3z; y; z), y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 4.

1) $f(x)$ est définie si et seulement si $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$.
   Donc l'ensemble de définition de f est $I =]-1;1[$.

2) f est continue et dérivable sur I et $\forall x \in I$:
   $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{-1}{1-x} = \dfrac{-2x}{1-x^2}$.
   Or pour $x \in I$, $x^2 < 1$, donc $f'(x)$ est du signe de $-2x$.

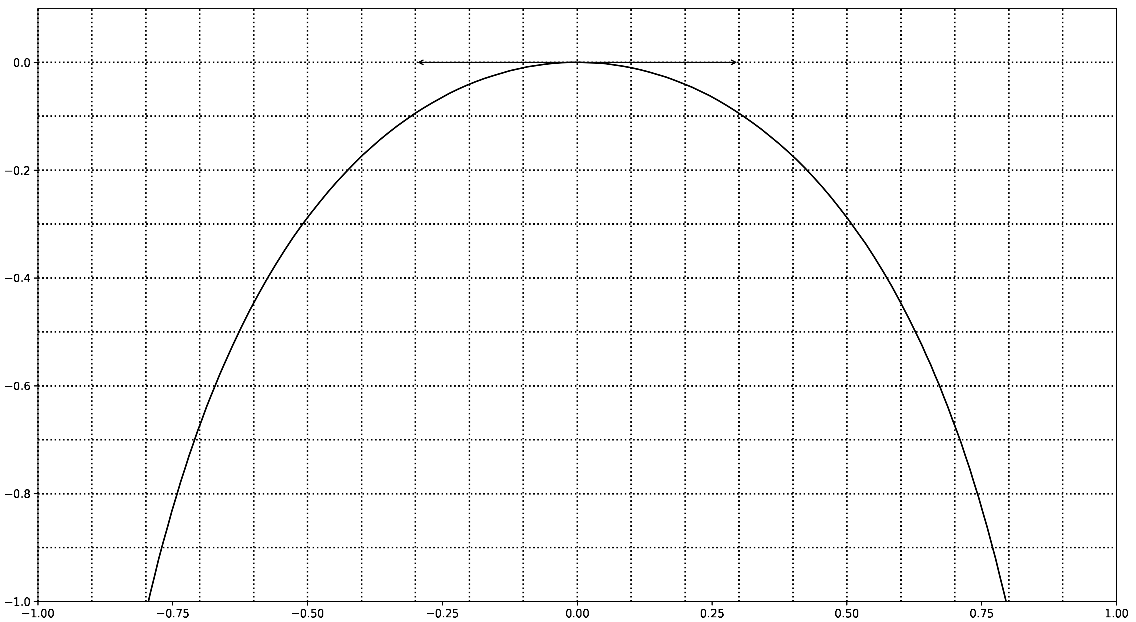
Valeurs de x	-1		0		1
Signe de $f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
Variations de f	$\|_{-\infty}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$_{-\infty}\|$

3) f est continue sur son ensemble de définition.
   Donc, d'après le théorème de la bijection continue et le tableau de variations de la question précédente, pour que f soit surjective il faut choisir

$$J =]-\infty; 0]$$

4) Soit $y \in J$.
   $f(x) = y \Leftrightarrow \ln(1-x^2) = y \Leftrightarrow 1 - x^2 = e^y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-e^y}$
   L'équation $f(x) = y$ possède donc deux solutions dans le cas général, sauf pour $y = 0$, pour laquelle $x = 0$ est solution unique.

5)



Exercice 5.

1)

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

2) $S_{0,3} = 1+1+1+1 = 4$
$S_{1,3} = 1+2+3 = 6$
$S_{2,3} = 1+3 = 4$
$S_{3,3} = 1$
$T_3 = 4+6+4+1 = 15$
$U_3 = 2^1 + 2\times 2^2 + 1\times 2^2 + 3\times 2^3 + 3\times 2^3 + 1\times 2^3 = 70$

3) La formule de Pascal s'écrit, pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $K \in [\![0; N-1]\!]$:

$$\begin{pmatrix} N \\ K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ K+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N+1 \\ K+1 \end{pmatrix}$$

En posant $N = k$ et $K = n$, on a donc, pour tout entier k ***strictement positif*** et pour tout entier $n \in [\![0; k-1]\!]$:

$$\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k \\ n+1 \end{pmatrix}$$

4) Simplifions $S_{n,p}$:

$$\begin{aligned}
S_{n,p} &= \textstyle\sum_{k=n}^{p} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} + \textstyle\sum_{k=n+1}^{p} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \\
&= 1 + \textstyle\sum_{k=n+1}^{p} \begin{pmatrix} k+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k \\ n+1 \end{pmatrix} \\
&= 1 + \begin{pmatrix} p+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} \qquad \text{par télescopage} \\
&= \begin{pmatrix} p+1 \\ n+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5) Simplifions T_p :

$$\begin{aligned}
T_p &= \sum_{k=0}^{p} S_{k,p} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k+1} \\
&= \sum_{j=1}^{p+1} \binom{p+1}{j} \qquad \text{en effectuant le changement d'indice } j = k+1 \\
&= -1 + \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} \\
&= 2^{p+1} - 1
\end{aligned}$$

6) La somme de toutes les cases du triangle de Pascal rempli à la question 1) est égale, par définition de T_p, à T_{10}.
Elle vaut donc $T_{10} = 2^{11} - 1 = 2047$.

7) Simplifions U_n.

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \binom{k}{j} 2^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} 2^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^k \left(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^k \left(-1 + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^k \left(-1 + 2^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 4^k - 2^k \\
&= 4 \times \frac{1-4^n}{1-4} - 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} \\
&= \frac{4\left(4^n - 1\right)}{3} - 2^{n+1} + 2
\end{aligned}$$