

# Développements limités

## I. Développements limités : calcul

**Ex. 11.1** Donner le développement limité à l'ordre 5 des fonctions suivantes :

- $x \mapsto e^x$  au voisinage de 1 ;
- $x \mapsto \cos(x)$  au voisinage de  $\frac{\pi}{4}$  ;
- $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  au voisinage de  $\frac{1}{2}$ .

**Ex. 11.2** DL en 0 des expressions suivantes :

- $\sqrt{1+x}$  à l'ordre 4
- $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$  à l'ordre 3
- $\frac{\sin(x)}{x}$  à l'ordre 7
- $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$  à l'ordre 4
- $\frac{\ln(1-x)}{\ln(1-x)}$  à l'ordre 2
- $\operatorname{Arccos}(x)$  à l'ordre 5
- $e^{\cos x}$  à l'ordre 4
- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}$  à l'ordre 7

**Ex. 11.3** (Cor.)

1. Donner un DL en 0 à l'ordre  $n$  des fonctions suivantes :

- $$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} &\mapsto \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} &\mapsto \frac{1}{1-x} - 1 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} &\mapsto \frac{x+1}{x-1} & x \in \mathbb{R}^* &\mapsto \frac{e^x - 1}{x} \\ x \in ]-\infty; 1[ &\mapsto -\ln(1-x) & x \in \mathbb{R} &\mapsto \frac{1}{1+x^2} \\ x \in \mathbb{R} &\mapsto \cos(\sqrt{2}x) & x \neq \frac{\pi}{2}[\pi] &\mapsto \tan(x) \end{aligned}$$

2. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \end{aligned}$$

**Ex. 11.4** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\frac{f(x)}{f(x)} = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$ .

- Vérifier que  $f$  possède un  $DL_2(0)$ .
- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  mais n'est pas  $C^1(\mathbb{R})$ .

**Ex. 11.5** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $e^x = n - x$  admet une unique solution positive que l'on note  $x_n$ .  
Déterminer un équivalent  $u_n$  de  $x_n$  puis un équivalent de  $x_n - u_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Ex. 11.6** Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \operatorname{ch} x - 2}{x^4}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

## II. Développements limités : utilisation

**Ex. 11.7** Soit  $f$  définie sur  $] -\pi; \pi[ \setminus \{0\}$  par  $f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ .

- Déterminer un  $DL_3(0)$  de  $f$ .
- En déduire que  $f$  peut être prolongée en 0 en une fonction dérivable.

On note  $g$  ce prolongement.

- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $g$  en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

### Ex. 11.8 CCP MP 2019 - n°1

1. On considère deux suites numériques  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ . Démontrer que  $u_n$  et  $v_n$  sont de même signe à partir d'un certain rang.

2. Déterminer le signe, au voisinage de  $+\infty$ , de

$$u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ex. 11.9 D'après CCP MP 2019 - n°46 On considère la suite définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ .

1. Prouver que  $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  où  $\alpha$  est un réel que l'on déterminera.

2. Donner la limite, puis un équivalent de  $u_n$  au voisinage de  $+\infty$ .

### Ex. 11.10

1. Prouver que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $x = \tan(x)$  admet une unique solution  $x_n$  dans l'intervalle  $I_n = ]n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[$ .

2. Exprimer  $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$  en fonction de  $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$ .

3. En déduire que  $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  où on explicitera  $a$  et  $b$ .

Ex. 11.11 Asymptote et position par rapport à la courbe en  $+\infty$

1.  $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$       2.  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$  en  $\pm\infty$

3.  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$       4.  $f(x) = (x+1)\operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{2}{x}\right)$



### Méthode : Recollement de solutions d'une EDL1

Lorsqu'une équation différentielle linéaire à l'ordre 1 est de la forme  $u(t)y' + v(t)y = w(t)$ , on commence par la diviser par  $u(t)$  sur des intervalles où  $u(t)$  ne s'annule pas pour obtenir une EDL1 de la forme  $y' + a(t)y = b(t)$ .

Une fois cette équation résolue (avec des constantes différentes sur chaque intervalle où  $u(t)$  ne s'annule pas), on cherche à savoir si les solutions peuvent être **recollées** aux points où  $u(t)$  s'annule pour obtenir des fonctions dérivables (donc continues).

Pour effectuer ce recollement, on utilise les développements limités grâce à la proposition 11.15 du cours sur les développements limités.

Ex. 11.12 Trouver l'ensemble des fonctions  $f : ]-\infty; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $\forall t \in ]-\infty; 1[, t(t-1)f'(t) - (t-2)f(t) = 0$ .

### Ex. 11.13

1. Donner les solutions dérivables sur  $\mathbb{R}$  de  $(1+t)y' + y = (1+t)\sin t$ .

2. Même question pour  $x(1-x)y' + y = x-1$ .

## Corrections

**Cor. 11.3** : Exemple de calcul de la première limite :

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} - 1 = -\frac{1}{2} + o(1).$$

**Remarque importante** : ici, par définition,  $\epsilon(x) = \frac{o(1)}{x \rightarrow 0}$  est une fonction vérifiant  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon(x)}{1} = 0$ .

**À retenir** :  $\frac{o(1)}{x \rightarrow 0}$  représente une **expression tendant vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0**.

D'une manière générale,  $\frac{o(1)}{x \rightarrow x_0}$  représente une **expression tendant vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $x_0$** .

Autrement dit, une fonction est négligeable devant 1 lorsqu'elle tend vers 0 (au voisinage d'un point).

**Retour au calcul de limite** :

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{o(1)}{x \rightarrow 0} \text{ (1) donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$