

Espaces vectoriels

I. Définition, sous-espaces vectoriels

Ex. 12.1 (Cor.) On considère $F = \{x + ix, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$. Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, mais n'est pas un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Ex. 12.2 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$?

- 1) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
- 2) $\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t)dt = 0\}$
- 3) $\{f \in E, f(0) = f(1) + 1\}$
- 4) $\{f \in E, f(0) = 2f(1)\}$
- 5) $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f'(0) = 0\}$

Ex. 12.3

1. On se place sur $E = \mathbb{R}^3$ et on définit $F = \text{Vect}((1; 0; 1); (1; 1; 0))$ et $G = \text{Vect}((0; 1; 1))$.
 - Déterminer $F \cap G$.
 - Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2. On se place sur $E_2 = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on définit

$$F_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et }$$

$$G_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

- Déterminer $F_2 \cap G_2$.
- Montrer que $E_2 = F_2 \oplus G_2$.

Ex. 12.4 Soit $(E, +, \cdot)$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère le sous-espace vectoriel de E défini par $H = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ (voir exercice 12.2). Trouver un supplémentaire de H dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Ex. 12.5 (Cor.) Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F + G$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F . Montrer que $E = F' \oplus G$.

Ex. 12.6 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, A , B et C trois sous-espaces vectoriels de E tels que A et B sont supplémentaires dans E et $A \subset C$. Montrer que A et $B \cap C$ sont supplémentaires dans C .

Ex. 12.7 (Cor.) Soient $\vec{u}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; 1)$, $\vec{e}_1 = (3; 2; 2)$ et $\vec{e}_2 = (0; 1; 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Ex. 12.8

1. Montrer que $\text{Vect}((1; 2))$ et $\text{Vect}((3; 4))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\text{Vect}(X)$ et $\text{Vect}(1 + X^2; X - 3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

II. Applications linéaires

Ex. 12.9

1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

$$f : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x - 2y + 3z \in \mathbb{R}$$

$$g : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y; 1) \in \mathbb{R}^2$$

$$h : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y; x + y) \in \mathbb{R}^2$$

2. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires précédentes.

Ex. 12.10 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des formes linéaires sur $\mathcal{F}(\mathbb{R})$?

$$(1) f \mapsto f(0) \quad (2) f \mapsto f(1) - 1 \quad (3) f \mapsto f''(3)$$

$$(4) f \mapsto (f'(2))^2 \quad (5) f \mapsto \int_0^1 f(t)dt.$$

Ex. 12.11 Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto (P(0); P(1)) \end{cases}$.

Montrer que ϕ est linéaire, déterminer son noyau et son image.

Ex. 12.12 Soient $n \in \mathbb{N}$ et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $P \mapsto P - P'$. Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que

$$\phi^{-1}(Q) = \sum_{k=0}^{\deg Q} Q^{(k)}.$$

Ex. 12.13 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, et

$$\Phi : \begin{cases} E \times E & \rightarrow E \times E \\ (x; y) & \mapsto (x + y; x + f(x + y)) \end{cases}.$$

Montrer que Φ est un automorphisme de $E \times E$.

Ex. 12.14

1. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Montrer qu'il existe $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \phi(x; y) = (ax + by; cx + dy).$$

2. Donner des énoncés similaires pour

- $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$;
- $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$;
- $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Ex. 12.15 Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $u : E \rightarrow G$, $v : F \rightarrow G$ linéaires tels que $\text{Im } u \subset \text{Im } v$.

1. Montrer que si v est injective alors il existe une application linéaire $w : E \rightarrow F$ telle que $u = v \circ w$.

2. Montrer que si il existe un sous-espace vectoriel A de F tel que $\text{Ker } v \oplus A = F$, alors il existe une application linéaire $w : E \rightarrow F$ telle que $u = v \circ w$.

Ex. 12.16 (Cor.) E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = \text{Id}_E$.
Montrer que $F = \text{Ker } v \oplus \text{Im } u$.

III. Applications linéaires particulières

Ex. 12.17 Montrer que $s : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \mapsto (x - 2y; -y) \end{cases}$ est une symétrie de $\mathbb{R}^2$.

Préciser alors les espaces F et G tels que s soit la symétrie autour de F parallèlement à G .

Ex. 12.18 On se place sur $E = \mathbb{R}^3$.

$F = \text{Vect}((1; 0; 1); (1; 1; 0))$ et $G = \text{Vect}((0; 1; 1))$ de sorte à ce que $E = F \oplus G$ (cf. exercice 12.3).

Déterminer l'expression de la symétrie autour de F parallèlement à G .

Ex. 12.19 Donner l'expression de la projection sur $\text{Vect}((-1; 1))$ parallèlement à $\text{Vect}((2; 1))$.

Ex. 12.20 Déterminer la nature des applications linéaires suivantes :

1. $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-x; y - 2x) \in \mathbb{R}^2$
2. $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$

Ex. 12.21 Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $f : M \in E \mapsto M^T \in E$ et $g : M \in E \mapsto \frac{M - M^T}{2}$.

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de E .

2. Donner la nature géométrique de f et g .

On précisera notamment les sous-espaces caractéristiques des deux applications.

Ex. 12.22 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = \text{Id}_E$.

Montrer que $g \circ f$ est un projecteur et déterminer la décomposition de E associée (voir exercice 12.16...).

Ex. 12.23 (Cor.) Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer qu'on a alors $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Corrections

Cor. 12.1 : En considérant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $F = \text{Vect}(1 + i)$ est donc un sous-espace vectoriel donc un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$).

En considérant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, le vecteur $1 + i$ par exemple est un vecteur de F mais $i(1 + i) = -1 + i \notin F$: donc F n'est pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Cor. 12.5 : F' est le supplémentaire de $F \cap G$ (qui est un s.e.v. de $(E, +, \cdot)$) dans F . Donc $F = F' \oplus (F \cap G)$.

Nous devons démontrer que $F' \cap G = \{0\}$ et $F' + G = E$.

- Soit $x \in F' \cap G$. $x \in F' \Rightarrow x \in F$ et $x \in G \Rightarrow x \in F \cap G$. Donc $x \in F'$ et $x \in (F \cap G)$ donc $x = 0$.
Donc $F' \cap G = \{0\}$.
- Soit $x \in E$. $E = F + G$ donc $\exists(u, v) \in F \times G$, $x = u + v$.
 $u \in F$ et $F = F' \oplus (F \cap G)$ donc $\exists(u_1, u_2) \in F' \times (F \cap G)$ tels que $u = u_1 + u_2$.
Donc $x = u_1 + u_2 + v$ avec $u_1 \in F'$ et $u_2 + v \in G$ (car G est un e.v.).
Donc $E = F' + G$.

Finalement on a démontré que $E = F' \oplus G$.

Cor. 12.7 : Notons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Démontrons que $F = G$ par double inclusion :

- $F \subset G$: soit $u = \lambda u_1 + \mu u_2 \in F$. Montrons que $u \in G$, c'est-à-dire montrons qu'il existe $(x; y) \in G$ tels que $u = x e_1 + y e_2$. Cherchons donc $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1; 0; 0) + \mu(1; 1; 1) = x(3; 2; 2) + y(0; 1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3x \\ \mu &= 2x + y \\ \mu &= 2x + y \\ x &= \frac{\lambda + \mu}{3} \\ y &= \frac{\mu - 2\lambda}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Donc tout vecteur de F est un vecteur de G : $F \subset G$.

- $G \subset F$: soit $e = x e_1 + y e_2 \in G$, montrons qu'il existe $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $e = \lambda u_1 + \mu u_2$. Cherchons donc $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1; 0; 0) + \mu(1; 1; 1) = x(3; 2; 2) + y(0; 1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3x \\ \mu &= 2x + y \\ \mu &= 2x + y \\ \lambda &= x - y \\ \mu &= 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow$$

Donc tout vecteur de G est un vecteur de F : $G \subset F$.

Comme $F \subset G$ et $G \subset F$, on conclut que $F = G$.

Cor. 12.16 : Nous devons démontrer que $\ker v \cap \text{Im } u = \{0\}$ et $\ker v + \text{Im } u = F$.

- Soit $y \in \ker v \cap \text{Im } u$. $y \in \ker v$ donc $v(y) = 0$. Or $y \in \text{Im } u$, donc $\exists x \in E$, $y = u(x)$.
On a alors, $v \circ u(x) = v(y) = 0 = x$ car $v \circ u = \text{Id}_E$. Donc $y = u(0) = 0$.
On a démontré que $\ker v \cap \text{Im } u = \{0\}$.
- Soit $y \in F$. Soit $y_1 = u(v(y)) = u \circ v(y)$.
ATTENTION : on sait que $v \circ u = \text{Id}_E$ mais on ne sait rien sur $u \circ v$. En particulier, il est tout à fait possible que $y_1 \neq y$.
Posons de plus, $y_2 = y - y_1$ de sorte à ce que $y = y_1 + y_2$.
Par définition, $y_1 = u(v(y)) \in \text{Im } u$. De plus, comme $v \circ u = \text{Id}_E$
 $v(y_2) = v(y - y_1) = v(y) - v(y_1) = v(y) - v(u \circ v(y)) = v(y) - v(y) = 0$
Donc $y_2 \in \ker v$.
On a démontré que $\ker v + \text{Im } u = F$.
Finalement, $F = \ker v \oplus \text{Im } u$.

Cor. 12.23 :

1. $p + q$ est un projecteur si et seulement si $(p + q) \circ (p + q) = p + q$.
Or $(p + q) \circ (p + q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p + q + p \circ q + q \circ p$.
Donc $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = -q \circ p$.
Sens direct : on compose à gauche par p :
 $p \circ q = -q \circ p \Rightarrow p \circ p \circ q = p \circ q = -p \circ q \circ p = -(-q \circ p) \circ p = q \circ p$.
Or $p \circ q = -q \circ p \Rightarrow q \circ p \Rightarrow q \circ p = 0 = p \circ q$.
Réciproquement : $p \circ q = q \circ p = 0 \Rightarrow p \circ q = 0 = -0 = -q \circ p$.
On a donc bien $p + q$ est un projecteur de $E \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Soit $x \in \ker(p + q)$. Alors $p(x) + q(x) = 0$ donc $p(x) = -q(x)$. On compose par p :
 $p \circ p(x) = p(x) = -p \circ q(x) = 0$. Donc $x \in \ker p$.
De même en composant par q :
 $q \circ p(x) = 0 = -q \circ q(x) = -q(x)$. Donc $x \in \ker q$.
Donc $x \in \ker(p + q) \Rightarrow x \in \ker p \cap \ker q$.
Réciproquement, de façon évidente, si $x \in \ker p \cap \ker q$, alors $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = 0$.
Donc $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.