Correction DM n°3

Exercice 1.

1) Soit $r \in \mathbb{R}$ et $(E) : y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = r(1+x^2)$

Équation homogène : $(E_H) : y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 0$

$A(x) = \displaystyle\int^x -\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\ln(1+x^2)$ en reconnaissant la forme $\dfrac{u'}{u}$.

Donc $y_H = \lambda e^{\ln(1+x^2)} = \lambda\,(1+x^2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : par la méthode de variation de la constante.

On cherche une solution particulière sous la forme $y_P = \lambda(x)\,(1+x^2)$.

En réinjectant dans (E) on obtient : $\lambda'\,(1+x^2) = r\,(1+x^2)$.

Donc $\lambda' = r$ et $\lambda = rx$.

Conclusion : les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y = \lambda\left(1+x^2\right) + rx\left(1+x^2\right) = \lambda + rx + \lambda x^2 + rx^3,\ \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ peut être choisie librement}$$

2) On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}f(x) = (1+x^2)\displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$

Ici, $\displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$ est ***un nombre réel***, qui ***dépend de la fonction inconnue***.

Analyse : soit f une solution du problème.

En posant $r = \displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$, f est donc solution de $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = r(1+x^2)$.

Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \lambda + rx + \lambda x^2 + rx^3$.

Or $r = \displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \lambda + ru + \lambda u^2 + ru^3\mathrm{d}u = \lambda + \frac{r}{2} + \frac{\lambda}{3} + \frac{r}{4}$

Donc $\dfrac{r}{4} = \dfrac{4\lambda}{3}$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3\mu + 16\mu x + 3\mu x^2 + 16\mu x^3$ (en posant $\lambda = 3\mu$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ à choisir librement).

Synthèse : soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 3\mu + 16\mu x + 3\mu x^2 + 16\mu x^3$.

Alors, f est continue et dérivable et

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 16\mu + 6\mu x + 48\mu x^2$

Donc $f'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}f(x) = 16\mu + 6\mu x + 48\mu x^2 - \dfrac{2x}{1+x^2} \times (3\mu + 16\mu x)(1+x^2)$

c'est-à-dire $f'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}f(x) = 16\mu + 6\mu x + 48\mu x^2 - 6\mu x - 32\mu x^2 = 16\mu(1+x^2)$.

Or $\displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = 3\mu + \frac{16\mu}{2} + \frac{3\mu}{3} + \frac{16\mu}{4} = 16\mu$.

Donc f est bien solution de $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}f(x) = (1+x^2)\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$.

Finalement, l'ensemble des solutions du problème posé est

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mu\big(3 + 16x + 3x^2 + 16x^3\big), \text{ où } \mu \in \mathbb{R} \text{ peut être choisie librement}$$

Exercice 2.

1) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^0}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln(1+1^2) - \ln(1+0^2)}{2} = \frac{\ln(2)}{2}$

$I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 1 - I_0 = \frac{4-\pi}{4}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
I_n + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n \frac{1+x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

3) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Initialisation :

$(-1)^0 I_0 = I_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$

De même, $(-1)^0 I_{2\times 0+1} = I_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et $\dfrac{\ln(2)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^k}{2k} = \frac{\ln(2)}{2}$.

Hérédité :

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on ait

$$\begin{aligned}
(-1)^n I_{2n} &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \\
(-1)^n I_{2n+1} &= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1} I_{2(n+1)} &= (-1)^{n+1} I_{2n+2} \\
&= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+1} - I_{2n}\right) \quad \text{d'après la question 2)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} + (-1)^n I_{2n} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)-1} + \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \quad \text{d'après l'hyp. de récurrence} \\
&= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k-1}
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
(-1)^{n+1} I_{2(n+1)+1} &= (-1)^{n+1} I_{2n+3} \\
&= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+2} - I_{2n+1}\right) \quad \text{d'après la question 2)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} + (-1)^n I_{2n+1} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \quad \text{d'après l'hyp. de récurrence} \\
&= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k}
\end{aligned}
$$

Conclusion :

La propriété est initialisée pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
(-1)^n I_{2n} &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \\
(-1)^n I_{2n+1} &= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}
\end{aligned}
$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;1]$.

- $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2}$ car le membre droit est un quotient dont le numérateur est positif et le dénominateur strictement positif.
- $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2}$ car $\dfrac{x^n}{1+x^2} \geqslant 0$ d'après le point précédent.
- $1 + x^2 \geqslant 1$ et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ dont on déduit que $\dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$ car $x^n \geqslant 0$.

Donc pour tout entier positif n et tout $x \in [0;1]$, on a

$$
0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n
$$

5) En intégrant l'encadrement de la question précédente, valable pour tout $x \in [0;1]$, sur le segment $[0;1]$, on obtient, pour tout entier positif n :

$\displaystyle\int_0^1 0 \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$

d'où, pour tout entier positif n,

$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante, positive, donc convergente, et en utilisant le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité précédente, on a

$$
\lim_{n \to +\infty} I_n = 0
$$

6) D'après la question 3) : pour tout entier positif n,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} = (-1)^n I_{2n} - \frac{\pi}{4}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = -(-1)^n I_{2n} + \frac{\pi}{4}$

Or d'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_{2n} = 0$ donc

$$
\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}
$$

7) De même, d'après la question 3) : pour tout entier positif n,
$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} = (-1)^n I_{2n+1} - \frac{\ln(2)}{2}$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -2(-1)^n I_{2n+1} + 2\frac{\ln(2)}{2}$
Or d'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} I_{2n+1} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$