Matrices, DL, espaces vectoriels

Exercice 1.

On se place dans l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels et on pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour tout réel θ, on définit la matrice

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Enfin, on définit le sous-ensemble F de E par

$$F = \left\{\lambda M_\theta \in E, \lambda \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

et l'application ϕ de E dans E par

$$\phi : \begin{cases} E & \to \quad E \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto \quad \phi(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \end{cases}$$

1) Soient θ_1 et θ_2 deux réels.
   Montrer que $M_{\theta_1} \times M_{\theta_2} = M_{\theta_1+\theta_2}$.
2) En déduire que F est stable par produit, c'est-à-dire que

$$\forall A \in F, \forall B \in F, (A \times B) \in F$$

3) Montrer que toute matrice de F ***non nulle*** est inversible.
4) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   Indication : on pourra par exemple montrer que $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
5) Montrer que ϕ est une application linéaire.
6) Montrer que ϕ est la symétrie par rapport à F parallèlement à un sous-espace G que l'on explicitera.

Exercice 2.

Le but de cet exercice est de donner l'expression des coefficients des développements limités de Arcsin et de Arccos en 0 à l'ordre $2n+1$.

1) Rappeler l'expression, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, de $\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix}$.
2) Calculer $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.
3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ k \end{pmatrix} = (-1)^k \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$.

4) Donner l'expression du développement limité de $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$ à l'ordre n en 0.

5) Donner l'expression du développement limité de $\text{Arcsin}(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0.

6) Donner l'expression du développement limité de $\text{Arccos}(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0.