Correction DM n°4

Exercice 1.

1) Soient θ_1 et θ_2 deux réels.

$$\begin{aligned} M_{\theta_1} \times M_{\theta_2} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \\ &= M_{\theta_1 + \theta_2} \end{aligned}$$

en utilisant les formules classiques d'addition des fonctions trigonométriques.

2) Soient A et B deux matrices de F : par définition de F , il existe donc λ, μ réels et α, β réels tels que

$$A = \lambda M_\alpha \text{ et } B = \mu M_\beta.$$

$$\text{Donc } AB = \lambda\mu M_\alpha M_\beta = \lambda\mu M_{\alpha+\beta} = \Lambda M_\gamma$$

en posant $\Lambda = \lambda\mu \in \mathbb{R}$ et $\gamma = \alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

Donc la matrice AB est bien de la forme ΛM_γ avec $\Lambda \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$: $AB \in F$.

F est donc stable par produit.

3) Soit A une matrice de F **non nulle**.

On peut donc écrire A sous la forme $A = \lambda M_\alpha$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ($\lambda \neq 0$ car $A \neq 0_{2,2}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{Posons } B = \frac{1}{\lambda} M_{-\alpha}.$$

B est une matrice de F bien définie puisque $\lambda \neq 0$ et, en reprenant les calculs de la question précédente :

$$AB = \frac{\lambda}{\lambda} M_{\alpha-\alpha} = M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \frac{\lambda}{\lambda} M_{-\alpha+\alpha} = M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible et son inverse est une matrice de F .

4) Montrons que $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ par double inclusion :

- Montrons que $F \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

Soit $A = \lambda M_\theta \in F$.

On a donc, par définition :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda \cos(\theta) & -\lambda \sin(\theta) \\ \lambda \sin(\theta) & \lambda \cos(\theta) \end{pmatrix} = \lambda \cos(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \sin(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

- Montrons que $\text{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) \subset F$.

Soit $B = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de F .

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}.$$

* Si $\lambda = \mu = 0$, alors $B = 0_{2,2} = 0 \times M_0$ est bien une matrice de F .

* Sinon, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, donc

$$B = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} & \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \\ \frac{-\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} & \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

en posant $\rho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \in \mathbb{R}_+^*$, $u = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$ et $v = \frac{-\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$.

Pour montrer que $B \in F$, il suffit donc de montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = \cos(\theta)$ et $v = \sin(\theta)$.

Or, en posant $z = u + iv$, on a $|z|^2 = u^2 + v^2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} = 1$.

Donc $z \in \mathbb{U}$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ ce qui achève la démonstration.

Nous avons bien montré que $F = \text{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$.

- 5) Montrons que ϕ est un endomorphisme de E .

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in E$ et λ, μ deux réels.

$$\begin{aligned} \phi(\lambda M + \mu N) &= \phi \begin{pmatrix} \lambda a + \mu e & \lambda b + \mu f \\ \lambda c + \mu g & \lambda d + \mu h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda d + \mu h & -\lambda c - \mu g \\ -\lambda b - \mu f & \lambda a + \mu e \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} h & -g \\ -f & e \end{pmatrix} \\ &= \lambda \phi(M) + \mu \phi(N) \end{aligned}$$

ϕ étant par ailleurs une application de E dans E (de façon évidente), ϕ est un endomorphisme de E .

- 6) • Montrons que ϕ est une symétrie.

Comme $\phi \in \mathcal{L}(E)$, il suffit de montrer que $\phi \circ \phi = \text{id}_E$.

Or, étant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$,

$$\phi \circ \phi(M) = \phi \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -(-b) \\ -(-c) & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M.$$

Donc ϕ est une symétrie.

- L'espace par rapport auquel s'effectue cette symétrie est donné par $\text{Ker}(\phi - \text{id}_E)$.

Or $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\phi - \text{id}_E)$ si et seulement si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

$$\text{ce qui équivaut à } \begin{cases} a = d \\ b = -c \\ c = -b \\ d = a \end{cases}$$

$$\text{ou encore à } \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

$$\text{Donc } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\phi - \text{id}_E) \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- L'espace parallèlement auquel s'effectue cette symétrie est donné par $\text{Ker}(\phi + \text{id}_E)$.

$$\text{Or } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\phi + \text{id}_E) \text{ si et seulement si } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\text{ce qui équivaut à } \begin{cases} a = -d \\ b = c \\ c = b \\ d = -a \end{cases}$$

$$\text{ou encore à } \begin{cases} a = -d \\ b = c \end{cases}$$

$$\text{Donc } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\phi + \text{id}_E) \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc ϕ est **la** symétrie par rapport à F et parallèlement à

$$G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 2.

- 1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$: par définition,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{1 \times 2 \times \dots \times k} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha-j)}{k!}.$$

$$2) \binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1.$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{1} = \frac{-1}{2}.$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{8}.$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{-\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2} \times -\frac{5}{2}}{6} = \frac{-5}{16}.$$

- 3) Montrons par récurrence que $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$.

Initialisation : pour $k = 0$, $(-1)^k \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} = 1$ et $\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1$.

Hérédité : supposons que pour k entier donné, $\binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$. Alors

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{k+1} &= \frac{\prod_{j=0}^k \left(\frac{-1}{2} - j\right)}{(k+1)!} \\ &= \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{-1}{2} - j\right)}{k!} \times \frac{-1/2 - k}{k+1} \\ &= (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \times \frac{-(2k+1)}{2(k+1)} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \times \frac{(2k+1)(2k+2)}{2(k+1) \times 2(k+1)} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(2k+2)!}{4^{k+1} ((k+1)!)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : la propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$.

$$4) \frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} u^k + o_{u \rightarrow 0}(u^n).$$

5) $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1; 1[$ donc en posant $u = -x^2$ dans le développement limité précédent, et en remarquant que $\text{Arcsin}(0) = 0$, on a :

$$\text{Arcsin}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

6) De même qu'à la question précédente, en remarquant que $\text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$