Polynômes

I. Structure d'espace vectoriel, exemples

Ex. 14.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soit $P_1 = 1$, $P_2 = X - \alpha$ et $P_3 = (X - \alpha)^2$.
Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3)$.

Ex. 14.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, tous deux à deux distincts.
Soit $P_1 = (X - \alpha)\,(X - \beta)$, $P_2 = (X - \alpha)\,(X - \gamma)$ et $P_3 = (X - \beta)\,(X - \gamma)$.
Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\,(P_1; P_2; P_3)$.
Ce résultat reste-t-il valable si au moins deux des trois réels α, β, γ sont égaux ?

Ex. 14.3 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.
On note ϕ l'application définie sur E par $\phi(P) = X^3 P\left(\frac{1}{X}\right)$.

1. Montrer que $\forall P \in E, \phi(P) \in E$.
2. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
3. Montrer que ϕ est une symétrie.
4. Donner les sous-espaces caractéristiques de ϕ.

II. Division euclidienne, racines

Ex. 14.4 À quelle condition le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Ex. 14.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. Soit n un entier naturel. Donner le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. Déduire des deux questions précédentes les coefficients de la matrice A^n en fonction de n.

Ex. 14.6 Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $(a; b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$. Exprimer en fonction de $P(a)$ et de $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
Cette formule reste-t-elle valable si $a = b$?

Ex. 14.7 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont les restes dans la division euclidienne par $(X - 1)$, $(X - 2)$ et $(X - 3)$ sont respectivement 3, 7 et 13.
Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.

1. Déterminer les valeurs de $R(1)$, $R(2)$ et $R(3)$.
2. En déduire l'expression de $R(X)$.

Ex. 14.8 (Cor.) Déterminer les polynômes P dont le reste dans la division euclidienne par $(X - 1)^3$ est 11 et le reste dans la division euclidienne par $(X + 1)^3$ soit -5.

Ex. 14.9 $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est divisible par B pour :

- $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = X - 1$;
- $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X - 1)^2$;
- $A = \cos\left((n-1)\theta\right) X^{n+1} - \cos(n\theta)X^n - \cos\theta X + 1$ et $B = X^2 - 2\cos\theta X + 1$.

Ex. 14.10 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0)^2 + P(1)^2 + P(8)^2 + P(15)^2 = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

Ex. 14.11 Montrer que $\forall (m; n; p; q) \in \mathbb{N}^4$, $X^3 + X^2 + X + 1$ divise $X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$.

Ex. 14.12 (Cor.) Déterminer $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ de sorte à ce que $P = X^6 - 5X^4 + aX^2 + bX + c$ admette une racine d'ordre 4 dans

$\mathbb{R}$.

Ex. 14.13 [*] Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

III. Factorisation, relations coefficients/racines

Ex. 14.14

1. Développer $(X-a)(X-b)(X-c)$.
2. Montrer que pour tout $(a;b;c) \in \mathbb{C}^3$,
$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$.
3. Résoudre les systèmes suivants en considérant les inconnues réelles, puis en les considérant complexes :

$$(S_1)\begin{cases} x+y &= 1 \\ x^2+y^2 &= 13 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+y+z &= -2 \\ x^2+y^2+z^2 &= 0 \\ x^3+y^3+z^3 &= 1 \end{cases}$$

Ex. 14.15 (Cor.) Factoriser $P = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Ex. 14.16 On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = X \quad , \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Les polynômes P_n sont appelés **Polynômes de Tchebychev**.

1. Calculer les polynômes P_2, P_3, P_4.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, le polynôme P_n est bien défini, qu'il est de degré n et que son coefficient dominant est 2^{n-1}.
3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad \forall x \in \mathbb{R}\ ,\quad \cos(nx) = P_n(\cos x)$
4. En déduire que le polynôme P_n admet n racines simples distinctes qui sont :
$$\alpha_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \qquad \text{avec} \qquad k \in [\![0, n-1]\!]$$
En déduire que le polynôme P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et donner sa factorisation.

Ex. 14.17 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:
$P = X^4 - 1 \qquad Q = X^4 - 3X^2 - 4 \qquad R = X^5 - 1$

Ex. 14.18 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:
$P = 16X^4 - 32X^3 + 24X^2 - 8X + 1 \qquad Q = X^4 + 18X^2 + 81$

Ex. 14.19 (Cor.) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Ex. 14.20 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les racines de $P = (X+1)^n - e^{2in\alpha}$.
2. En déduire la valeur de $T_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right)$

Ex. 14.21 ***Centrale MP 1999*** Soit $P = nX^{n+1} - (n+1)aX^n + a^{n+1}$ où $a \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 2$.
Montrer que $(X-a)^2$ divise P et calculer le quotient de P par $(X-a)^2$.

Ex. 14.22 ***CCP PC 1998*** Quel est le reste de la division de $(X^n+1)^2$ par $(X+1)^2$?

IV. Fractions rationnelles

Ex. 14.23 Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^3 + 7X^2 - 2$ par $B(X) = X^2 + X + 1$. En déduire les éventuelles asymptotes de $x \mapsto f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

Ex. 14.24

1. ***Rappel*** : donner l'ensemble des primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3x+2}$.
2. Utiliser une méthode similaire pour donner l'ensemble des primitives de $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^3 - x}$.

Corrections

Cor. 14.8 : Si le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^m$ est R alors $P^{(k)}(a) = R^{(k)}(a)$ pour tout $k \in [\![0; m-1]\!]$.
Appliquée aux deux hypothèses de départ et à une division de P par $(X+1)^3(X-1)^3 = (X^2-1)^3$, cette propriété nous permet d'obtenir directement le résultat demandé.
Écrivons $P = (X^2-1)^3Q + aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$. Les hypothèses de l'énoncé se réécrivent

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(1)=11 & = & a+b+c+d+e+f \\ P'(1)=0 & = & 5a+4b+3c+2d+e \\ P''(1)=0 & = & 20a+12b+6c+2d \\ P(-1)=-5 & = & -a+b-c+d-e+f \\ P'(-1)=0 & = & 5a-4b+3c-2d+e \\ P''(-1)=0 & = & -20a+12b-6c+2d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b+d+f & = & 3 \\ a+c+e & = & 8 \\ 5a+3c+e & = & 0 \\ 2b+d & = & 0 \\ 6b+d & = & 0 \\ 10a+3c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} f & = & 3 \\ a+c+e & = & 8 \\ 2a+c & = & -4 \\ b & = & 0 \\ d & = & 0 \\ 10a+3c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f & = & 3 \\ e & = & 15 \\ a & = & 3 \\ b & = & 0 \\ d & = & 0 \\ c & = & -10 \end{array}\right.$$

Donc $P = (X^2-1)^3Q + 3X^5 - 10X^3 + 15X + 3$ où Q est un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$.

Cor. 14.12 : P admet une racine $r \in \mathbb{R}$ d'ordre 4 si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(r) & = & 0 \\ P'(r) & = & 0 \\ P''(r) & = & 0 \\ P'''(r) & = & 0 \\ P^{(4)}(r) & \neq & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} r^6-5r^4+ar^2+br+c & = & 0 \\ 6r^5-20r^3+2ar+b & = & 0 \\ 30r^4-60r^2+2a & = & 0 \\ 120r^3-120r & = & 0 \\ 3r^2-1 & \neq & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} r^6-5r^4+ar^2+br+c & = & 0 \\ 6r^5-20r^3+2ar+b & = & 0 \\ 30r^4-60r^2+2a & = & 0 \\ r(r-1)(r+1) & = & 0 \\ r & \neq & \frac{\pm\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Il y a donc 3 racines possibles : $r=0$, $r=1$ ou $r=-1$.
Si $r=0$, $a=b=c=0$.
Si $r=1$, $a=15$, $b=-16$ et $c=5$.
Si $r=-1$, $a=15$, $b=16$ et $c=5$.

Cor. 14.15 : $P = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ possède 3 racines dans $\mathbb{C}$ qui sont, par hypothèse, en progression arithmétique.
Donc, il existe $r \in \mathbb{C}$ tel que les trois racines puissent s'écrire x_0, $x_1 = x_0 + r$ et $x_2 = x_1 + r = x_0 + 2r$.
L'idée est d'utiliser le théorème de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ pour obtenir un système vérifié par x_0 et r.
Ou de manière équivalente par x_1 et r : ce second système est beaucoup plus facile à résoudre que le premier.
Plus précisément :
$P = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3 = 8(X - x_1 + r)(X - x_1)(X - x_1 - r)$
Donc $P = 8X^3 + 8X^2(-3x_1) + 8X\left(3x_1^2 - r^2\right) - 8\left(x_1^3 - r^2x_1\right)$.
On en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{2} \\ 8\left(3x_1^2-r^2\right) & = & -2 \\ 8\left(x_1^3-r^2x_1\right) & = & -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{2} \\ r^2 & = & 1 \end{array}\right. \text{ en remplaçant } x_1 \text{ par sa valeur...}$$

Donc $r = \pm 1$, ce qui donne (dans les deux cas) $x_0 = \dfrac{-1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3}{2}$ en classant les racines par ordre croissant.

Cor. 14.19 : $P \in \mathbb{C}[X]$ donc P est scindé. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de multiplicité $m > 0$ c'est-à-dire a telle que $P = (X-a)^mQ$ avec $Q(a) \neq 0$.
$P' = m(X-a)^{m-1}Q + (X-a)^mQ'$ divise P si et seulement si $mQ + (X-a)Q'$ divise $(X-a)Q$. Or, pour $X = a$, on a $mQ(a) + (a-a)Q'(a) = mQ(a) \neq 0$ et $(a-a)Q(a) = 0$ donc le quotient s'annule en a. De plus, les termes dominants de mQ et $(X-a)Q'$ ne s'annulent pas donc le quotient est de degré 1.
Le quotient de $(X-a)Q$ par $mQ + (X-a)Q'$ est donc de la forme $k(X-a)$ avec $k \in \mathbb{C}^*$.
On a donc $(X-a)Q = k(X-a)(mQ + (X-a)Q') \Leftrightarrow (1-km)(X-a)Q = k(X-a)^2Q' \Leftrightarrow (1-km)Q = k(X-a)Q'$ et comme $Q(a) \neq 0$, la seule possibilité est $Q' = 0$, $k = \frac{1}{m}$.

Donc les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P sont les polynômes de la forme $P = q(X-a)^m$, avec $a, q \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}^*$.
Remarque : si P est un polynôme constant, $P' = 0$ ne divise pas P sauf si $P = 0$. Ce cas est pris en compte dans le résultat donné puisqu'on interdit $m = 0$ (polynômes constants non nuls) mais qu'on autorise $q = 0$ (polynôme nul).