Polynômes

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

I.1. Définitions

Définition 14.1

On appelle ***polynôme à une indéterminée et à coefficients dans*** $\mathbb{K}$ une suite $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang $n \in \mathbb{N}$: $\forall p \geq n, a_p = 0$.
Les termes a_i de la suite sont appelés ***coefficients*** du polynôme.

Notation

On note $P = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Comme la suite des coefficients est nulle à partir d'un certain rang, un polynôme non nul peut aussi être noté $(a_0, a_1, ..., a_n)$ où a_n est le dernier terme non nul de la suite a.
Cependant, généralement, un polynôme est noté sous la forme :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{avec par convention } X^0 = 1$$

X est appelée ***indéterminée***.
L'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Remarques

- Il résulte de la définition que deux polynômes sont égaux ***si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux***.
- On appelle ***polynôme nul*** le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
- On appelle ***polynômes constants*** les polynômes dont seul le premier coefficient est (éventuellement) non nul.
- On appelle ***monôme*** tout polynôme qui n'a qu'un unique coefficient non nul ; c'est à dire de la forme $a_p X^p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $a_p \in \mathbb{K}$.
- Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ appartient aussi à $\mathbb{C}[X]$. On a donc $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$. La réciproque est fausse. En effet, $P = X - i$ est dans $\mathbb{C}[X]$ mais n'est pas dans $\mathbb{R}[X]$.
- Si on ne sait pas quel est le dernier coefficient non nul, et puisque l'on est sûr que cette somme comporte un nombre **fini** de termes, on peut parfois noter $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$.

Ex. 14.1 $P = (1, 0, 5, -2, 0, ..., 0, ...)$ est un polynôme que l'on notera $P =$ ....
$P = (0, 2, 5i, 1 + i, 0, ..., 0, ...)$ est un polynôme que l'on notera $P =$ ....
$P = (0, 1, 0, 0, ..., 0, ...)$ est un polynôme que l'on notera $P =$ ....
Attention X désigne un polynôme particulier et non une variable !

I.2. Structures de $\mathbb{K}[X]$

Définition 14.2

On munit $\mathbb{K}[X]$:

- d'une addition :
  $\forall P = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{K}[X],\ \forall Q = (b_0, b_1, ...) \in \mathbb{K}[X], \quad P + Q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ...)$;
- d'une multiplication par les scalaires de $\mathbb{K}$:
  $\forall P = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.P = (\lambda \times a_0, \lambda \times a_1, ...)$.

Proposition 14.3

$\big(\mathbb{K}[X], +, .\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

Définition 14.4

On munit également $\mathbb{K}[X]$ d'une multiplication :
$\forall P = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{K}[X],\ \forall Q = (b_0, b_1, ...) \in \mathbb{K}[X]$,

$$P \times Q = (c_0, c_1, ...) \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Remarques

- La définition du produit de polynômes est une simple traduction de la multiplication habituelle. Notamment elle vérifie $X^n \times X^p = X^{n+p}$ pour tous $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.
  Ceci justifie la convention adoptée $X^0 = 1$.
- Au vu de la définition, on peut conclure que la multiplication sur $\mathbb{K}[X]$ est commutative.

Ex. 14.2 $P = 1 + X + X^2$ et $Q = 2 - X + 3X^2$. Calculer $P \times Q$.
....

Définition 14.5

On munit également $\mathbb{K}[X]$ d'une composée :
Soient $A = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
On définit $A \circ P$ par : $\quad A \circ P = A(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k P^k$.

Remarque

Dans le cas particulier où $P = X$, le polynôme $A(P) = A(X)$ est égal au polynôme A, c'est pourquoi on utilise aussi bien A que $A(X)$ pour désigner ce dernier polynôme.

Ex. 14.3 La composition consiste simplement à remplacer l'indéterminée X par un polynôme.
On considère les polynômes $P = 1 + X + X^2$ et $Q = 1 + X$.
Calculer $P \circ Q$ puis $Q \circ P$. La composée est-elle commutative ?

Cor. 14.3

I.3. Fonctions polynomiales

Définition 14.6

Étant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on appelle ***fonction polynomiale*** associée à P la fonction $\tilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{cases}$

On notera souvent de la même façon un polynôme et sa fonction polynomiale associée.
Lorsqu'on passe d'un polynôme à sa fonction polynomiale associée, on dira que l'on ***substitue*** x à X dans P ou que l'on ***évalue*** P en x.

Remarques

- Les opérations définies précédemment sur l'ensemble des polynômes correspondent à celles définies sur l'ensemble des fonctions.
  En fait, les opérations sur l'ensemble des polynômes ***ont été définies de sorte à ce qu'elles coïncident avec les opérations sur l'ensemble des fonctions***.
- Il y a une ***différence de nature*** entre polynôme et fonction polynomiale. ***Cette distinction n'est pas un caprice de mathématicien*** !
  Par exemple, deux polynômes ne sont égaux que si tous leurs coefficients sont égaux. Or cela n'a rien d'évident ***à priori*** pour les fonctions polynomiales : existe-t-il deux fonctions polynomiales f et g correspondant à deux polynômes ***distincts*** et telles que, pour tout réel x, $f(x) = g(x)$?
  Nous répondrons à cette question en cours de chapitre. Pour le moment, il est important de retenir que égalité de polynômes et égalité de fonctions ont des sens différents :
  Deux polynômes sont égaux si et seulement si ....
  Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si ....
  ....

I.4. Degré et coefficient dominant

Définition 14.7

Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul.
Le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ est appelé ***degré de*** P.
Par convention, on définit le degré du polynôme nul comme égal à $-\infty$.
a_n est appelé ***coefficient dominant de*** P et $a_n X^n$ est appelé ***terme dominant de*** P.
Si $a_n = 1$, on dit que P est un ***polynôme unitaire*** ou ***normalisé***.

Ex. 14.4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quel est le degré de $P = (\alpha + 1)X^2 + 3$?

Cor. 14.4

Notation

On note $\deg(P)$ le degré de P.
Le coefficient dominant de P est parfois noté $\mathrm{cd}(P)$.

Remarques

- Si P n'est pas le polynôme nul, $\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$. Cette définition a un sens car $\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus grand élément.
- Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants **non nuls**.

Théorème 14.8 (Degré d'une somme, d'un produit)

$\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}^*$

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ avec égalité lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(\lambda.P) = \deg P$;
- $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.

Démonstration

Ex. 14.5 Trouver deux polynômes P et Q tels que : $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$

Cor. 14.5

Ex. 14.6 Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, montrer que : $PQ = 0 \iff [\ P = 0 \text{ ou } Q = 0\ ]$.

Cor. 14.6

Remarque

Il faut bien faire la différence entre le fait qu'un polynôme s'annule (son évaluation en un scalaire est nulle) et le fait qu'un polynôme est nul (tous ses coefficients sont nuls).
Par exemple, si $(X-a)P=0$, alors $P=0$ bien que $X-a$ s'annule en a. Ce qui compte, c'est que $X-a$ n'est pas le polynôme nul.

I.5. $\mathbb{K}_n[X]$

Notation

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-ensemble de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes ***de degré inférieur ou égal à*** n.

Ex. 14.7 $\mathbb{R}_3[X] =$ ....

Ex. 14.8 Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$P = \alpha + \beta(1+X) + \gamma(1+X+X^2)$
Que peut-on en déduire concernant la famille $(1, 1+X, 1+X+X^2)$?

Cor. 14.8

II. Multiples, diviseurs et racines d'un polynôme

II.1. Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 14.9 (Divisibilité)

Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$. On dit que B ***divise*** A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
On dit aussi que B est un ***diviseur*** de A ou que A est un ***multiple*** de B.

Notation

On note $B|A$ l'assertion « B divise A ».

Ex. 14.9 Dans $\mathbb{R}[X]$, $(X+1) \mid (X^2-1)$ car ....

Théorème 14.10 (Division euclidienne)

$\forall (A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0$, $\exists ! (Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $\begin{cases} A = BQ+R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$.
On appelle A le ***dividende***, B le ***diviseur***, Q le ***quotient*** et R le ***reste***.

Démonstration

Ex. 14.10 Effectuer la division euclidienne de A par B lorsque :

- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{R}[X]$ avec $A = X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^2 + X - 1$.
- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{C}[X]$ avec $A = X^4 + iX + 1$ et $B = iX^2 + 1$.
- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{R}[X]$ avec $A = X + 2$ et $B = X^3 + 8X + 1$.

Cor. 14.10

Corollaire 14.11

Pour $B \in \mathbb{K}[X]$ non nul, le reste de la division euclidienne de A par B est nul si et seulement si B divise A.

II.2. Racines (ou zéros) d'un polynôme

Définition 14.12

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** (ou un **zéro**) de P (dans $\mathbb{K}$) si $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

Important !

La précision « dans $\mathbb{K}$ » peut avoir de l'importance : le polynôme $X^2 + 1$ admet des racines dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

Remarque

Un polynôme à coefficients réels de degré impair admet nécessairement une racine réelle d'après le théorème des valeurs intermédiaires (voir exercice **??** de la feuille d'exercices).

Théorème 14.13

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$ est le polynôme constant $\tilde{P}(\alpha)$.
En particulier : α est une racine de $P \Leftrightarrow (X - \alpha)|P$.

Démonstration

Ex. 14.11 Soit $Q = X^3 - 10X^2 + 29X - 20$. Trouver les racines de Q.

Cor. 14.11

Méthode : Calculer le reste d'une division euclidienne

Pour calculer le reste de la division euclidienne de A par B avec $B \neq 0$, on écrit $A = BQ + R$ avec $R = \sum_{k=0}^{deg(B)-1} a_k X^k$. On évalue ensuite en les racines de B (si on les connaît). En effet, si a est une racine de B, alors $A(a) = R(a)$. Ceci nous permet de déterminer les coefficients de R.

Ex. 14.12 Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{10} - X^5$ par $X^2 - 3X + 2$.

Cor. 14.12

Corollaire 14.14 (Très important !)

- Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$ possède au plus n racines deux à deux distinctes.
- Tout polynôme non nul possède un nombre fini de racines.
- Si deux fonctions polynomiales coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{K}$ alors les polynômes associés sont identiques.
  En particulier, ***deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si les polynômes associés sont égaux***.

Démonstration

Méthode : Prouver qu'un polynôme P est nul

Pour prouver qu'un polynôme P est nul, il suffit de prouver que P possède une infinité de racines ou que P possède $\deg(P) + 1$ racines.

Ex. 14.13 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X + 1) = P(X)$. Montrer que P est constant.

Cor. 14.13

III. Polynôme dérivé et racines multiples

III.1. Dérivées d'un polynôme

La notion de polynôme dérivé est purement formelle. Elle correspond simplement à la notion de dérivation des fonctions polynomiales que nous connaissons.

Définition 14.15

Étant donné $P \in \mathbb{K}[X]$, on appelle polynôme dérivé de P le polynôme associé à la dérivée de la fonction polynomiale de P.
Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

Notation

On note P' ou $P^{(1)}$ le polynôme dérivé de P et on définit de même les polynômes dérivés successifs $P'' = P^{(2)}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$.

Proposition 14.16

Linéarité de la dérivation :

$$\forall (P,Q)\in \mathbb{K}[X]^2\ ,\quad \forall \lambda\in\mathbb{K}\ ,\quad \left\{\begin{array}{rcl}(P+Q)' & = & P'+Q' \\ & & \text{et} \\ (\lambda\cdot P)' & = & \lambda\cdot P'\end{array}\right.$$

Démonstration

Proposition 14.17

Dérivation d'un produit :
$\forall (P,Q)\in \mathbb{K}[X]^2\ ,\quad (PQ)' = P'Q + PQ'$

Proposition 14.18

Formule de Leibniz de dérivation d'un produit PQ de polynômes :

$$\forall (P,Q)\in \mathbb{K}[X]^2\ ,\quad (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(n-k)}Q^{(k)}$$

Proposition 14.19

Formule de Taylor : Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ de degré $n\in\mathbb{N}$ et $a\in\mathbb{K}$ un scalaire. Alors on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Démonstration

III.2. Multiplicité d'une racine

Définition 14.20

Soient $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$. On appelle multiplicité de α dans P le plus grand entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $(X-\alpha)^n | P$.
En particulier $(X-\alpha)^{n+1}$ ne divise pas P.

Remarque

Une racine de multiplicité 0 de P ***n'est pas une racine de*** P !

Proposition 14.21

De façon évidente, α est une racine de P si et seulement si sa multiplicité dans P est supérieure à 1.

Ex. 14.14 Quelles sont les racines réelles et leur multiplicité pour le polynôme

$$P = (X^2 - 1)(X^3 - 1)$$

Cor. 14.14

III.3. Caractérisation de la multiplicité d'une racine

Théorème 14.22

α est une racine de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ dans $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = ... = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Démonstration

Ex. 14.15 Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, 1 est racine de P avec $P = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$ et donner sa multiplicité.

Cor. 14.15

IV. Factorisation des polynômes

IV.1. Polynômes scindés sur $\mathbb{K}$

Définition 14.23

Un polynôme P non nul est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit comme produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur à 1.
Autrement dit, P est scindé sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$P = \lambda(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n).$$

Ici les racines de P notées $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ne sont pas nécessairement distinctes.

Important !

Un polynôme peut être scindé dans $\mathbb{C}[X]$ sans l'être dans $\mathbb{R}[X]$!
Exemple : $P = X^2 + 1 =$...

Remarque

Autrement dit, un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}^*$ est scindé sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il admet des racines dont la somme des ordres de multiplicité vaut n.

IV.2. Relation coefficients-racines d'un polynôme scindé.

Proposition 14.24

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ***scindé*** sur $\mathbb{K}$ et $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}$ ses racines.

- La somme des racines de P est donnée par : $\sum_{k=1}^{n} x_k = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$.
- Le produit des racines de P est donné par : $\prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$.

Démonstration

Ex. 14.16 Déterminer P le polynôme unitaire de degré 3 dont la somme et le produit des racines valent 6, et dont la somme des coefficients est nulle.

Cor. 14.16

Remarques

- En particulier, si $P = aX^2 + bX + c$ alors :
  la somme des racines vaut : $S = -\dfrac{b}{a}$.
  le produit des racines vaut : $P = \dfrac{c}{a}$.
- Inversement, soient x_1 et x_2 deux réels avec S leur somme et P leur produit.
  Alors x_1 et x_2 sont solutions de $X^2 - SX + P = 0$.

Ex. 14.17 Trouver deux nombres dont la somme vaut $-\dfrac{17}{2}$ et le produit vaut 4.

Cor. 14.17

IV.3. Cas particulier des racines lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 14.25 (Théorème de d'Alembert-Gauss - Admis)

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration hors programme

Corollaire 14.26

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$: $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$.

On a : $\sum_{k=0}^{r} m_k = \deg(P)$.

Démonstration

Proposition 14.27

Soit P un polynôme **à coefficients réels** (donc $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$).
Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine complexe de P **alors** son conjugué $\bar{\alpha}$ est également racine de P.

Démonstration

Remarque

Attention, la proposition précédente est ***fausse*** pour $P \in \mathbb{C}[X]$!
Par exemple i est racine de $P = X - i \in \mathbb{C}[X]$ mais pas $\overline{i} = -i$.

Ex. 14.18 Soit $P = X^4 + X^3 - 10X^2 + 2X - 24$.
Vérifier que $\sqrt{2}i$ est racine de P, et en déduire toutes les racines de P.

Cor. 14.18

IV.4. Polynômes irréductibles et factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

Définition 14.28 (Polynômes irréductibles)

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible si $\deg P \geq 1$ et si les seuls diviseurs de P sont les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et les polynômes constants (non nuls).

Ex. 14.19 Déterminer tous les diviseurs de $P = X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Cor. 14.19

Remarque

Par définition, les polynômes de degré 1 sont tous irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Ex. 14.20

1) Factoriser $P = X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2) En déduire que P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Cor. 14.20

Proposition 14.29 (Classification des polynômes irréductibles)

- Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes du premier degré.
- Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes du premier degré et les polynômes du second degré à discriminant strictement négatif.

Démonstration

Factorisation des polynômes

- On a déjà vu que pour $P \in \mathbb{C}[X]$, la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est de la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \qquad \text{où}$$

  - ⋆ λ est le coefficient dominant de P (c'est à dire du terme de plus haut degré)
  - ⋆ $\forall k \in \{1, 2, ..., r\}$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ est racine d'ordre m_k de P.
  - ⋆ On a toujours : $\sum\limits_{k=0}^{r} m_k = \deg(P)$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{p} (X^2 - p_j X + q_j)^{l_j} \qquad \text{où}$$

  - ⋆ λ est le coefficient dominant de P (c'est à dire du terme de plus haut degré).
  - ⋆ $\forall k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ est racine d'ordre m_k de P.
  - ⋆ $\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$ les discriminants $(\Delta = p_j^2 - 4q_j)$ vérifient $\Delta < 0$.
  - ⋆ $\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $l_j \in \mathbb{N}^*$ est un exposant entier.

Ex. 14.21 Soit $P = X^3 + 3X^2 + 4X + 2$.

1) Factoriser P sous forme de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2) Factoriser P sous forme de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Cor. 14.21

Ex. 14.22 Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on note $P = X^n - 1$.

1) Décomposer P en produits d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
2) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Cor. 14.22