

Continuité

I. Fonctions : généralités, limites, équivalents

Ex. 13.1 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R} \rightarrow]-1; 1[$ et exprimer $f^{-1}(y)$ pour $y \in]-1; 1[$.

Ex. 13.2 $[*]$ Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0 et f bijective et impaire de I dans $J \subset \mathbb{R}$. Montrer que f^{-1} est impaire.

Ex. 13.3 Déterminer les limites suivantes

1. $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$ en $+\infty$ pour $a, b \in \mathbb{R}$
2. $\frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ en 0
3. $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0
4. $\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$ en $+\infty$

Ex. 13.4 Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x - \sqrt{x}}}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) x$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) x$

Ex. 13.5 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + 1} + \frac{\pi}{6}\right)$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe-t-elle ? Si oui, quelle est sa valeur ?

Ex. 13.6 Soit $a > 0$, $a \neq 1$.

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $f(x) = (a+x)^a - a^{a+x}$.

Ex. 13.7 (Cor.) Donner un équivalent simple des expressions suivantes :

- $f(x) = x^x - \sin(x)^{\sin(x)}$ au voisinage de 0^+ ;
- $g(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Ex. 13.8

1. Montrer que l'équation $x = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{x}$ admet une unique racine sur l'intervalle $[n; n+1[$ pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $x_n \in [n; n+1[$ cette racine.
2. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ puis trouver un équivalent u_n de $x_n - n$ au voisinage de $+\infty$.
3. Trouver un équivalent de $x_n - n - u_n$ au voisinage de $+\infty$.

Ex. 13.9 Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et toutes les asymptotes à leurs représentations graphiques :

- $f(x) = \ln(1 + 3e^x)$;
- $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 1}$;
- $h(x) = \frac{x^3}{x^2 + x}$;
- $k(x) = \ln(\text{sh}(x))$;
- $l(x) = \ln(\text{ch}(x))$.

II. Continuité

Ex. 13.10 Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ la fonction

$$\begin{cases} x \neq 0 & \mapsto ax \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \\ 0 & \mapsto a^2 \end{cases} \text{ est-elle continue en } 0 ?$$

Ex. 13.11 Étudier la définition et la continuité des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad x &\mapsto \sqrt{|x-1|} & (2) \quad x &\overset{f}{\mapsto} \lfloor x \rfloor \\ (3) \quad x &\overset{h}{\mapsto} \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 & (4) \quad \begin{cases} x \neq 0 & \overset{k}{\mapsto} k(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \\ 0 & \mapsto k(0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ex. 13.12 La fonction $x \neq 0 \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Étudier cette fonction (ou son prolongement par continuité s'il existe) et tracer sa représentation graphique.

III. Théorème des valeurs intermédiaires

Ex. 13.13 Montrer que l'équation $x^2 \cos(x) + x \sin(x) + 1 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Ex. 13.14 Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Ex. 13.15 Soit a et b deux réels strictement positifs, $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) \neq f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in]0; 1[$ tel que $af(0) + bf(1) = (a+b)f(c)$.

Ex. 13.16 [**Problème du moine**] Un moine part de son monastère à 7h00 du matin et se rend au sommet du Mont Sinai. Il y arrive à midi. Il passe la nuit sur place, puis le lendemain repart du sommet à 7h00, suit exactement le même chemin que la veille et arrive au monastère à midi.

Existe-t-il un endroit se situant sur son chemin où il serait passé à la même heure à l'aller et au retour ?

Ex. 13.17 [**Problème du cycliste**] Un cycliste parcourt 20km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il a effectué exactement 10km.

Ex. 13.18 [**] Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall(x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$. On note $\alpha = f(1)$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$.

Ex. 13.19 [**] Refaire l'exercice 13.18 en ne supposant plus que la continuité de f en 0.

Ex. 13.20 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0; 1]$ telles que $f < g$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [0; 1], f(x) + m \leq g(x)$.

IV. Divers

Ex. 13.21 Soit f définie par $f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Ex. 13.22 (**Cor.**) Soient $r \in \mathbb{R}_+^*, f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{x + \frac{r}{x}}{2}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Montrer que $[\sqrt{r}; +\infty[$ est stable par f et en déduire que la suite u est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{r}$.
2. Montrer que $g : x \mapsto f(x) - x$ est négative sur $[\sqrt{r}; +\infty[$.
3. En déduire que u est décroissante à partir du rang 1 et que u converge.
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
5. Donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-6} près de $\sqrt{2}$.

V. Correction

Cor. 13.7 :

1. $x^x = e^{x \ln(x)} = 1 + x \ln(x) + \frac{x^2 \ln^2(x)}{2} + \frac{x^3 \ln^3(x)}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ car $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ d'une part, et car le terme suivant $\frac{x^4 \ln^4(x)}{24}$ est négligeable devant x^3 au voisinage de 0.
De même, comme $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,
$$\sin(x)^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \ln\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 \ln^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{2} +$$

$$\left(x - \frac{x^3}{6} \right)^3 \ln^3 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \frac{6}{x^3} + \frac{o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{x^3}.$$

$$\text{Or } \ln \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = \ln(x) - \frac{x^2}{6} + \frac{o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x^2}, \text{ donc :}$$

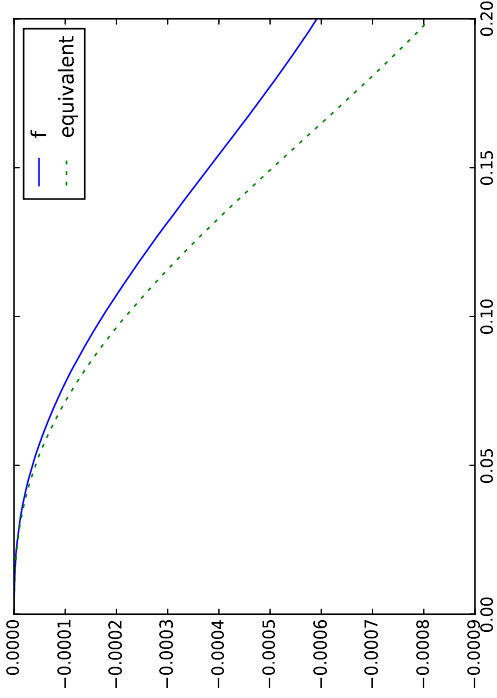
$$\sin(x)^{\sin(x)} = 1 + \underbrace{\left[x \ln(x) - \frac{x^3}{6} \ln(x) - \frac{x^3}{6} \right]}_{\text{issu du terme } \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \ln \left(x - \frac{x^3}{6} \right)} + \frac{x^2 \ln^2(x)}{2} + \frac{x^3 \ln^3(x)}{6} +$$

$$\frac{o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{x^3}.$$

On en déduit que :

$$x^x - \sin(x)^{\sin(x)} = \frac{x^3 \ln(x)}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{x^3}.$$

$$\text{Donc } x^x - \sin(x)^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3 \ln(x)}{6}$$



Cor. 13.22 :

1. f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1 - \frac{x}{x^2}}{x^2 - r} = \frac{2x^2}{2x^2}.$$

Donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > r \Leftrightarrow (x > \sqrt{r} \text{ ou } x < -\sqrt{r})$.

Sur $]0; \sqrt{r}]$, f est donc décroissante et f est croissante sur $[\sqrt{r}; +\infty[$.

Or $f(\sqrt{r}) = \sqrt{r}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et f est continue, donc

$$f([\sqrt{r}; +\infty[) = [\sqrt{r}; +\infty[$$

De plus f passe par son minimum (sur $\mathbb{R}^*$) $\sqrt{r}$ en $\sqrt{r}$. Donc $\forall x > 0, f(x) \geq \sqrt{r}$.

Donc $u_1 = f(u_0) \geq \sqrt{r}$, et $[\sqrt{r}; +\infty[$ est stable par f , donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{r}$.

2. Soit $g : x \mapsto f(x) - x$.

$$\forall x > 0, g(x) = \frac{x}{2} - x = \frac{r - x^2}{2x} \text{ est négatif sur } [\sqrt{r}; +\infty[.$$

3. $g(u_n) = f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n$.

Or pour $n \geq 1, u_n \in [\sqrt{r}; +\infty[$ donc $g(u_n) \leq 0$.

Donc u est décroissante à partir du rang 1.

De plus $\forall n \geq 1, u_n \geq \sqrt{r} : u$ est décroissante et minorée à partir du rang 1, donc elle converge.

4. Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

f est continue, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$.

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l.$$

Donc $f(l) = l : l$ est un point fixe de f .

Or l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = r$ possède une unique solution positive, c'est $\sqrt{r}$.

Donc $l = \sqrt{r}$.

5. Pour donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-6} près de $\sqrt{2}$, on calcule les termes de u - qui sont rationnels - jusqu'à obtenir une approximation suffisante.

$$u_1 = \frac{2}{3}$$

$$u_2 = \frac{12}{17}$$

$$u_3 = \frac{577}{665857}$$

qui est déjà une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ à 2.10^{-6} près.

$$u_4 = \frac{665857}{470832}$$

est une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ qui convient puisqu'elle est non seulement valable à 10^{-6} près, mais en fait approxime $\sqrt{2}$ à 10^{-11} près.