DL, Algèbre linéaire, Continuité et Polynômes

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Cours

Q1/ Formule de Leibnitz et formule de Taylor (à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en un scalaire a quelconque) pour les polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$.

Q2/ Théorèmes de factorisation pour les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercices

Exercice 1.

On travaille dans $E = \mathbb{R}^4$ et on définit les vecteurs $u_1 = (1,0,0,0)$ et $u_2 = (0,1,1,0)$ ainsi que $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + z = 0 \text{ et } x + z + t = 0\}$.

Q1/ Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et que $G = \text{Vect}((1,0,0,-1), (1,1,-1,0))$.

On posera par la suite $u_3 = (1,0,0,-1)$ et $u_4 = (1,1,-1,0)$.

Q2/ Justifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Q3/ On définit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par :

$$f(x, y, z, t) = (2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0)$$

a/. Montrer que le noyau de f est G .

b/. Montrer que l'ensemble image de f est F .

c/. Montrer que $f \circ f = 2f$

d/. Déduire de ces résultats la nature de l'endomorphisme $s = f - Id$ et préciser ses éléments caractéristiques.

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

Q1/ Soit $A = X^5 - 3X^4 + X^3 + X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$.

Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que 2 soit racine double de A .

Q2/ Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n$ par $(X - 1)^2$.

Déterminer R .

Q3/ Démontrer très simplement les égalités suivantes :

$$\frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{3}$$

Q4/ Pour n entier naturel, on pose $P = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$.

Démontrer que P admet n racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$.

Indication : on pourra supposer que P possède une racine au moins double.

Q5/ Considérons la suite de polynômes définie par récurrence de la façon suivante :

$$P_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, P_{k+1} = (1 + X^2)P'_k - (2k + 1)XP_k.$$

Calculer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_k .

Exercice 3.

Etant donné un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et un endomorphisme f de E , on dira que f vérifie la propriété (P) si son noyau et son image sont supplémentaires dans E , c'est-à-dire si :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) \quad (P)$$

On se demande dans ce problème si tout endomorphisme de E vérifie la propriété (P) et, si ce n'est pas le cas, nous allons chercher des conditions pour qu'un endomorphisme de E vérifie cette propriété.

Partie I – Etude d'un exemple

On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = (0, x)$$

Q1/ Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Q2/ Déterminer le noyau et l'image de g .

Q3/ L'application g vérifie-t-elle la propriété (P) ?

Partie II – Être un projecteur, une condition suffisante

On se donne ici un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et p un projecteur de E , c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.

Q4/ Démontrer que $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{O_E\}$.

Q5/ Démontrer que l'on a l'égalité $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$

On vient de démontrer que tout projecteur vérifie la propriété (P) .

Exercice 4.

Les questions Q1, Q2, et Q3 sont indépendantes.

Q1/ a/. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{e^{-x} + e^x}$$

b/. En déduire le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction :

$$F : x \mapsto \operatorname{Arctan}(e^x)$$

Q2/ a/. Justifier que :

$$\ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}$$

b/. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^{n^2}$$

Q3/. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)-1} + \frac{2}{x^2}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 5.

On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x + \ln(x) \end{cases}$

Q1/ a/. Montrer que f est une application bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

b/. Préciser le sens de variation de sa bijection réciproque f^{-1} ainsi que les limites de f^{-1} aux bornes de son domaine de définition.

Q2/. Montrer que, pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

On notera x_n cette solution.

Q3/. Justifier que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Q4/. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

Q5/. Déterminer la limite de la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q6/. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, on pose $u_n = \frac{n - x_n}{\ln(n)}$

a/. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, u_n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$$

b/. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

c/. Conclure que :

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \ln(n) + o(\ln(n))$$

Correction DS n°4

Exercice 1.

Q1/. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + z = 0 \text{ et } x + z + t = 0\}$

$$G = \{-z - t, -z, z, t\}, (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$G = \{z(-1, -1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1), (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Donc $G = \text{Vect}((-1, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$

Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et $G = \text{Vect}((1, 1, -1, 0), (1, 0, 0, -1))$

Q2/. F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

Montrons que $F \cap G = \{O_E\}$.

Soit $(x, y, z, t) \in F \cap G$.

- $(x, y, z, t) \in F$ donc il existe $\lambda, \mu \in K$ tels que $(x, y, z, t) = \lambda u_1 + \mu u_2$.
 $(x, y, z, t) = \lambda(1, 0, 0, 0) + \mu(0, 1, 1, 0) = (\lambda, \mu, \mu, 0)$

Donc $x = \lambda$ et $y = z = \mu$ et $t = 0$

- $(x, y, z, t) \in G$ donc par définition de G , $y + z = 0$ et $x + z + t = 0$, ce qui donne :
 $2\mu = 0$ et $\lambda + \mu + 0 = 0$ soit finalement $\lambda = \mu = 0$.

Finalement, $(x, y, z, t) = \lambda u_1 + \mu u_2 = 0 + 0 = 0_E$.

On vient de vérifier que $F \cap G \subset \{O_E\}$; l'autre inclusion étant évidente, on a alors :

$$F \cap G = \{O_E\}$$

Montrons maintenant que $\mathbb{R}^4 = F + G$.

L'inclusion $F + G \subset \mathbb{R}^4$ est évidente puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, donc $F + G$ aussi.

Montrons alors que $\mathbb{R}^4 \subset F + G$.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

On souhaite montrer que (x, y, z, t) peut s'écrire $X_1 + X_2$ avec $X_1 \in F$ et $X_2 \in G$.

Dire que $(x, y, z, t) = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in F$ et $X_2 \in G$ signifie qu'il existe a, b, c, d scalaires tels que :

$$(x, y, z, t) = \underbrace{a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 1, 0)}_{X_1 \in F} + \underbrace{c(1, 0, 0, -1) + d(1, 1, -1, 0)}_{X_2 \in G}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + c + d \\ y = b + d \\ z = b - d \\ t = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + c + d \\ y = b + d \\ d = \frac{1}{2}(y - z) \\ c = -t \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow -L_3 + L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x - c - d = x + t + \frac{1}{2}(z - y) \\ b = y - d = \frac{1}{2}(y + z) \\ d = \frac{1}{2}(y - z) \\ c = -t \end{cases}$$

Il suffit alors d'écrire :

$$(x, y, z, t) = \underbrace{\left(x + t + \frac{1}{2}(z - y)\right) \times (1, 0, 0, 0) + \frac{1}{2}(y + z) \times (0, 1, 1, 0)}_{\in F} - \underbrace{t \times (1, 0, 0, -1) + \frac{1}{2}(y - z) \times (1, 1, -1, 0)}_{\in G}$$

Donc $(x, y, z, t) \in F + G$.

Donc $\mathbb{R}^4 \subset F + G$.

Par double inclusion, on a alors $\mathbb{R}^4 = F + G$.

On vient donc de montrer que :

$$\mathbb{R}^4 = F \oplus G$$

Remarque : En montrant que $\mathbb{R}^4 \subset F + G$, on a en fait montré l'existence **et l'unicité** de la décomposition, donc on aurait pu se dispenser, ici, de vérifier que $F \cap G = \{O_E\}$.

Q3/.

$$a/. (x, y, z, t) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow (2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0) = (0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow y = -z \text{ et } x = -z - t$$

$$\text{Ainsi } (x, y, z, t) = (-z - t, -z - z, t) = z(-1, -1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1) = -z u_4 - y u_3.$$

Donc :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u_3, u_4) = G$$

$$b/. \text{Im}(f) = \{(2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0), (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\} \\ = \{x(1, 0, 0, 0) + y(-1, 1, 1, 0) + z(1, 1, 1, 0) + t(2, 0, 0, 0), (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\}$$

Parmi les quatre générateurs, on voit que le dernier est lié au premier, donc on peut le supprimer.

On en est donc à $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (-1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0))$

On remarque aussi que $(1, 1, 1, 0) = 2(1, 0, 0, 0) + (-1, 1, 1, 0)$, donc $(1, 1, 1, 0)$ s'exprime comme combinaison linéaire de $(1, 0, 0, 0)$ et $(-1, 1, 1, 0)$, donc on peut aussi le supprimer.

Donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (-1, 1, 1, 0))$

On remarque que $u_2 = (0, 1, 1, 0) = (1, 0, 0, 0) + (-1, 1, 1, 0)$, donc on a également :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0))$$

Finalement, on a bien :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(u_1, u_2)$$

c/. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On calcule :

$$f \circ f(x, y, z, t) = f(2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0) \\ = (2(2x - y + z + 2t) - (y + z) + (y + z) + 2 \times 0, (y + z) + (y + z), (y + z) + (y + z), 0) \\ = 2(2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0) = 2f(x, y, z, t)$$

On a bien montré que :

$$f \circ f = 2f$$

d/. Il vient que $s \circ s = (f - Id) \circ (f - Id) = f \circ f - 2f + Id \circ Id = 2f - 2f + Id = Id$

s est donc une symétrie vectorielle, d'éléments caractéristiques :

- $\text{Ker}(s + Id) = \text{Ker}(f) = G$

$$\begin{aligned}
\bullet \text{ Ker}(s - Id) &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; s(x, y, z, t) = (x, y, z, t)\} \\
&= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; f(x, y, z, t) = 2(x, y, z, t)\} \\
&= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; (2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0) = 2(x, y, z, t)\} \\
&= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; -y + z + 2t = 0 \text{ et } z = y \text{ et } t = 0\} \\
&= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; z = y \text{ et } t = 0\} \\
&= \text{Vect}(u_1, u_2) = F
\end{aligned}$$

Donc :

s est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

Exercice 2.

Q1/ 2 racine double de A donc $A(2) = 0$, $A'(2) = 0$ et $A''(2) \neq 0$.

$$A(2) = 32 - 48 + 8 + 4 + 2a + b = -4 + 2a + b$$

$$\text{Donc } A(2) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 4$$

$$A'(X) = 5X^4 - 12X^3 + 3X^2 + 2X + a \text{ donc } A'(2) = 80 - 96 + 12 + 4 + a = a$$

$$A'(2) = 0 \text{ donc } a = 0 \text{ et } b = 4$$

$$A''(x) = 20X^3 - 36X^2 + 6X + 2 \text{ donc } A''(2) = 160 - 144 + 12 + 2 = 30 \neq 0$$

Si $a = 0$ et $b = 4$, 2 est racine double (et pas d'ordre supérieur !) de A.

Donc l'unique couple (a, b) tel que 2 soit racine double est le couple $(0, 4)$.

Méthode 2 : division par le polynôme $(X - 2)^2$, et reste nul...

Q2/ Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes, avec $d^o(R) < 2$ tels que :

$$(X + 1)^n = (X - 1)^2 Q + R$$

Il existe a et b réels tels que $R = aX + b$.

$$(X + 1)^n = (X - 1)^2 Q + aX + b \quad (*)$$

$$\text{On pose } X = 1 : 2^n = a + b$$

On dérive (*) :

$$n(X + 1)^{n-1} = 2(X - 1)Q + (X - 1)^2 Q' + a$$

$$\text{Avec } X = 1 : n2^{n-1} = a$$

$$\text{Donc } b = 2^n - n2^{n-1}$$

Finalement :

$$R = n2^{n-1}X + 2^n - n2^{n-1}$$

Q3/ D'après les relations coefficients racines dans un polynôme unitaire de degré 2, on peut dire que les réels 1

et $\sqrt{3}$ sont racines du polynômes $P = X^2 - (1 + \sqrt{3})X + \sqrt{3}$.

$\Delta = (1 + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}$, donc les racines de ce polynôme sont :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2}$$

Puisque $x_1 < x_2$, on déduit que :

$$\frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} = 1 \text{ et } \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{3}$$

Q4/ Si $n = 0$, le polynôme P est constant et égal à 1, donc, possède effectivement 0 racine.

Supposons maintenant que $n \geq 1$.

P est scindé dans $\mathbb{C}$, donc possède n racines. Reste à montrer que ces racines sont deux à deux distinctes.

Si P admettait une racine (au moins) double z, alors le complexe z serait racine de P et de P', c'est-à-dire solution du système :

$$\begin{cases} P(z) = 0 \\ P'(z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} = 0 \\ 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \end{cases}$$

Par différence des deux dernières lignes, on obtient $\frac{z^n}{n!} = 0$, soit $z = 0$.

Or 0 n'est pas racine de P.

Le polynôme P possède donc uniquement des racines de multiplicité 1, donc

P admet n racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$.

Q5/ Premiers termes de la suite :

$$P_0 = 1, P_1 = -X, P_2 = 2X^2 - 1, P_3 = -6X^3 + 9X, P_4 = 24X^4 - 72X^2 + 9$$

Conjecture : le degré de P_k est égal à k.

Prouvons-le par récurrence.

Initialisation : $\deg(P_0) = \deg(1) = 0$ donc la propriété est vérifiée.

Hérédité : on suppose que $\deg(P_k) = k$ pour un certain entier naturel k. Donc :

$$\deg((1 + X^2)P'_k) = 2 + \deg(P'_k) = k + 1 \text{ et } \deg(-(2k + 1)XP_k) = 1 + \deg(P_k) = 1 + k$$

Mais on peut seulement en déduire que $\deg(P_{k+1}) \leq k + 1$; pour préciser ce résultat, on regarde les coefficients dominants.

$$P_k = a_k X^k + \dots \text{ avec } a_k \neq 0$$

$$\text{Alors } (1 + X^2)P'_k = (1 + X^2)(ka_k X^{k-1} + \dots) = k a_k X^{k+1} + \dots \text{ et } (2k + 1)XP_k = (2k + 1)a_k X^{k+1} + \dots$$

$$\text{d'où } P_{k+1} = -(k + 1)a_k X^{k+1} + \dots$$

Comme $(k + 1)a_k \neq 0$, on a bien $\deg(P_{k+1}) = k + 1$, ce qui achève la récurrence.

Les calculs ci-dessus fournissent aussi la relation de récurrence suivante sur le coefficient dominant a_k de P_k :

$$\forall k, a_{k+1} = -(k + 1)a_k$$

Avec $a_0 = 1$, on déduit que

$$\forall k, a_k = (-1)^k k!$$

Exercice 3.

Partie I – Etude d'un exemple

Q1/ g est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, donc g est bien définie. De plus, pour tous $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$g((x, y) + \lambda(a, b)) = g(x + \lambda a, y + \lambda b) = (0, x + \lambda a) = (0, x) + \lambda(0, a) = g(x, y) + \lambda g(a, b)$$

Donc g est linéaire. Ainsi :

$$g \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^2.$$

Q2/ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(x, y) \in \text{Ker}(g) \Leftrightarrow g(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (0, x) = (0, 0) \Leftrightarrow x = 0 \\ \Leftrightarrow (x, y) = (0, y)$$

On en déduit que :

$$\text{Ker}(g) = \{y(0, 1) ; y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1))$$

$$\text{Im}(g) = \{g(x, y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(0, x) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(0, 1), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1))$$

Donc :

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}((0, 1))$$

Q3/ On a $\text{Ker}(g) = \text{Im}(g) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ donc $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(g) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Autrement dit, le noyau et l'image de g ne sont pas en somme directe, donc ils ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que :

$$g \text{ ne vérifie pas la propriété (P)}$$

Partie II – être un projecteur, une condition suffisante

Q4/ On procède par double inclusion :

- Comme $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels de E , on a l'inclusion $\{0_E\} \subset \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$.
- Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$. Alors $p(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ (car $x \in \text{Im}(p)$). Or $p \circ p = p$ donc :

$$0_E = p(x) = p(p(y)) = (p \circ p)(y) = p(y) = x$$

$$\text{Ainsi, } x = 0_E \text{ et donc } \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) \subset \{0_E\}$$

Finalement, on a bien :

$$\{0_E\} = \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$$

Q5/ Sachant que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont en somme directe (question Q4), il reste à montrer l'égalité : $E = \text{Ker}(p) + \text{Im}(p)$.

L'inclusion $\text{Ker}(p) + \text{Im}(p) \subset E$ est évidente car E est un espace vectoriel. Il reste donc à démontrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in E$. Alors :

$$x = (x - p(x)) + p(x)$$

Par définition de $\text{Im}(p)$, on a $p(x) \in \text{Im}(p)$. De plus, $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$ car $p^2 = p$ et p est linéaire, donc :

$$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0_E$$

Ainsi, $x \in \text{Ker}(p) + \text{Im}(p)$. D'où la deuxième inclusion $E \subset \text{Ker}(p) + \text{Im}(p)$.

Finalement, on a bien l'égalité annoncée, et on conclut que :

$$E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$$

Exercice 4.

Q1/ a/ On sait que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc (comme $-x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$) :

$$e^{-x} + e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + x^2 + o(x^3)$$

Donc (en utilisant le fait que $\frac{x^2}{2} + o(x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ ainsi que le $DL_3(0)$ de $\frac{1}{1+u}$) :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

D'où :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^3)$$

b/ La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x)$$

Donc, en intégrant le développement limité obtenu à la question précédente, on obtient :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^4)$$

C'est-à-dire :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^4)$$

car $\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$.

Q2/ a/ Pour tout entier naturel n , on a :

$$\ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right) = \ln\left(1 - \frac{2}{n^2 + 1}\right)$$

Or $-\frac{2}{n^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc, par substitution :

$$\ln\left(1 - \frac{2}{n^2 + 1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2 + 1}$$

Comme de plus $n^2 + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$, on peut conclure que :

$$\ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}$$

b/ Pour tout entier naturel n , on a $u_n = \exp\left[n^2 \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)\right]$ et :

$$n^2 \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -2$$

D'après la question précédente, donc $n^2 \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2$. La fonction exponentielle étant continue au point $x = -2$, la caractérisation séquentielle de la continuité fournit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow -2} e^x = e^{-2}$$

Q3/.

$$\frac{1}{\cos(x) - 1} + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 2(\cos(x) - 1)}{x^2(\cos(x) - 1)}$$

On sait que : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

On a donc : $x^2(\cos(x) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \times \left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^4}{2}$

$$\text{et } x^2 + 2(\cos x - 1) = x^2 + \left(-x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right) = \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

Donc $x^2 + 2(\cos(x) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^4}{12}$

Par quotient d'équivalents :

$$\frac{1}{\cos(x) - 1} + \frac{2}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^4}{12}}{-\frac{x^4}{2}} = -\frac{1}{6}$$

En passant aux limites :

$$\frac{1}{\cos(x) - 1} + \frac{2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6}$$

Exercice 5.

Q1/ a/. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont. D'après le théorème de la bijection :

$$f \text{ est bijective de } \mathbb{R}_+^* \text{ sur } f(\mathbb{R}_+^*) =] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [=] -\infty ; +\infty[.$$

b/. D'après le théorème de la bijection :

$$\text{La fonction } f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ est strictement croissante, et}$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f^{-1}(y) = 0 \text{ et } \lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = +\infty$$

Q2/ Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{R}$, donc :

L'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ (notée x_n).

Q3/ Pour tout entier naturel n , on a $f(x_n) = n$ donc $x_n = f^{-1}(n)$. Or f^{-1} est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$ et $f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$ donc :

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Q4/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x_n + \ln(x_n) = n \quad \text{donc} \quad 1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \frac{n}{x_n}$$

Or $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, par croissances comparées et caractérisation séquentielle de la limite, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

On en déduit que $\frac{n}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, ce qui signifie que :

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$$

Q5/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_{n+1} - x_n = (n+1 - \ln(x_{n+1})) - (n - \ln(x_n)) = 1 - \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$$

Or $\frac{x_{n+1}}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ donc :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ puis } \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par composition des limites. Par conséquent :

la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge de limite 1

Q6/ a/. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Alors :

$$u_n - 1 = \frac{n - x_n}{\ln(n)} - 1 = \frac{n - x_n - \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(x_n) - \ln(n)}{\ln(n)}$$

Car $x_n + \ln(x_n) = n$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \quad u_n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$$

b/. D'après la Q4/, on a $\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc (en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité), $\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Comme de plus $\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on obtient $u_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui signifie que :

la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente de limite 1

c/. D'après la question précédente, on a $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1)$ donc :

$$\frac{n - x_n}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1) \text{ c'est-à-dire } n - x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + o(\ln(n))$$

On a donc :

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \ln(n) + o(\ln(n))$$