Maths - DM n°5 - Pour le vendredi 11 avril,

Espaces vectoriels de dimension finie, analyse

Exercice 1.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(x_0, x_1, ..., x_n)$ une famille de $n+1$ réels ***distincts***.

Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0); P(x_1); ...; P(x_n)) \end{cases}$

1) Montrer que ϕ est linéaire.

2) Déterminer le noyau de ϕ. Que peut-on en déduire ?

3) En déduire que pour tout $(y_0; y_1; ...; y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in E$ tel que $\phi(P) = (y_0; y_1; ...; y_n)$.

4) Montrer que le système

$$\begin{cases} \lambda_0 + x_0\lambda_1 + x_0^2\lambda_2 + \cdots + x_0^n\lambda_n = y_0 \\ \lambda_0 + x_1\lambda_1 + x_1^2\lambda_2 + \cdots + x_1^n\lambda_n = y_1 \\ \vdots \\ \lambda_0 + x_n\lambda_1 + x_n^2\lambda_2 + \cdots + x_n^n\lambda_n = y_n \end{cases}$$

d'inconnues $(\lambda_0; \lambda_1; ...; \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ admet une unique solution.
On ne demande pas de résoudre ce système. Uniquement de montrer qu'il possède une unique solution.

5) Montrer que le système

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = y_0 \\ x_0\lambda_0 + x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \cdots + x_n\lambda_n = y_1 \\ \vdots \\ x_0^n\lambda_0 + x_1^n\lambda_1 + x_2^n\lambda_2 + \cdots + x_n^n\lambda_n = y_n \end{cases}$$

d'inconnues $(\lambda_0; \lambda_1; ...; \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ admet une unique solution.

6) ***Application numérique*** : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Justifier que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, calculer A^{-1}.
Donner l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = 2$, $P(2) = -1$ et $P(-1) = 1$.
Résoudre le système $\begin{cases} u + v + w = 2 \\ u + 2v - w = -1 \\ u + 4v + w = 1 \end{cases}$.

7) Soit $F = R_2[X]$ et $\psi : \begin{cases} F & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0); P'(0); P(1)) \end{cases}$
En ***adaptant les trois question précédentes***, montrer que pour tout $(u; v; w) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique polynôme $P \in F$ tel que $\psi(P) = (u; v; w)$.

8) Application numérique :

- Donner l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P'(0) = 2$ et $P(1) = 3$.
- Donner l'unique polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(0) = 0$, $Q'(0) = 1$ et $Q(1) = 2$.

Exercice 2.

D'après un exercice d'oral Centrale 2000

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ et la suite $u_0 \in \mathbb{R}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A : Étude de f

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2) Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   Dans la suite, on note f ce prolongement continu.
3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x\,(e^x - 1)}$$
4) Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-1)e^x + 1$.
   Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geqslant 0$.
5) Déduire des deux questions précédentes que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et construire son tableau de variations.
   On précisera notamment l'image de 0 par f et par f'.
6) ***On rappelle que*** $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$.
   Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) \leqslant x$$
7) Tracer une représentation graphique soignée de f sur l'intervalle $[-2; 2]$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.

Partie B : Étude de la suite u

8) Montrer que, si $u_0 > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} < u_n$.
9) Que peut-on dire de la suite u si $u_0 < 0$?
10) En déduire que, quelle que soit la valeur de u_0, u converge et donner sa limite.
11) Montrer que $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{2}$.