Maths - TD n° 2

Fonctions de référence, espaces vectoriels

Ex. 2.1 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit F l'ensemble des fonctions impaires de E et G l'ensemble des fonctions paires de E.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer, ***par analyse-synthèse***, que F et G sont supplémentaires.
3. Soit f une fonction de E. Que peut-on déduire de la question précédente concernant f ?
4. Soient $\mathcal{P} : \begin{cases} E = F \oplus G & \to & E \\ f = f_1 + f_2 & \mapsto & \mathcal{P}(f) = f_2 \end{cases}$ et $\mathcal{I} : \begin{cases} E = F \oplus G & \to & E \\ f = f_1 + f_2 & \mapsto & \mathcal{I}(f) = f_1 \end{cases}$.
   Que peut-on dire des applications $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$?

Définition 2.1 (Partie paire, partie impaire d'une fonction)

Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on appelle

- ***partie paire de*** f la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$;
- ***partie impaire de*** f la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Notation

Avec les mêmes hypothèses que dans la définition précédente, on notera

- $\mathcal{P}(f)$ la partie paire de f ;
- $\mathcal{I}(f)$ la partie impaire de f.

Ex. 2.2 Dans chaque cas, expliciter $\mathcal{P}(f)$ et $\mathcal{I}(f)$:

- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$;
- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$;
- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(kx)$ où $k \in \mathbb{Z}$;
- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

Ex. 2.3

1. Montrer que le produit de deux fonctions paires (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est une fonction paire.
2. Démontrer les propriétés similaires concernant le produit de deux fonctions impaires, ou le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Ex. 2.4

1. Exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
   Linéariser $\sin^3(x)\cos^2(x)$.
2. Exprimer en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$:
   •$\mathrm{ch}(2x)$; •$\mathrm{sh}(2x)$; •$\mathrm{ch}(3x)$; •$\mathrm{sh}(3x)$.
3. Exprimer $\mathrm{ch}(a+b)$, $\mathrm{sh}(a+b)$, $\mathrm{ch}(a-b)$ et $\mathrm{sh}(a-b)$ en fonction de $\mathrm{ch}(a)$, $\mathrm{sh}(a)$, $\mathrm{ch}(b)$ et $\mathrm{sh}(b)$.
   Linéariser $\mathrm{sh}^3(x)\,\mathrm{ch}^2(x)$.