Exercices de révision

I. Calcul littéral, calcul différentiel

Ex. 2.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
2. Déduire de la question précédente que $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.
3. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
4. Donner une expression simplifiée de $S_n(1)$.
5. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
6. En écrivant $k^2 = k(k-1) + k$ et en utilisant la question précédente, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ex. 2.6 Donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

Fonction	Solution
$f : x \mapsto xe^x$	définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x$
$f : x \mapsto \ln\lvert\ln(x)\rvert$	définie et dérivable sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$
$f : x \mapsto \dfrac{x+1}{2x+3}$	définie et dérivable sur $\left]-\infty; \frac{-3}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{-3}{2}; +\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{1}{(2x+3)^2}$
$f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$	définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
$f : x \mapsto \sqrt{2x}$	définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$
$f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(2x^2-1)$	définie sur $[-1;1]$, dérivable sur $]-1;0[$ et $]0;1[$, $f'(x) = \dfrac{\pm 2}{\sqrt{1-x^2}}$

Déduire de l'expression de la dernière dérivée que $\operatorname{Arccos}(2x^2-1) = \pm 2\operatorname{Arccos}(x) + cte$ où l'on identifiera la valeur de la constante suivant l'intervalle $I_1 =]-1;0[$ ou $I_2 =]0;1[$ auquel appartient x. Que se passe-t-il pour $x = 0$?

Ex. 2.7 [$*$] Soient $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ et $g : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

1. Ensembles de définition et de dérivabilité de f et g ?
2. Montrer que lorsque ces expressions ont un sens
   $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
3. Montrer que f et g sont des bijections de leur ensemble de définition sur un intervalle à préciser.
   On note $u = f^{-1}$ la bijection réciproque de f et $v = g^{-1}$ celle de g.

4. Calculer $e^{f(x)} - e^{f(-x)}$ et en déduire que $u = \mathrm{sh}$.
5. Montrer que lorsque cette expression a un sens, $e^x - v(x) = \sqrt{v(x)^2 - 1}$ et en déduire que $v' + v = e^x$.
6. Résoudre $y' + y = e^x$ et donner une expression simple de $v(x)$ lorsque cette expression est définie.

II. Nombres réels, nombres complexes, suites

Ex. 2.8 [*] Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \leqslant b$.

1. Montrer que $a \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant b$.
2. Montrer que $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.
3. On note $A(a;b) = \dfrac{a+b}{2}$ et $H(a;b) = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.
   Montrer que $H(a;b) = \dfrac{1}{A\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b}\right)}$ et en déduire que $a \leqslant H(a;b) \leqslant \sqrt{ab}$.
4. Soient u et v les suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
   Montrer que u et v convergent vers une même limite (que l'on ne cherchera pas à expliciter).
   On note $M(a;b)$ la limite commune des suites u et v.
5. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant M(a;b) \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.
6. Montrer que $M\left(\sqrt{ab}; \dfrac{a+b}{2}\right) = M(a;b)$.
7. Soient x et y les suites définies par $x_0 = a$, $y_0 = b$, $x_{n+1} = H(x_n; y_n)$, $y_{n+1} = A(x_n; y_n)$.
   Montrer que les suites x et y convergent vers une même limite que l'on explicitera.

Ex. 2.9 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.
Dans quels cas l'inégalité est-elle stricte ?

Ex. 2.10 [*] Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P_n : x \in]-1;1[\mapsto \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$ et
$Q_n : x \in]-1;1[\mapsto \dfrac{\sin(n \operatorname{Arccos}(x))}{\sqrt{1-x^2}}$.
Dans tout ce qui suit, $x \in]-1;1[$.

1. Montrer que $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = 2x^2 - 1$ et calculer $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n'(x) = nQ_n(x)$ et $Q_n'(x) = \dfrac{-nP_n(x) + xQ_n(x)}{1-x^2}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - (1-x^2)Q_n(x)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + P_n(x)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $xP_{n+1}(x) + (1-x^2)Q_{n+1}(x)$?
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x)$.
7. Calculer P_3, P_4, P_5, P_6 ainsi que Q_3, Q_4, Q_5, Q_6.
8. Exprimer pour $\alpha \in [0;\pi]$ (et avec un minimum d'effort !) $\cos(6\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$.
   L'expression obtenue est-elle valable pour α réel quelconque ?

Ex. 2.11 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on pose $\mathcal{F} = (u, v, w)$ avec

$$u = (1, -1, 1), v = (0, -1, 2), w = (1, -2, 3)$$

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle liée ? Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
2. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x+2y+z = 0\}$. Donner une base de G. Montrer que $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Ex. 2.12 Donner le rang de la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ et une base de $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$ avec

$$u_1 = (1, -2, 1, 3, -1)$$
$$u_2 = (-2, 4, -2, -6, 2)$$
$$u_3 = (1, -3, 1, 2, 1)$$
$$u_4 = (3, -7, 3, 8, -1)$$

Ex. 2.13 [$*$] Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\tilde{P}_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \binom{x}{n} \in \mathbb{R}$
et $P_n \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme associé.

1. Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.
2. Montrer que l'on a bien $P_n \in \mathbb{R}[X]$ et préciser le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (P_0; P_1; P_2; P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Exprimer X^3 dans la base $\mathcal{B}$.
5. Montrer que pour tout couple $(n; p) \in \mathbb{N}^2$, on a
$$\sum_{k=0}^{p} \tilde{P}_n(k) = \tilde{P}_{n+1}(p + 1)$$
6. À l'aide des questions précédentes, calculer $\sum_{k=1}^{p} k^3$.
7. Conjecturer une généralisation des résultats des questions Q3 à Q6 à $\mathbb{R}_n[X]$ pour n entier positif quelconque.

Ex. 2.14 [$*$] Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et

$$\psi : \left\{ \begin{array}{lcc} E & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(a); P'(a); ...; P^{(n)}(a)\big) \end{array} \right.$$

1. Montrer que ψ est linéaire.
2. Calculer $\mathrm{Ker}(\psi)$.
   Remarque : on pourra s'éviter des calculs en pensant à une formule bien connue...
3. Que peut-on déduire des deux questions précédentes concernant ψ ?
4. Dans ce qui suit, on pose $n = 3$ et $a = 1$.
   A. Donner l'unique polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(1) = 1$, $P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) = 6$.
   On donnera les coefficients de ce polynôme.
   B. Quels sont les polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ vérifiant $P(1) = 1$, $P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) = 6$?
   On explicitera les coefficients de ces polynômes.