Suites récurrentes, convexité

Étude des suites récurrentes

Soit $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ une suite définie par récurrence associée à une fonction f réelle de la variable réelle. Les résultats suivants sont ***hors-programme*** : il faut les ***redémontrer*** pour chaque exercice sur les suites récurrentes, mais ils fournissent des ***méthodes*** pour l'étude de ces suites.

- Pour que l'existence de la suite u soit garantie il faut montrer que u_0 appartient à un ***intervalle*** I ***stable par*** f c'est-à-dire tel que $\forall x \in I, f(x) \in I$.
  On considère donc dans ce qui suit que $f : I \to I$.
- Si f est ***croissante*** sur I alors u est ***monotone***. Plus précisément :
  - ⋆ si $u_1 \geqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, et si f est croissante sur I alors u ***est croissante*** ;
  - ⋆ si $u_1 \leqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, et si f est croissante sur I alors u ***est décroissante***.

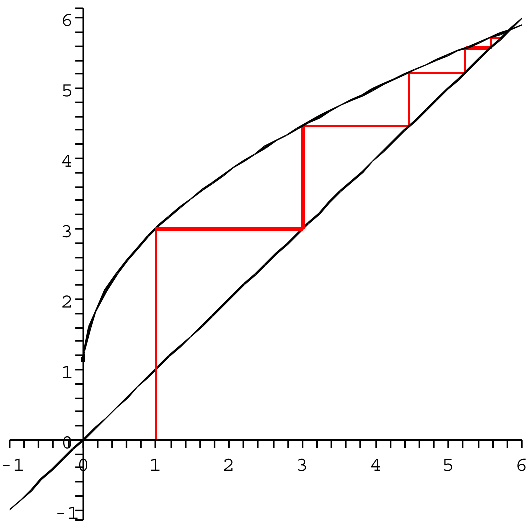
  On peut conclure à la stricte monotonie de u si f est strictement croissante et si $g(u_0) \neq 0$.
- Si f est ***décroissante*** sur I alors u ***n'est en général pas monotone*** (la seule exception venant de la possibilité que u soit constante).
  Cependant $f \circ f$ est alors croissante et on étudie séparément la monotonie des termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite en utilisant le point précédent.
- Si f ***est continue sur*** I et ***si la suite*** u ***converge vers*** l alors l est ***un point fixe de*** f c'est-à-dire vérifie $f(l) = l$.

.1. Exemples d'étude de suites récurrentes

Ex. 3.1 Soit $\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & r(v_n) = 2\sqrt{v_n} + 1 \end{cases}$.

1. Étudier la fonction r et montrer que son ensemble de définition est ***stable*** par r.
2. Démontrer que v est bien définie.

Ci-contre la représentation graphique de la suite v.
Pour obtenir une telle représentation graphique, on trace d'abord les représentations graphiques $y = x$ et $y = r(x)$.
On place alors $v_0 = 1$ sur l'axe des abscisses et on obtient $v_1 = r(v_0)$ comme l'ordonnée du point d'abscisse v_0 de la représentation graphique de r.
Pour placer v_1 en abscisse, il suffit de prendre l'abscisse du point d'ordonnée v_1 de la représentation graphique de la droite d'équation $y = x$.
On peut alors recommencer le même processus pour représenter v_2, v_3 etc...



3. Montrer que v est monotone.
4. Étudier la convergence de la suite v.

Ex. 3.2 Soit $\begin{cases} w_0 & = \frac{1}{2} \\ w_{n+1} & = f(w_n) = 1 + \frac{1}{w_n} \end{cases}$.

1. Étudier la fonction f et montrer qu'il existe un intervalle de définition qui contient $\dfrac{1}{2}$ et est ***stable*** par f.
2. Démontrer que w est bien définie.
3. Représenter graphiquement f sur l'intervalle trouvé à la première question, ainsi que les premiers termes de la suite w.
4. w est-elle monotone ?
5. Étudier la convergence de la suite w.

Ex. 3.3 (Cor.) On définit la suite t par $\begin{cases} t_0 & \in \mathbb{R} \\ t_{n+1} & = h(t_n) = \frac{t_n^2}{4} + 1 \end{cases}$

1. Montrer que t est bien définie.
2. Tracer dans un même repère la représentation graphique de h et de la première bissectrice.
3. Résoudre l'équation $h(x) = x$.
4. Montrer que t est croissante et en déduire ses comportements asymptotiques possibles.
5. On suppose $t_0 \in [0; 2]$. Que peut-on en déduire ?
6. Etudier le comportement de t lorsque $t_0 \notin [0; 2]$.

Ex. 3.4 (Cor.) ***Oral Mines*** Étudier la suite s définie par $s_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = 1 - s_n^2$.
[Indication : l'exercice a été donné sans question intermédiaire.
On pourra utiliser comme plan d'étude : étudier $k : x \mapsto 1 - x^2$ et montrer que $k([0;1]) = [0;1]$, représenter graphiquement k et la première bissectrice puis étudier les termes de rang pair et impair de la suite s pour parvenir à une conclusion.]

Ex. 3.5 (Cor.) [**] f désigne une application continue et strictement croissante, du segment $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifie : $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0, a], f(x) < x$.
On suppose, en outre, que l'on a au voisinage de 0, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$.
On considère des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $a_1 \in]0, a]$ et $b_1 \in]0, a]$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = f(a_n)$ et $b_{n+1} = f(b_n)$.
Montrer que l'on a $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$.

.2. Convexité

Ex. 3.6 Soient $p \in]1; +\infty[, q \in]1; +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que

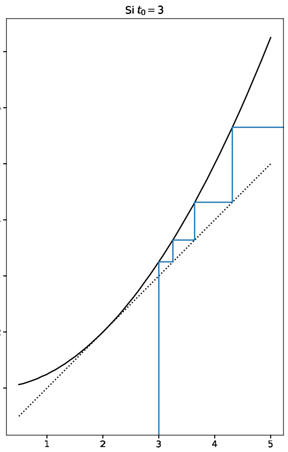
$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

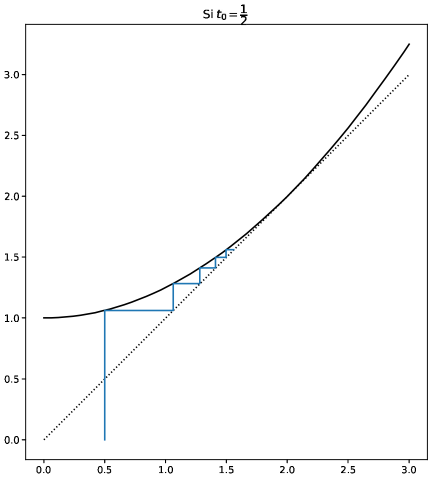
Ex. 3.7 En utilisant le résultat de l'un des exercices du cours, montrer que

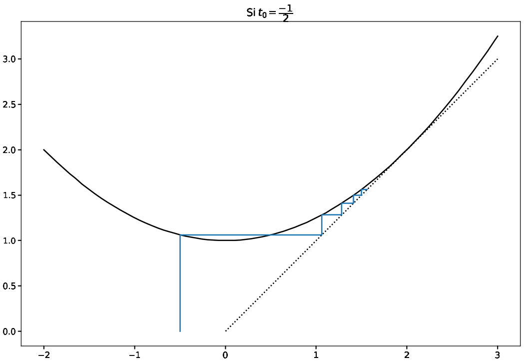
$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} \geqslant \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2}$$

Cor. 3.3 :

1. $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{4} + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R}$ est un intervalle stable. Donc la suite t est bien définie.
2. h est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$ (par affinité et translation d'une fonction de référence). On donne ci-dessous 3 représentations graphiques de h, la première bissectrices et les premiers termes de la suite t pour différentes valeurs de t_0.







3. $h(x) = x \Leftrightarrow x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
4. On a déjà vu que h est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc h passe par un minimum 1 en $x = 0$. Comme h est continue, $h(\mathbb{R}) = [1; +\infty[$. Notamment, $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par h.
Si $t_0 \leqslant 0$ alors $t_1 \geqslant 0$ et, d'après la remarque précédente, tous les termes de la suites sont alors positifs. On peut donc considérer que la suite est à termes positifs quitte à commencer au rang 1.
Supposons donc $t_0 \geqslant 0$. Comme h est croissante sur $\mathbb{R}_+$, la suite t est monotone.
Or, d'après la question précédente, $h(x) - x = \dfrac{(x-2)^2}{4} \geqslant 0$. Donc la suite t est croissante.
Si de plus elle est majorée, alors elle est convergente.
Si au contraire elle n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
5. On suppose $t_0 \in [0; 2]$.
h est croissante sur $[0; 2]$, et $h(0) = 1$, $h(2) = 2$. Donc $[0; 2]$ est un intervalle stable.
Donc la suite t est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.
Comme de plus h ***est continue*** et possède un unique point fixe 2, on a
$$\lim_{n \to +\infty} t_n = 2$$
6. Supposons $t_0 > 2$. La suite t est croissante d'après la question 4.
Montrons ***par l'absurde*** qu'elle n'est pas majorée : supposons qu'elle est majorée. Alors elle serait convergente, et comme h est continue, convergerait vers un point fixe de h.
Or h possède un unique point fixe 2.
On aurait donc
$\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 2$ d'une part et
$\forall n \in \mathbb{N}, t_n \geqslant t_0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n \geqslant t_0 > 2$ d'autre part, ce qui est absurde.
Donc t n'est pas majorée et $\lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty$.
Enfin, par parité de h, si $t_0 < 0$, $t_1 > 0$ et on se ramène à l'un des deux cas précédents suivant que $t_1 \in [0; 2]$ ou $t_1 \in]2; +\infty[$.

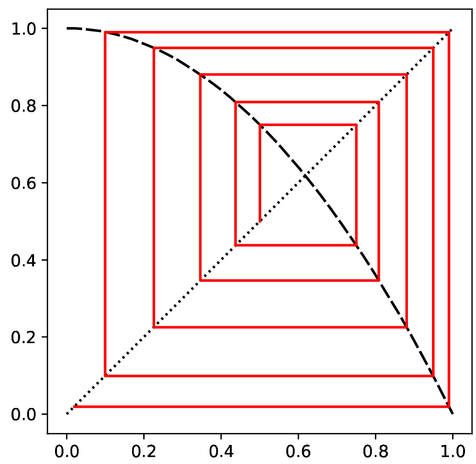
Cor. 3.4 : Soit $f : x \in [0; 1] \mapsto 1 - x^2$.
f est définie, continue et dérivable sur $[0; 1]$ et
$f'(x) = -2x$ donc f est strictement décroissante sur $[0; 1]$.
Or $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ donc $f([0; 1]) = [0; 1]$.
De plus, $s_0 = \dfrac{1}{2} \in [0; 1]$, donc la suite s est bien définie d'une part, et $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \in [0; 1]$ d'autre part.
La suite s est donc bornée.

f étant strictement décroissante on étudie les sous-suites extraites de rang pair et impair et pour cela, on étudie $h = f \circ f$.
$\forall x \in [0;1], h(x) = 1 - \left(1 - x^2\right)^2 = 2x^2 - x^4$.
$h'(x) = 4x - 4x^3 = 4x\left(1 - x^2\right) = 4xf(x) \geqslant 0$ puisque $x \in [0;1]$ est positif et $f(x) \in [0;1]$ aussi.
Donc $h = f \circ f$ est croissante, donc les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
$s_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
$s_2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} < \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.
$s_3 = 1 - \frac{49}{256} = \frac{207}{256} > \frac{192}{256} = \frac{3}{4}$.
Finalement, $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Ces deux suites étant bornées, elles convergent vers un point fixe de h (car h est continue).

Cherchons les points fixes de h :
$h(x) = x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1) = 0$ avec 1 pour racine évidente du second facteur.
Donc $h(x) = x \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x - 1) = 0$.
$\Delta = 1 + 4 = 5$ ce qui conduit donc aux 4 points fixes $\left\{0; 1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.
La dernière racine n'est pas dans l'intervalle $[0;1]$ donc ne peut pas être limite des deux suites extraites.
De même $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \in \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right[$ ne peut être limite des deux suites extraites.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} = 0$ (décroissante, bornée par 0 et $s_0 = \frac{1}{2}$, la seule limite possible est 0)
et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n+1} = 1$ (croissante, bornée par $s_1 = \frac{3}{4}$ et 1, la seule limite possible est 1).

Les deux suites extraites convergent vers des limites distinctes, donc s diverge.

Bonus : représentation graphique de la suite



Cor. 3.5 : Le cas où $a_1 = b_1$ étant évident, on peut supposer $a_1 < b_1$ (le dernier cas se traitant de manière identique).
f étant strictement croissante et comme $\forall x \in]0;a], 0 < f(x) < x$, on obtient immédiatement que les deux suites sont bien définies et strictement décroissantes.
Comme elles sont de plus minorées par 0, elles convergent. f étant continue, la limite est 0, unique point fixe de f.
Notamment, $\exists p \in \mathbb{N}^*, 0 < b_{p+1} < a_1 < b_1$ (car b converge vers 0).
On démontre alors par récurrence que

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}^*, b_{p+n} < a_n < b_n$$

Or $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(b_n) = b_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.
À nouveau, une récurrence sur p permet de montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+p} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.
La suite b étant strictement positive, on déduit de l'encadrement (E) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{b_{p+n}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < 1$$

puis, de l'équivalent $b_{n+p} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et du théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

c'est-à-dire, par définition, que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$$