

Ensembles, applications,

dénombrement

I. Ensembles et applications

Ex. 17.1 (Cor.) Soient $f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ 0 \mapsto 0 \\ n > 0 \mapsto n - 1 \end{cases}$

- Injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles de f et g .
- Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$, puis étudier leur injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles.

Ex. 17.2 (Cor.) Soit E un ensemble et $p : E \rightarrow E$ telle que $p \circ p = p$. Montrer que si p est injective ou surjective, alors $p = \text{Id}_E$.

II. Dénombrement

Ex. 17.3 Quel est le nombre de couples $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tels que :

- $i < j$?
- $i \leq j$?
- $i = j^2$?

Ex. 17.4 (Cor.)

- Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MATHS, puis du mot EUCLIDE.
- Déterminer le nombre d'anagrammes du mot BANANE, puis du mot MISSISSIPPI.

Ex. 17.5 Déterminer le nombre d'anagrammes des mots ABAISSER, RESSASSER, ASSASSINAT.

Ex. 17.6 Soient n et p deux entiers naturels.

- Combien y a-t-il de mots formés de n lettres A et p lettres B ?
- Dénombrer les ensembles suivants en les représentant par des ensembles de mots :
 - Deux joueurs s'affrontent dans un match en n sets gagnants. On appelle *partie* la liste des scores du début jusqu'à la fin du match. Par exemple, $((0; 0); (1; 0); (2; 0); (2; 1); (3; 1))$ est une partie possible dans un match en 3 sets gagnants (et cette partie a été remportée par le premier joueur).
Combien y a-t-il de parties possibles remportées par le premier joueur ?
Combien y a-t-il de parties possibles ?
 - Combien y a-t-il de parties possibles remportées par le premier joueur avec au moins deux sets d'écart ?
- On appelle *décomposition de n en p entiers* toute p -liste d'entiers positifs ou nuls $(a_1; a_2; \dots; a_p)$ dont la somme $\sum_{k=1}^p a_k$ vaut n .
Par exemple $(5; 0; 2; 1)$ est une décomposition de 8 en 4 entiers.
Combien y a-t-il de décomposition de n en p entiers ?

Ex. 17.7 Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

- Combien y a-t-il de parties A de E de cardinal $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$?
- Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$?
- Combien y a-t-il de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$?
- Combien y a-t-il de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que :
 - $A \cup B = E$?
 - $A \cap B = \emptyset$?
 - $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$?

Ex. 17.8 *Permutations de couples* On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes, n femmes, qui constituent n couples. On considère que deux tables sont identiques si on peut passer de l'une à l'autre par une rotation, une symétrie axiale ou la composée d'une rotation et d'une symétrie axiale.

- Combien y a-t-il de tables possibles ?
- Combien y a-t-il de tables possibles respectant l'alternance des sexes ?
- Combien y a-t-il de tables possibles ne séparant pas les couples ?
- Combien y a-t-il de tables possibles respectant les deux conditions précédentes ?

Ex. 17.9 On appelle opération interne sur un ensemble E toute application de $E \times E$ dans E .
Par exemple $*$ définie par $0 * 0 = 1, 0 * 1 = 1, 1 * 0 = 0$ et $1 * 1 = 1$ est une opération interne sur $\llbracket 0; 1 \rrbracket$.

- Combien existe-t-il d'opérations internes sur un ensemble à n éléments ?
- Combien sont commutatives ?
- Combien possèdent un élément neutre ?
- Combien sont commutatives et possèdent un élément neutres ?

Ex. 17.10 On appelle ***marche aléatoire*** dans $\mathbb{Z}$ toute famille (finie) $\mathcal{M} = (m_1; m_2; \dots; m_n)$ d'entiers telle que

- $m_1 = 0$;
- $\forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket, |m_i - m_{i-1}| = 1$.

Un couple $(m_i; m_{i+1})$ est alors appelé ***pas*** de la marche aléatoire.

- Combien y a-t-il de mots de $2n$ lettres formés de n lettres D et de n lettres G ?
- Combien y a-t-il de marches aléatoires de $2n$ pas se terminant sur 0 ?

III. Calculs de sommes finies

Ex. 17.11 Pour tout entier $n \geq 3$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par : « il existe $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ tel que $u_1 < u_2 < \dots < u_n$ et $1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k}$. »

- Analyse du cas $n = 3$: on suppose qu'il existe $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $u_1 < u_2 < u_3$ et $1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}$.
 - Montrer que $u_1 < 3$. En déduire la valeur de u_1 .
 - Trouver les valeurs de u_2 et u_3 .
- Montrer que $\mathcal{P}(4)$ est vraie et trouver tous les quadruplets qui satisfont cette propriété.
- Montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

Ex. 17.12 (Cor.) Formule d'inversion Soient $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels (ou complexes).

On pose pour tout entier $n, y_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$.

Montrer que pour tout entier $n, x_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$.

Existe-t-il une suite z vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_k = (-1)^n$? Si oui, donner z_n en fonction de n .

Ex. 17.13 $\llbracket * \rrbracket$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $q \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ on a :

$$\sum_{k=q}^p (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} = 0$$
- On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; p \rrbracket$.
 - Que dire de $S_{n,p}$ si $n < p$?
 - Déterminer $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$.

iii. Calculer $S_{n,2}$.

iv. Montrer que pour tout $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $S_{n,p} = p^n - \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} S_{n,k}$.

v. En déduire que $S_{n,p} = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

c. On note D_n le nombre de bijections de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans lui-même sans point fixe. On pose $D_0 = 1$.

i. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.

ii. En déduire que $D_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k!$.

(Voir exercice 17.12 concernant le lien entre les deux questions précédentes)

Corrections

Cor. 17.1 :

a. f est injective mais pas surjective : en effet

- soit n, m tels que $f(n) = f(m)$. Alors $n + 1 = m + 1$ donc $n = m$: f est injective.
- 0 n'a pas d'antécédent pas f : $f(n) = 0 \Rightarrow n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1$. Or $-1 \notin \mathbb{N}$.

g est surjective mais pas injective. En effet :

- Soit $m \in \mathbb{N}$, on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(n) = m$. Supposons $n > 0$: $m = n - 1 \Leftrightarrow n = m + 1$.
Donc m possède au moins un antécédent par g , c'est $m + 1$.
- $g(0) = 0 = g(1)$ donc g n'est pas injective.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$: $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n + 1) = n$ (car $n + 1 > 0$).

Donc $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$ qui est bijective.

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = \begin{cases} f(n-1) = n & \text{si } n > 0 \\ f(0) = 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Notamment, $f \circ g(n) > 0$ pour tout entier n : donc $f \circ g$ n'est pas surjective (0 n'est jamais atteint),
et $f \circ g(0) = 1 = f \circ g(1)$: donc $f \circ g$ n'est pas injective.

Cor. 17.2 :

- Si p est surjective, alors $\forall y \in E, \exists x \in E, p(x) = y$.
Soit $y \in E$ et x un antécédent.
Alors $p(y) = p(p(x)) = p \circ p(x) = p(x)$ par $p \circ p = p$.
Donc $p(y) = y$.
Finalement $\forall y \in E, p(y) = y$ c'est-à-dire $p = \text{Id}_E$.
- Si p est injective, on a $\forall x \in E, p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x)$ et comme p injective, $p(x) = x$. A nouveau $p = \text{Id}_E$.

Cor. 17.4 :

a. MATHS est composé de 5 lettres **distinctes**.

Il y a donc autant d'anagrammes du mot MATHS que de **permutations de ses lettres**.

Il y a donc $5! = 120$ anagrammes du mot MATHS.

Au contraire, dans EUCLIDE, il y a deux lettres E. Échanger ces deux E ne change pas le mot.

On adopte alors une autre méthode pour compter le nombre d'anagrammes d'EUCLIDE.

Choisir un anagramme d'EUCLIDE, c'est :

- Choisir la position des deux E parmi sept positions possibles : $\binom{7}{2} = 21$ positions pour les deux E.
 - **PUIS** choisir la position du U : 5 choix restants.
 - **PUIS** choisir la position du C : 4 choix restants.
 - **PUIS** choisir la position du L : 3 choix restants.
 - **PUIS** choisir la position du I : 2 choix restants.
 - **PUIS** placer le D dans la seule position restante.
- En tout, il y a donc $5! \times 21 = 2520$ anagrammes du mot EUCLIDE.

b. De la même manière que dans la question précédente :

Choisir un anagramme de BANANE, c'est :

- Choisir la position des deux A parmi six positions possibles : $\binom{6}{2} = 15$ positions pour les deux A.
- **PUIS** la position des deux N parmi quatre positions restantes : $\binom{4}{2} = 6$ positions pour les deux N.
- **PUIS** choisir la position du B : 2 choix restants.
- **PUIS** placer le E dans la seule position restante.

En tout, il y a donc $15 \times 6 \times 2 = 180$ anagrammes du mot BANANE.

Choisir un anagramme de MISSISSIPPI, c'est :

- Choisir la position des quatre S parmi dix positions possibles : $\binom{10}{4} = 210$ positions pour les quatre S.

- **PUIS** la position des quatre I parmi six positions restantes : $\binom{6}{4} = 15$ positions pour les quatre I.
- **PUIS** choisir la position du M : 2 choix restants.
- **PUIS** placer le P dans la seule position restante.

En tout, il y a donc $210 \times 15 \times 2 = 6300$ anagrammes du mot MISSISSIPPI.

Cor. 17.12 : Montrons-le par **récence forte**.

Initialisation :

Pour $n = 0$, par définition, $y_0 = x_0$ donc $x_0 = \sum_{k=0}^0 (-1)^{-k} \binom{0}{k} y_k$ (la somme ne comporte qu'un seul terme, et c'est y_0).

Hérédité :

Supposons la propriété vraie **pour tout entier k inférieur à un rang $n \in \mathbb{N}$ donné**.

Par définition, $y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x_k = x_{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} x_k$.

Donc, $x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} x_k$.

Or, par hypothèse de récurrence, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $x_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} y_i$.

Donc :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} y_i \\ \Rightarrow x_{n+1} &= y_{n+1} - \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} y_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_{n+1} &= y_{n+1} - \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} y_i \\ \Rightarrow x_{n+1} &= y_{n+1} + \sum_{i=0}^n (-1)^{1-i} y_i \left[\sum_{k=i}^n \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^k \right] \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que $\sum_{k=i}^n \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^k = (-1)^n \binom{n+1}{i}$.

$$\begin{aligned} \text{Or } \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!} \\ \text{puis } \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} &= \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} \times \frac{k!}{(n+1-k)!(k-i)!} \\ \text{Donc } \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} &= \binom{n+1}{i} \binom{k}{k-i}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^n \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^k &= \sum_{k=i}^n \binom{n+1}{i} \binom{n+1-i}{k-i} (-1)^k \\ &= \binom{n+1}{i} \sum_{k=i}^n \binom{n+1-i}{k-i} (-1)^k \\ &= \binom{n+1}{i} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n+1-i}{k} (-1)^{k+i} \\ &= \binom{n+1}{i} (-1)^i \sum_{k=0}^{n+1-i} \binom{n+1-i}{k} (-1)^k \\ &= \binom{n+1}{i} (-1)^i ((-1)^{n-i} + (1-1)^{n+1-i}) \\ &= \binom{n+1}{i} (-1)^n \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion : ça marche !

La seconde question est une application immédiate de cette formule.